

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Переменяемость типа I в присутствии шума

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 03.03.03 «Радиофизика»

факультета нелинейных процессов

Пенского Максима Алексеевича

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

А.А. Короновский

Зав. кафедрой физики открытых систем

д.ф.-м.н., профессор

А.А. Короновский

Саратов 2017 г.

Введение

Множество процессов в природе и физике имеют перемежающийся характер, когда во временной реализации исследуемой системы (при неизменных значениях управляющих параметров) последовательно чередуются два различных динамических режима (периодические колебания внезапно сменяются хаотическими, на смену которым вновь приходит периодическая динамика; стационарное состояние прерывается колебательным движением, после чего система вновь приходит к стационарному состоянию и т.п.).

Проявления перемежающегося поведения весьма многогранны и охватывают множество систем, что позволяет говорить об универсальности данного явления и его фундаментальном характере [1,2].

На сегодняшний день существует определенная классификация типов перемежающегося поведения, в частности можно отметить перемежаемость типа I–III, on-off перемежаемость, перемежаемость игольного ушка, перемежаемость кольца [3]. Стоит упомянуть, что данные типы перемежающегося поведения схожи между собой, наличием во временном ряду двух различных режимов, чередующихся между собой. При этом каждый выделенный тип перемежаемости обладает собственными особенностями и характеристиками (одной из основных является зависимость средней длительности ламинарных фаз от управляющего параметра и распределение длительностей ламинарных фаз). Механизмы, приводящие к возникновению перемежающегося поведения каждого типа, также различны [3].

Целью данной работы является исследование перемежаемости типа I, в частности, статистических закономерностей перемежающегося поведения турбулентных и ламинарных фаз, а также влияние стохастического слагаемого на поведение системы.

Первая глава бакалаврской работы посвящена рассмотрению типов перемежающегося поведения, наблюдаемого в нелинейных системах.

Во второй главе бакалаврской работы на примере однопараметрического отображения окружности рассматривается явление перемежаемости I типа и её статистические характеристики.

В третьей главе бакалаврской работы исследуется степень влияния стохастического слагаемого на поведение системы.

В заключении подведены итоги работы, а также сформулированы основные полученные результаты.

Глава 1. Понятие перемежаемости

Впервые явление перемежаемости было обнаружено в задачах гидродинамики [4], где перемежающуюся структуру течения можно пронаблюдать в ряде случаев при больших числах Рейнольдса. Некоторое время спустя явление перемежаемости было обнаружено в нелинейных динамических системах, демонстрирующих хаотическую динамику. При этом было установлено, что перемежаемость является одним из классических сценариев перехода от периодического режима к хаотическому [4,5]. В данном случае наблюдаемый сигнал представляет собой чередующуюся последовательность регулярных (ламинарных) фаз и хаотических всплесков (турбулентных фаз). При изменении управляющего параметра турбулентные импульсы становятся все более частыми до того момента, пока движение полностью не хаотизируется. В зависимости от характера потери устойчивости периодическим режимом (определяемого мультипликаторами предельного цикла) различают перемежаемость типов I-III [2].

Перемежаемость типа I, возникающую в окрестности седло-узловой бифуркации, можно пронаблюдать в динамике генератора периодических колебаний под внешним гармоническим воздействием в случае малой расстройки собственных частот генератора и внешнего воздействия. Ниже границы синхронизации поведение системы соответствует перемежающемуся поведению типа I, представляющему собой чередование ламинарных и турбулентных фаз.

Для такого генератора под ламинарными фазами понимаются периоды T установления режимов синхронизации колебаний, когда разность фаз:

$$\Delta\varphi(t) = |\varphi(t) - \varphi_e(t)| \quad (1)$$

остаётся, примерно, постоянной и ограниченной по абсолютной величине $\Delta\varphi(t) \approx const$ (здесь $\varphi(t)$ – мгновенная фаза неавтономного осциллятора,

$\varphi_e(t)$ – фаза внешнего сигнала). Эти участки синхронного поведения прерываются фазовыми проскоками – турбулентными фазами, когда величина $\Delta\varphi(t)$ быстро изменяется на 2π .

Увеличение параметра надкритичности, то есть, уменьшение отстройки частоты внешнего воздействия или уменьшение амплитуды внешнего воздействия, приводит к возрастанию числа турбулентных фаз. Начиная с некоторого значения параметра надкритичности, ламинарные фазы в динамике системы перестают наблюдаться [1].

Переमेжаемость типа “On–Off” может возникать в системах, в которых управляющий параметр задается случайной или хаотической величиной. В этом случае динамика системы выглядит как длительные периоды регулярного движения, которые прерываются быстрыми хаотическими импульсами. Ознакомившись с более детальными исследованиями перемежаемости типа “On – Off”, выполненными в работе [7], можно утверждать, что распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется степенному закону

$$N(L) \sim L^{-3/2}, \tag{2}$$

а зависимость средней длительности ламинарных фаз $\langle L \rangle$ от параметра надкритичности δ удовлетворяет степенной зависимости:

$$L \sim (\delta)^{-1}. \tag{3}$$

Перемежаемость типа “кольцо” возникает при синхронизации двух однонаправлено связанных хаотических осцилляторов с существенной расстройкой по собственным частотам. Впервые данный тип перемежаемости был исследован на примере модельной системы однонаправленно связанных осцилляторов Ресслера, демонстрирующих хаотическое поведение [8].

Из изучения перемежаемости “кольца”, проведенного в работе [8], можно выделить, что для фазовой синхронизации синхронный режим при больших частотных расстройках разрушается в тот момент, когда предельный

цикл на фазовой плоскости пересекает начало координат (при незначительных расстройках разрушение фазовой синхронизации совпадает с моментом возникновения седло-узловой бифуркации). В момент, когда на плоскости комплексных амплитуд предельный цикл пересекает начало координат, аттрактор, соответствующий динамике системы, перестает быть фазовокогерентным.

Для данного типа перемежаемости распределение длительностей ламинарных фаз подчиняется экспоненциальному закону [8]:

$$N(\tau) \sim \exp k\tau, \quad (4)$$

где k – некоторая константа.

В свою очередь, зависимость средней длины ламинарной фазы от управляющего параметра выглядит следующим образом:

$$\langle \tau(\varepsilon) \rangle = T \left(1 - \ln^{-1} \left(\frac{\varepsilon - \varepsilon_t}{\varepsilon_c - \varepsilon_t} \right) \right), \quad (5)$$

где ε_t – сила связи, соответствующая переходу к асинхронной динамике, ε_c – граница фазовой синхронизации (при этом перемежаемость типа “кольцо” наблюдается внутри интервала $[\varepsilon_t, \varepsilon_c]$).

В данном разделе был приведен краткий обзор различных типов перемежаемости. Среди них рассмотрены как классические типы перемежаемости – типа I, так и являющиеся более специфическими, возникающие в подверженных явлению синхронизации системах [2].

Глава 2. Перемежаемость типа I и ее статистические характеристики

Явление перемежаемости I типа наблюдается при потере устойчивости аттрактора, когда его мультипликатор становится равным и, затем больше +1. Простейшим случаем, когда можно наблюдать перемежаемость типа I, является одномерное отображение, при этом здесь в качестве аттрактора выступает неподвижная точка. В то же самое время, круг систем, в которых наблюдается данный тип перемежаемости, оказывается существенно шире (в частности, он включает в себя системы с потоковым временем).

Мультипликатор неподвижной точки отображения $x_{n+1} = f(x_n)$, можно трактовать, как значение производной $f'(x_0)$, вычисленной в точке x_0 , где x_0 находится из уравнения $x_0 = f(x_0)$; другими словами, x_0 – неподвижная точка данного отображения. Неподвижных точек у отображения может быть несколько, и у них, как правило, имеются разные мультипликаторы. Следует выделить, что мультипликатор – это коэффициент при x_n при разложении стоящей в правой части функции в ряд Тейлора. Данный коэффициент показывает, как в линейном режиме изменяется некоторое возмущение вблизи неподвижной точки.

Для перемежаемости типа I главной статистической характеристикой является зависимость средней длительности ламинарной фазы $\langle T \rangle$ от параметра надкритичности: $\langle T \rangle \sim (\varepsilon - \varepsilon_c)^{-1/2}$, где ε_c – значение параметра, при котором происходит седло-узловая бифуркация. Следует отметить, что более детальное описание перемежаемостей типа I-III, а также подробный вывод статистических характеристик для данных типов поведения, приведены в работах [2,4].

В данной работе, для исследования перемежаемости типа I, будет рассмотрено однопараметрическое отображение окружности (6). Для нахождения момента бифуркации (рис. 1), было аналитически получено условие касательной (седло-узловой) бифуркации для однопараметрического отображения окружности:

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + \varepsilon + k \sin x_n \quad (6)$$



Рисунок 1 – Касательная бифуркация. Рассматриваемый для данного случая момент бифуркации соответствует значению параметра ($\varepsilon_c = \varepsilon$).

Неподвижные точки отображения ищем из уравнения:

$$x_0 = f(x_0) \quad (7)$$

$$x_0 = x_0 + \varepsilon + k \sin x_0$$

$$\varepsilon + k \sin x_0 = 0$$

$$\sin x_0 = -\varepsilon/k$$

откуда получаем, что:

$$x_0 = (-1)^n \arcsin \varepsilon/k + \pi n \quad (8)$$

Зная значение мультипликатора μ (первая производная отображения (6), взятая в неподвижной точке системы) в случае касательной бифуркации $\mu = +1$ [5], можно найти значение управляющего параметра ε , при фиксированном параметре нелинейности ($k = 0.5$):

$$\mu' = f'(x_0) \quad (9)$$

$$f' = 1 + k \cos(x) = 1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2/k^2} k$$

при $k = 0.5$, имеем:

$$1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2/k^2} k = 1$$

$$k = 0.5 \Rightarrow \varepsilon = 0.5$$

Из этого следует, что момент бифуркации при фиксированном значении параметра $k = 0.5 \Rightarrow \varepsilon = 0.5$.

Переменяемость типа I возникает ниже точки седло-узловой бифуркации, что как раз соответствует порогу установления/разрушения синхронного режима в периодическом осцилляторе под внешним гармоническим воздействием [6]. При этом средняя длительность ламинарных фаз T обратно пропорциональна квадратному корню из параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$, то есть:

$$T \sim (\varepsilon_c - \varepsilon)^{-\frac{1}{2}}, \quad (10)$$

где ε – управляющий параметр, а ε_c – его бифуркационное значение, соответствующее точке седло-узловой бифуркации [1].

Чтобы детальнее рассмотреть статистические характеристики перемежаемости I типа, численно построим однопараметрическое отображение окружности (б):

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + \varepsilon + \kappa \sin x_n,$$

где ε – управляющий параметр. Ниже критического значения параметра $\varepsilon < \varepsilon_c$ будут наблюдаться устойчивая и неустойчивая неподвижные точки, в то время как при $\varepsilon_c > \varepsilon$ существует «узкий коридор» (область на графике, принимаемая в данных масштабах за ламинарную фазу) между графиком функции $f(x)$ и биссектрисой $x_{n+1} = x$, такой, что изображающая точка отображения движется вдоль него, что можно пронаблюдать на Рисунке 2.

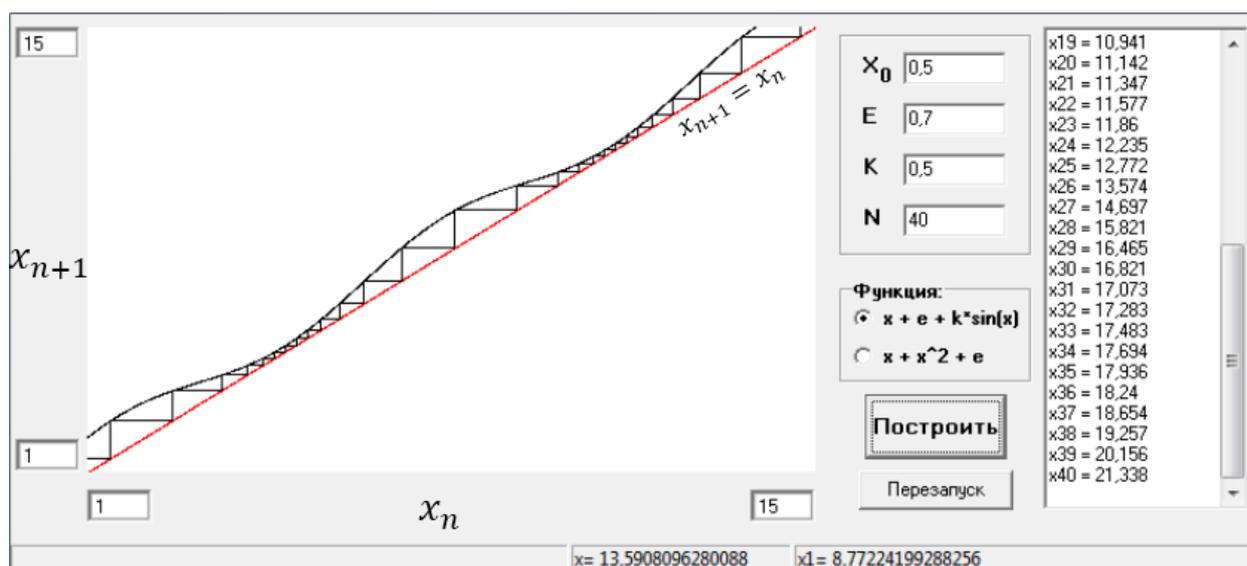


Рисунок 2 – Итерационная диаграмма (диаграмма Ламерея).

Количество итераций N при прохождении изображающей точки отображения через «узкий коридор», было принято за длительность ламинарной фазы. Тогда был ограничен узкий участок коридора, чтобы посчитать количество итераций, за которое изображающая точка отображения его проходит (рис. 3).

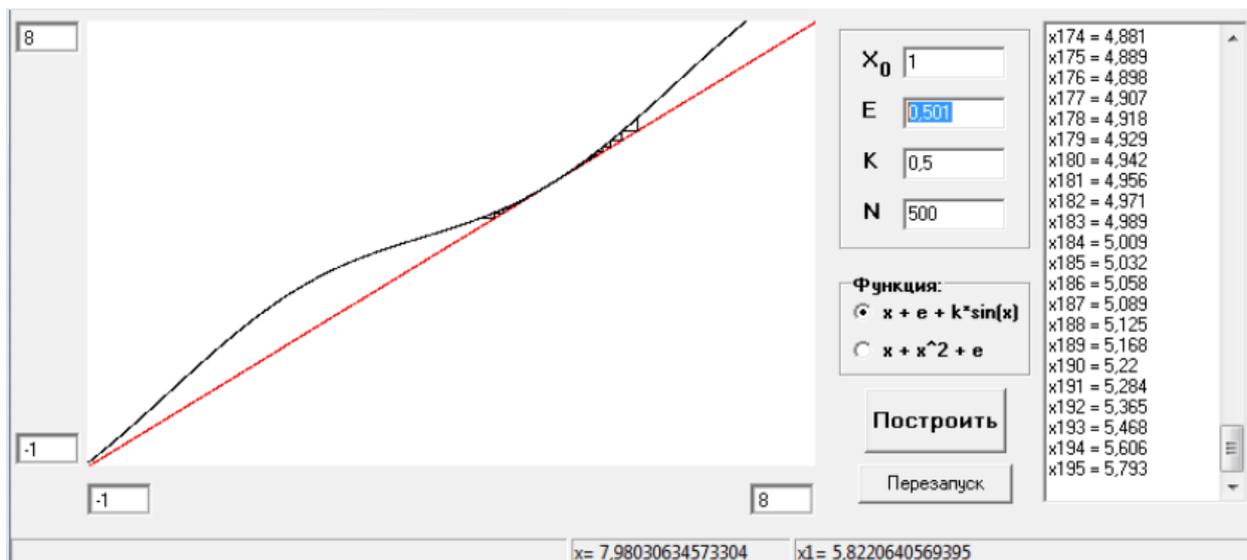


Рисунок 3—Итерационная диаграмма с ограниченным интервалом рассмотрения, соответствующим ламинарной фазе.

При изменении параметра надкритичности в интервале $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ от $(\varepsilon_c - \varepsilon) = 0.001$ до $(\varepsilon_c - \varepsilon) = 0.014$ при неизменных других значениях параметров была найдена зависимость (рис. 4) длительности ламинарной фазы N от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$.

Из Рисунка 4 видно, что при уменьшении параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ будет увеличиваться длительность ламинарной фазы N . Для удобства сравнения численного и теоретического решений этот график представлен в двойном логарифмическом масштабе.

На Рисунке 4 показано, что полученное численное решение (где длительность ламинарной фазы определяется количеством итераций), обозначенное на графике точками, близко к теоретической зависимости

$\langle N \rangle \sim \varepsilon^{-1/2}$, показанной на графике прямой линией.

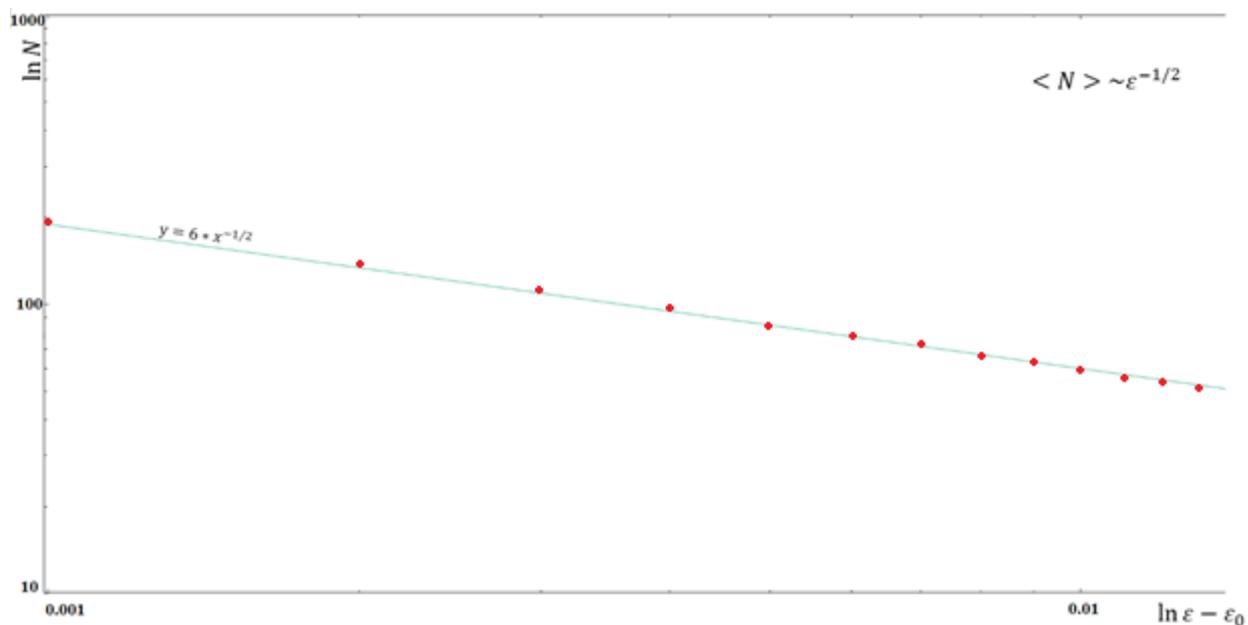


Рисунок 4 – Зависимость логарифма длительности ламинарной фазы $\ln N$ от логарифма параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$.

Таким образом, в данном разделе были рассмотрены статистические характеристики перемежаемости типа I на примере однопараметрического отображения окружности, а также, получено численное сравнение длин ламинарных фаз от управляющего параметра.

Глава 3. Влияние стохастического слагаемого на поведение системы

Чтобы изучить явление перемежаемости типа I в присутствии шума, рассмотрим то же самое квадратичное отображение (6), добавив в него стохастическое слагаемое:

$$x_{n+1} = x_n + \varepsilon + \kappa \sin x_n + \xi_n \quad (11)$$

где ξ_n – дельта-коррелированный белый шум с нулевым средним:

$$[\langle \xi_n \rangle = 0, \langle \xi_n \xi_m \rangle = D\delta(n - m)]. \quad (12)$$

Степень влияния стохастического слагаемого ξ_n на поведение системы будем регулировать значением параметра D (интенсивность шума). При положительных значениях управляющего параметра ε ($\varepsilon > 0$), изображающая точка на итерационной диаграмме, отвечающая поведению системы (6), движется вдоль узкого коридора, и это движение возмущается случайным образом. Пока интенсивность шума невелика, наблюдаются характеристики, близкие к характеристикам классической перемежаемости типа I.

Чтобы подтвердить выше сказанное, численно смоделируем воздействие шума на систему (6), задав параметр шума $D = (10^{-6})$, при неизменных иных параметрах (рис. 5).

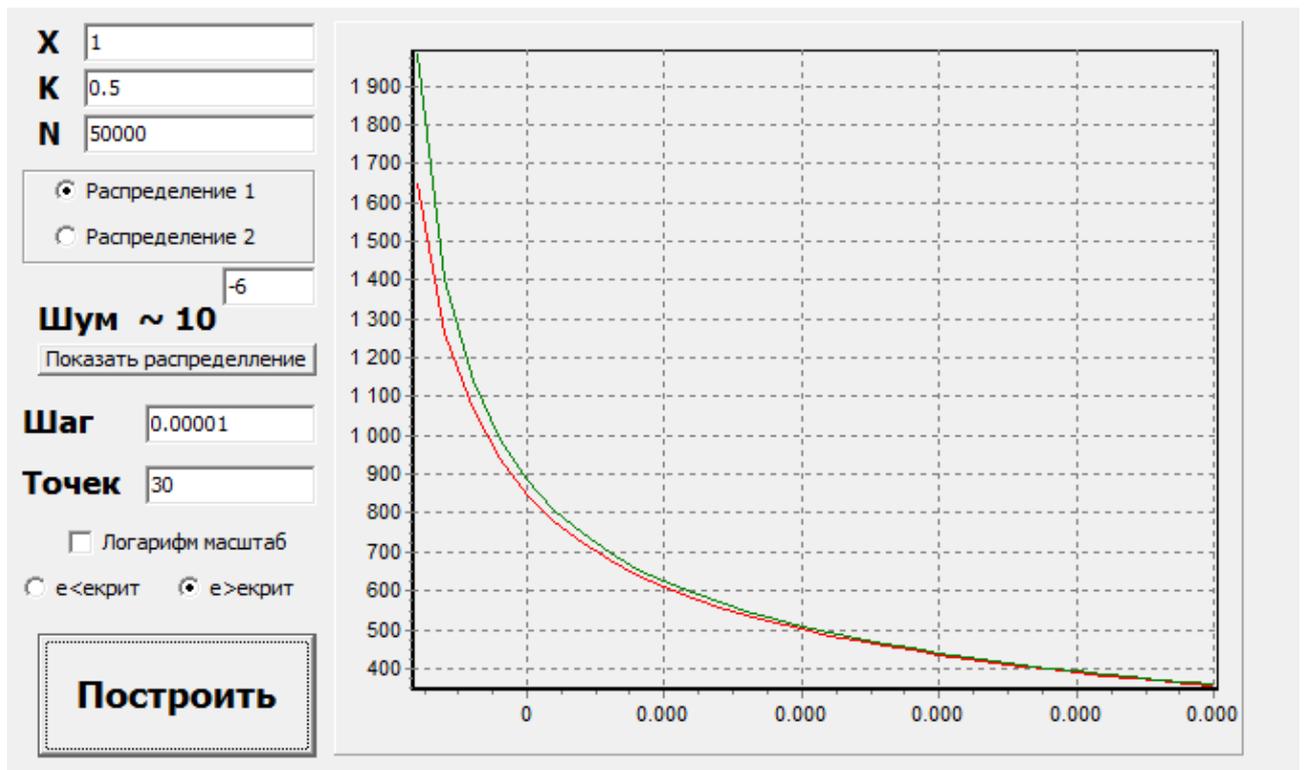


Рисунок 5 – Зависимость длительности ламинарной фазы N от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ при интенсивности шума $D = (10^{-6})$ (красным цветом обозначена кривая с воздействием шума).

Также были численно получены зависимости длин ламинарных фаз от параметра надкритичности $(\varepsilon_c - \varepsilon)$ при различных интенсивностях шума D .

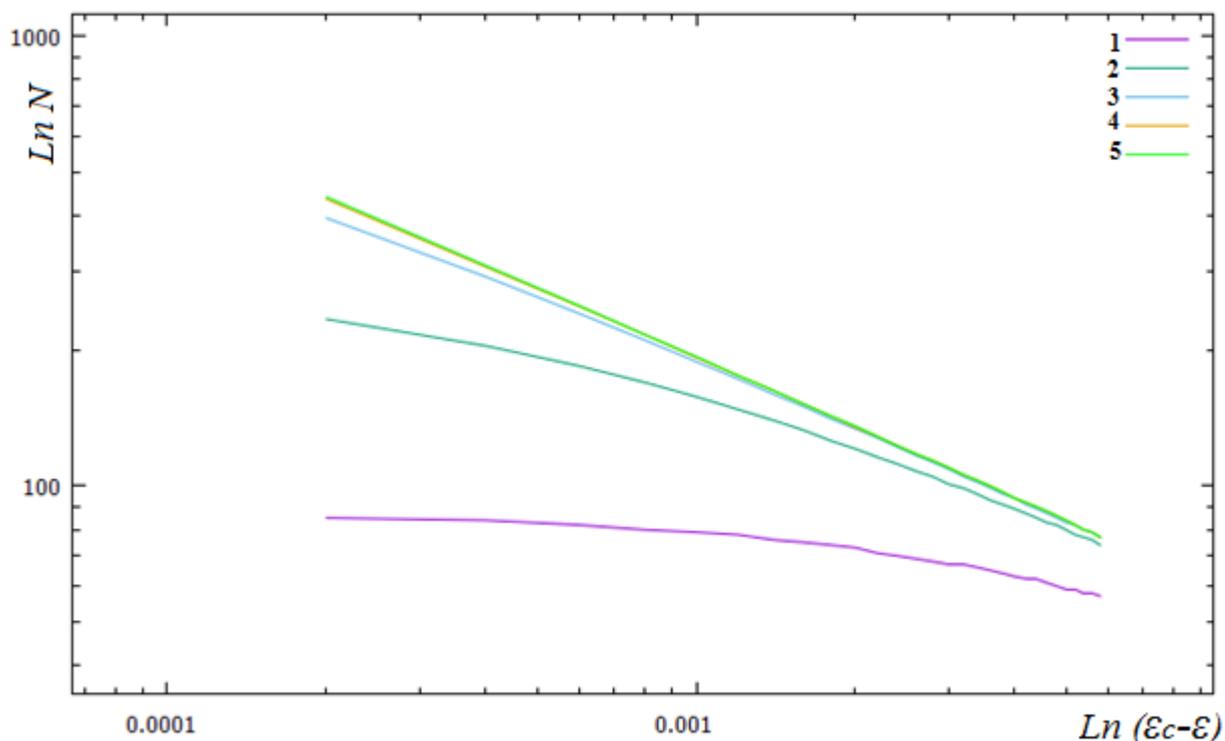


Рисунок 6 – Зависимость логарифма длительности ламинарной фазы $\ln N$ от логарифма параметра надкритичности $\ln(\varepsilon_c - \varepsilon)$, для различных параметров D (интенсивность шума).

На рисунке 6 цифрами 1,2,3,4,5 обозначены зависимости, соответствующие определенным параметрам шума D . Прямая 5 отображает поведение системы при отсутствии какого-либо внешнего воздействия. Кривые 4 и 3, соответствующие интенсивностям шума D равным (10^{-6}) и (10^{-5}) соответственно, практически не отклоняются от линии 5 в силу того, что степень воздействия на систему, оказываемая шумом, крайне мала. Обратная ситуация наблюдается с кривыми 2 и 1, которые соответствуют интенсивностям шума (10^{-4}) и (10^{-3}) ; в данном случае влияние шума на систему соотносимо велико, что приводит к значительным отклонениям данных кривых от исходной зависимости без воздействия шума, отображаемой прямой 5. Из всего выше изложенного можно сделать вывод, что при неизменных других параметрах и увеличении интенсивности шума будет уменьшаться длительность ламинарных фаз N . Для удобства сравнения кривых рис. 6 представлен в двойном логарифмическом масштабе.

Заключение

В ходе проделанной работы было экспериментально исследовано перемежающееся поведение в окрестности седло-узловой бифуркации в присутствии шума на примере однопараметрического отображения окружности. Показано, что при увеличении параметра надкритичности ($\varepsilon_c - \varepsilon$) уменьшается длительность ламинарной фазы N (где длительность ламинарной фазы определяется количеством итераций). Такое, полученное дискретным образом, решение является близким к теоретической зависимости. Были аналитически получены значения управляющих параметров отображения, при которых наблюдается касательная бифуркация. Также были численно получены зависимости длин ламинарных фаз от параметра надкритичности ($\varepsilon_c - \varepsilon$) при различных интенсивностях шума D , из которых следует, что при неизменных других параметрах и увеличении интенсивности шума будет уменьшаться длительность ламинарной фазы N .

Используемая литература

- [1] А.А. Овчинников. Экспериментальное изучение перемежаемости типа I в присутствии шума на примере генератора, синхронизируемого внешним гармоническим сигналом // Изв. вузов «ПНД», т. 17, № 6, 2009
- [2] Шустер Г. Детерминированный хаос // М.: Мир, 1988
- [3] М.О. Журавлев, А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов. Теоретическое и численное исследование перемежаемости перемежаемостей в связанных хаотических системах // Письма в ЖТФ, 2013, том 39, вып. 14
- [4] П. Берже, И. Помо, К. Видаль. Порядок в хаосе // М.: Мир.1991
- [5] А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Ю.В. Седова, Л.В. Тюрюкина. Бифуркации отображений // Издательский центр «Наука», 2012, 196 с.
- [6] А.А. Короновский, М.К. Куровская, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов. Перемежаемость типа I в присутствии шума и перемежаемость игольного ушка // Изв. вузов «ПНД», т. 18, № 1, 2010
- [7] J. F. Heagy, N. Platt, S. M. Hammel. Characterization of on–off intermittency // Phys. Rev. E 49 (1994), No. 2, 1140–1150.
- [8] A. E. Hramov, A. A. Koronovskii, M. K. Kurovskaya, S. Boccaletti. Ring intermittency in coupled chaotic oscillators at the boundary of phase synchronization // Phys. Rev. Lett. 97 (2006), 114101.