Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Характеристика режимов динамических систем с помощью показателей Ляпунова

Автореферат бакалаврской работы

по направлению 03.03.03 Радиофизика

студента 4 курса Факультета нелинейных процессов

Постаногова Григория Сергеевича

Научный руководитель
проф., д-р физ.-мат. наук ____________________ А.А. Короновский

Зав. кафедрой физики

открытых систем

проф., д-р физ.-мат. наук ____________________ А.А. Короновский

Саратов 2017 г.

Содержание

Введение

Предполагалось, что появление мощных вычислительных устройств позволит предсказывать движение или развитие системы для любого сколь угодно позднего момента времени. Однако развитие вычислительной техники не привело к ожидаемой бесконечной предсказуемости в динамике. Напротив, движение некоторых простых динамических систем не всегда может быть предсказано на большой интервал времени. Такие движения были названы хаотическими, и их исследование привлекло новые математические идеи в динамику, в частности показатель Ляпунова [1].

Нелинейные явления и процессы широко распространены в окружающем мире, явление динамического хаоса встречается в механике [2], в гидродинамике [3], в метеорологии [4] и в радиоэлектронике [5]. Правильное представление о таких процессах невозможно без понимания возможностей хаоса, а также связанных с этим принципиальных ограничений на предсказуемость поведения сложных систем

В данной выпускной квалификационной работе будут рассмотрены системы Лоренца, Рёсслера и генератор TORUS при заданных параметрах и рассчитаны их спектры ляпуновских показателей.

1 Система Лоренца

Американский исследователь Эдвард Лоренц, занимавшийся проблемами прогноза погоды, в 1963 году опубликовал статью «Детерминированное непериодическое течение», которая была посвящена исследованию нелинейной системы трёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, полученной при анализе задачи о конвекции в слое жидкости, подогреваемом снизу. При моделировании этой задачи в системе обнаружилось сложное непериодическое изменение переменных во времени, в системе устанавливался хаотический режим.

Система Лоренца задаётся следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) \\ \dot{y} = rx - y - xz \\ \dot{z} = -bz + xy \end{cases} \tag{1}$$

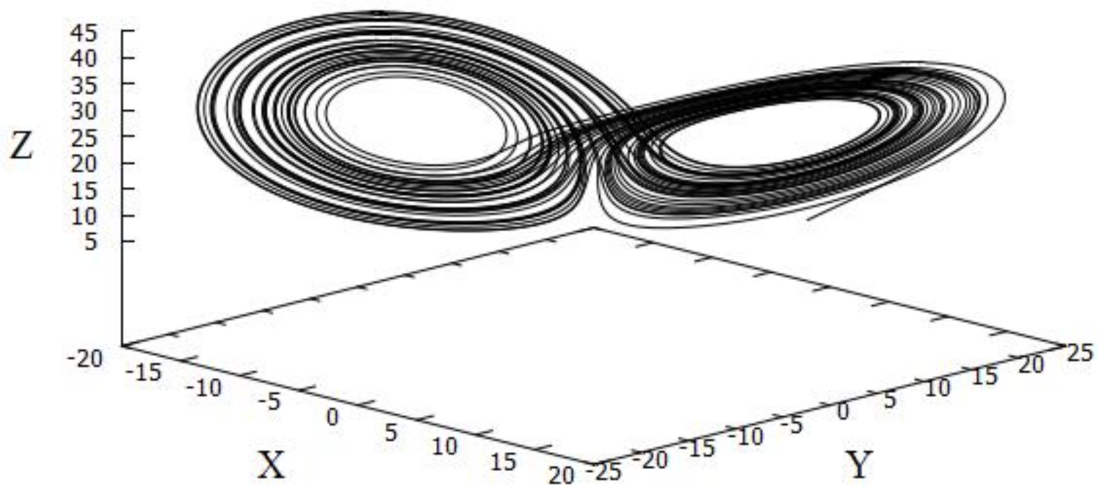

Рисунок 2. Аттрактор системы Лоренца при стандартных параметрах: σ = 10, r = 28, b = 8/3.

На рисунке 2 представлен результат численного решения системы Лоренца методом Рунге-Кутты.

Чтобы вычислить спектр ляпуновских показателей система уравнений (6) дополняется тремя комплектами уравнений в вариациях вида:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = \sigma(\tilde{y} - \tilde{x}) \\ \dot{\tilde{y}} = r\tilde{x} - \tilde{y} - x\tilde{z} - \tilde{x}z \\ \dot{\tilde{z}} = -b\tilde{z} + x\tilde{y} + \tilde{x}y \end{cases} \quad (2)$$

Система из 12 уравнений решается численно методом Рунге-Кутты с перенормировкой и ортогонализацией векторов возмущения по ходу вычислений.

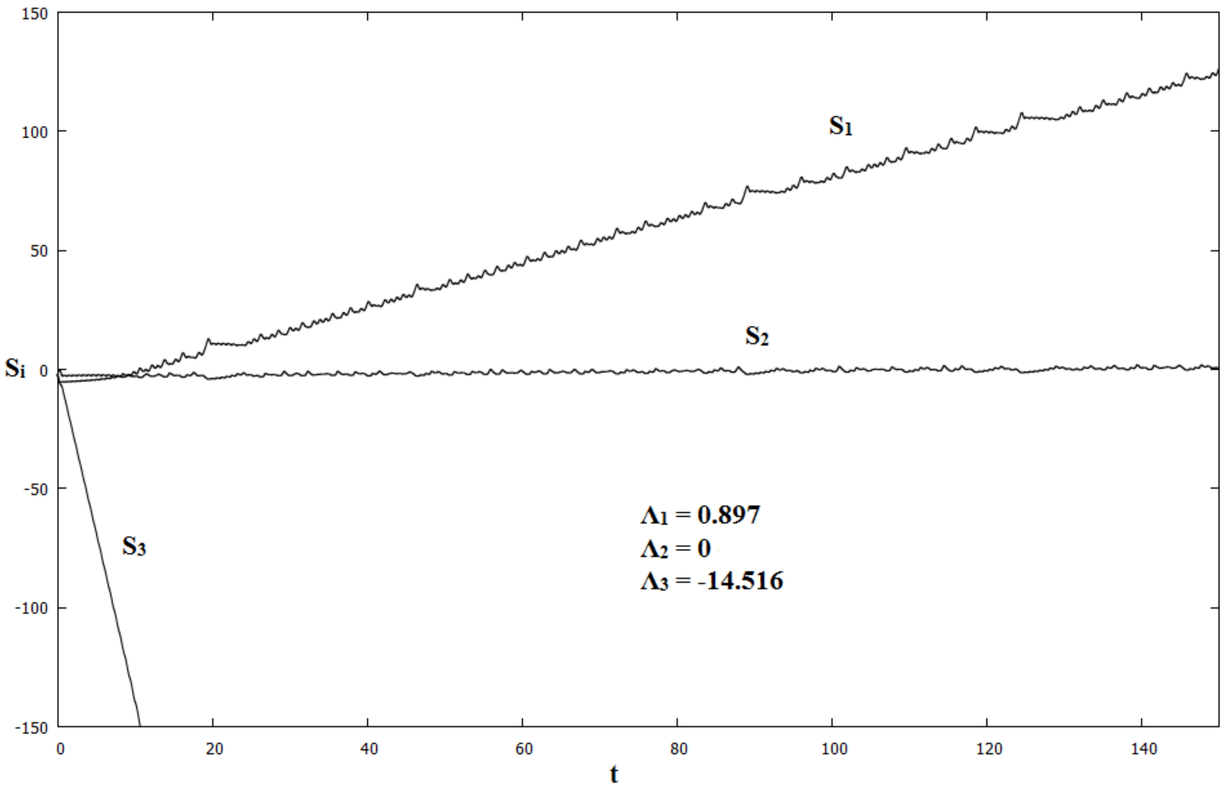

Рисунок 3. Суммы S_i для вычисления ляпуновских показателей аттрактора системы Лоренца с использованием ортогонализации по Граму-Шмидту.

2 Аттрактор Ресслера

Немецкий исследователь, Отто Ресслер, интересовался динамическими системами в приложении к химии и биологии. Задавшись целью создать простую модель с хаотическим поведением, в 1976 году он предложил такую систему дифференциальных уравнений, которая служит с тех пор одним из классических объектов в нелинейной динамике [9].

Система Ресслера задаётся следующими уравнениями:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + ay \\ \dot{z} = b + (x - \mathrm{c})z \end{cases} \qquad (3)$$

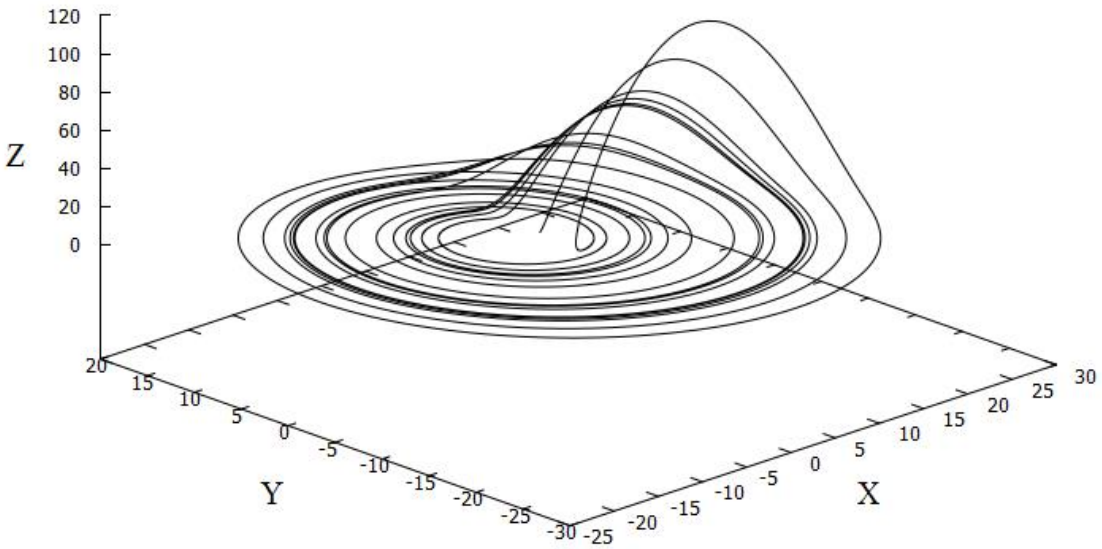

Рисунок 4. Аттрактор системы Ресслера при параметрах: a = 0.2, b = 0.2, c = 14.

Чтобы вычислить спектр ляпуновских показателей система уравнений (8) дополняется тремя комплектами уравнений в вариациях вида:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}} = -\tilde{y} - \tilde{z} \\ \dot{\tilde{y}} = \tilde{x} - a\tilde{y} \\ \dot{\tilde{z}} = x\tilde{z} + \tilde{z}x - c\tilde{z} \end{cases} \tag{4}$$

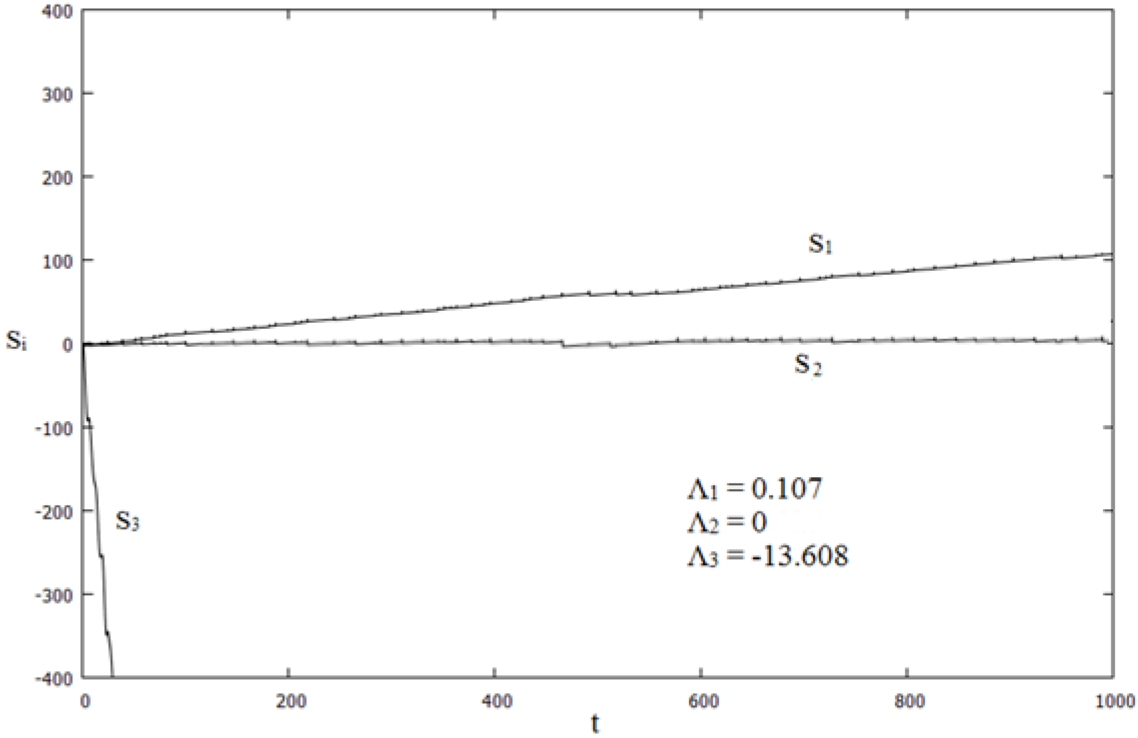

Рисунок 5. Суммы S_i для вычисления ляпуновских показателей аттрактора системы Ресслера с использованием ортогонализации по Граму-Шмидту.

3 Генератор TORUS

Генератор TORUS представляет собой автономную систему с нелинейным элементом, имеющим кусочно-линейную вольт амперную характеристику и тремя реактивными элементами [5].

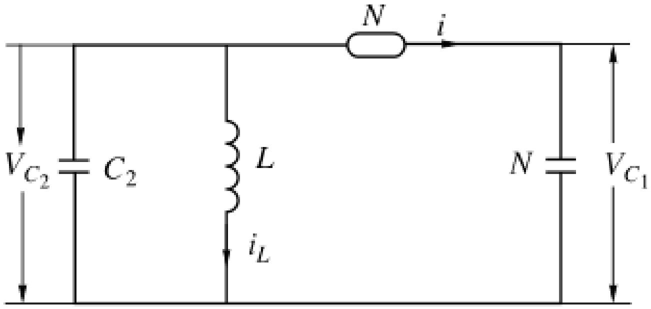

Рисунок 6. Принципиальная схема генератора TORUS

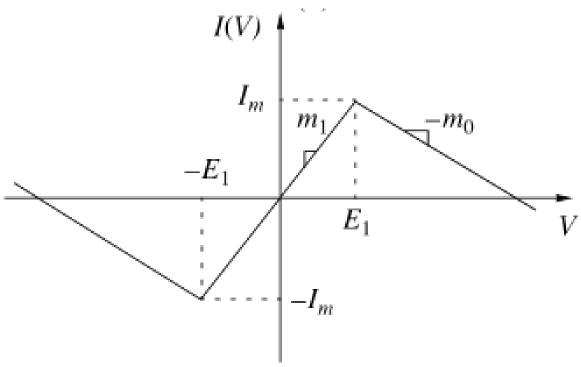

Рисунок 7. Вольт амперная характеристика нелинейного элемента

Динамика этого генератора описывается тремя обыкновенными безразмерными дифференциальными уравнениями первого порядка, полученными из законов Кирхгофа:

$$\begin{cases} \dot{x} = \dfrac{(\alpha - 1)f(x) - z}{\gamma} \\ \dot{y} = \dfrac{\alpha f(x)}{\gamma} \\ \dot{z} = \gamma(x + y) \end{cases}, \qquad (5)$$

Где

$$f(x) = -\frac{m_0}{m_1}x + \frac{1}{2}\left(\frac{m_0}{m_1} + 1\right)(|x+1| - |x-1|) \tag{6}$$

- безразмерная кусочно-линейная функция, описывающая ВАХ нелинейного элемента генератора.

Параметры схемы и безразмерные величины системы (9) связаны следующими соотношениями:

$$x = V_{C_1} / E_1 \tag{7}$$

$$y = V_{C_2} / E_1 \tag{8}$$

$$z = i_L / I_m \tag{9}$$

$$\tau = \frac{t}{\sqrt{LC_2}} \tag{10}$$

$$\alpha = \frac{C_2}{C_1} \tag{11}$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{m_1}\right)\sqrt{C_2/L} \tag{12}$$

Величины m_0 и m_1 характеризуют наклон участков кусочно-линейной функции $f(x)$.

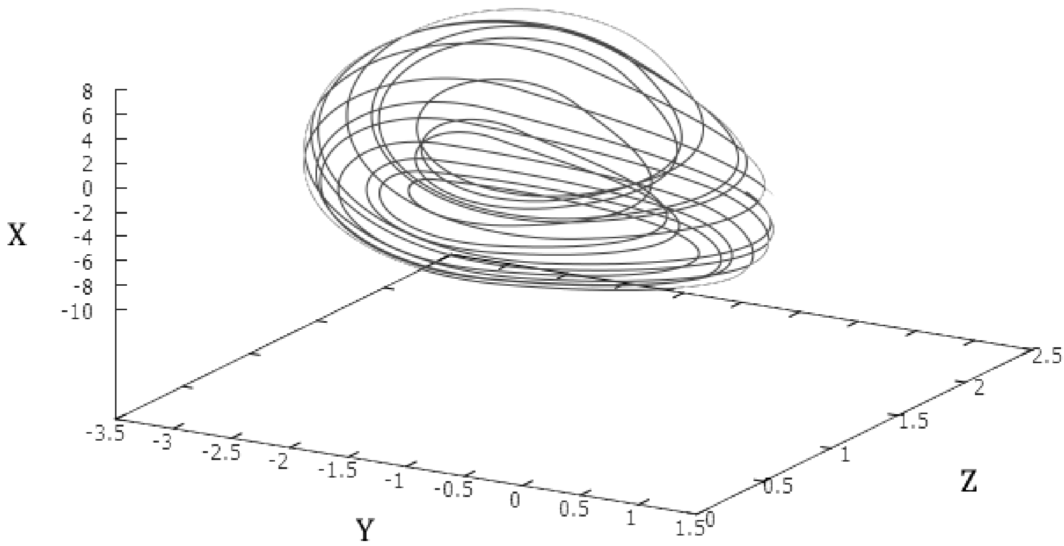

Рисунок 8. Аттрактор генератора TORUS при параметрах:

L = 10 мГн, C_1 = 1 нФ, C_2 = 20 пФ.

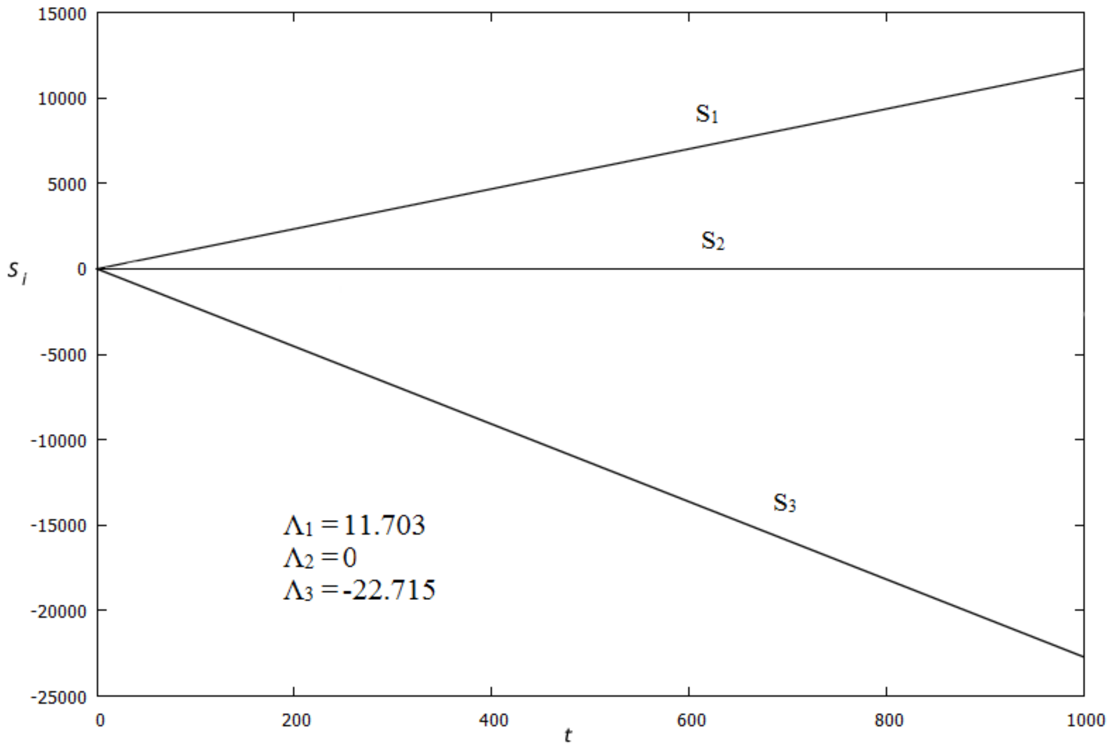

Рисунок 9. Суммы S_i для вычисления ляпуновских показателей генератора TORUS с использованием ортогонализации по Граму-Шмидту.

Заключение

В этой работе были рассмотрены понятия динамической системы, динамического хаоса и показателя Ляпунова. Получено численное решение систем Лоренца, Рёсслера, генератора TORUS и построены их аттракторы, в которых реализуются хаотические колебания. Вычислены ляпуновские показатели. Наличие положительных показателей Ляпунова подтверждает наличие хаотической динамики в этих системах.

Список используемых источников

1 Мун Ф. Хаотические колебания: Вводный курс для научных работников и инженеров: Пер. с англ – М.:Мир, 1990.

2 Кузнецов, С.П. Динамический хаос/С. П. Кузнецов. М. : Физматлит, 2006

3 Ландау Л.Д. К проблеме о турбулентности 1944 г.

4 Лоренц Э. Детерминированное непериодическое течение 1963 г.

5 Структура бассейнов притяжения генератора “TORUS”/ Е. Н. Егоров, А. А. Короновский, А. Е. Храмов // Журн. Радиотехника и электроника. 2004. Т. 49, № 6. С. 1-6.

6 Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Бином, 2001 — с. 363—375

7 Ильина В. А., Силаев П. К. Численные методы для физиков-теоретиков. т. 2. — Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. — с. 16-30.

8 J. C. Butcher. Numerical Methods for Ordinary Differential Equations. The University of Auckland, New Zealand.

9 Peitgen, Heinz-Otto; Jürgens, Hartmut & Saupe, Dietmar (2004), "12.3 The Rössler Attractor", «Chaos and Fractals: New Frontiers of Science», Springer, cc. 636–646