Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Плоскость параметров стандартного отображения в области малой диссипации

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 431 группы

направления 03.03.03 Радиофизика

Факультета нелинейных процессов

Храпова Дмитрия Валерьевича

Научный руководитель
доцент КФОС, к.ф.-м.н ____________________ Савин Д. В.

Зав. кафедрой физики
открытых систем
проф., д-р физ.-мат. наук ____________________ А.А. Короновский

Саратов 2017 г.

Введение

В нелинейной динамике существуют два типа динамических систем. Это консервативные системы и диссипативные системы [1]. Их отличие заключается в том, что в консервативных системах сохраняется объем в фазовом пространстве (в случае, если речь идет о механической системе, это означает что в ней выполняется закон сохранения механической энергии).

В диссипативной же системе энергия, вследствие диссипации, со временем уменьшается. Объем фазового пространства сжимается и происходит образование аттракторов. Известно, что в системах с сильной диссипацией аттрактор, как правило один (или их не много), а в системах с малой диссипацией аттракторов может сосуществовать довольно много [2-4].

В работе планируется на примере модельной системы - стандартного отображения Чирикова – Тейлора - с помощью компьютерного моделирования построить и исследовать: фазовые портреты в консервативном и диссипативном случаях, бифуркационные деревья при различных параметрах диссипации и карты динамических режимов, а также провести сравнительный анализ динамики системы в различных режимах.

Стандартное отображение и устройство его фазовой плоскости

Стандартное отображение - это нелинейное отображение, описывающее движение ротатора под импульсным воздействием [5, 6]. Данная модель позволяет наблюдать такие явления, как удвоение периода, образование сосуществующих аттракторов в случаях с малой диссипацией, и другие явления, встречающиеся в колебательных системах различной природы. Стандартное отображение задается итерационными уравнениями:

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= B * p_n + K * sinx_n \\ x_{n+1} &= \{x_n + p_{n+1}\} \end{aligned} \tag{1}$$

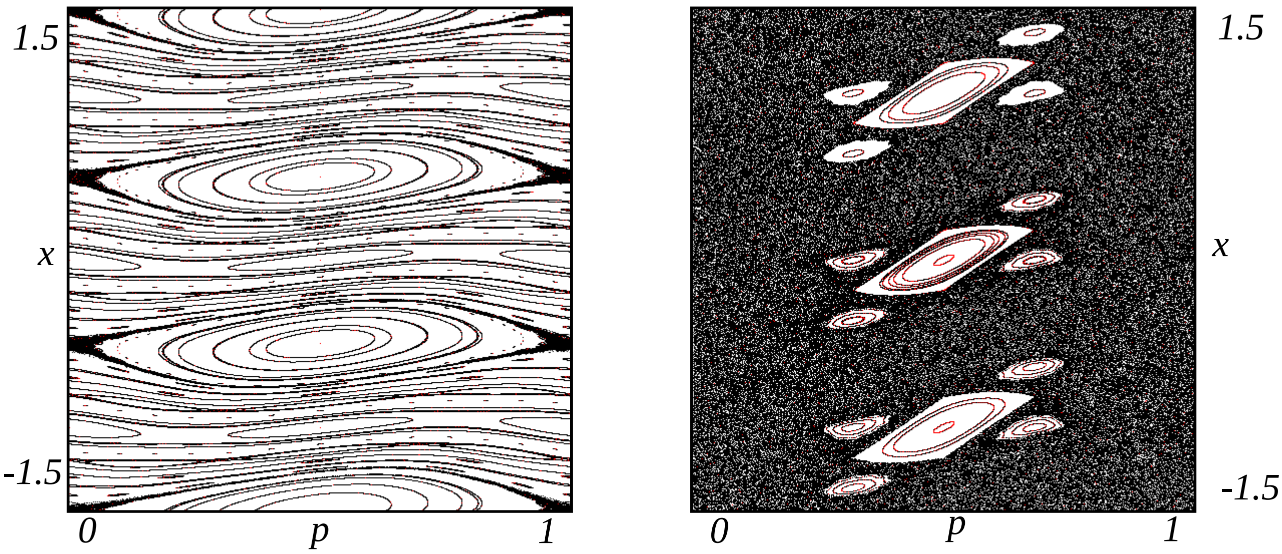
В уравнении (1) p - импульс системы, x – координата, K – амплитуда внешнего воздействия, B – параметр, отвечающий за диссипацию.

Рассчитаем Якобиан системы (1)

$$det\begin{pmatrix} B & K * cosx_n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B - 0 = B \tag{2}$$

Система (1) консервативна при значении $B = 1$.

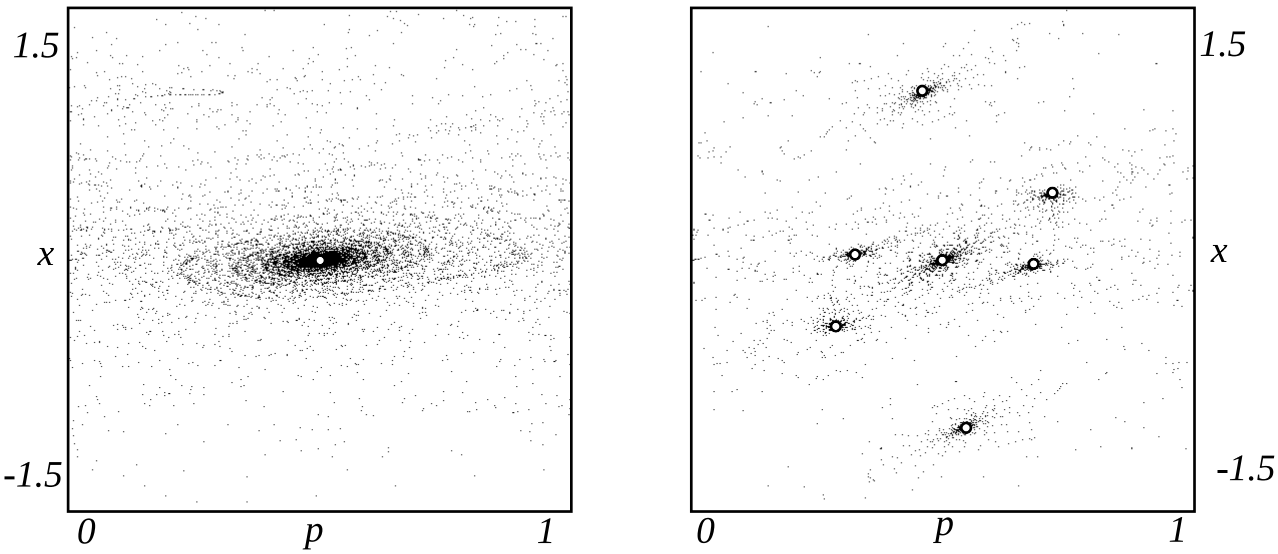
Теперь рассмотрим устройство его фазовой плоскости в консервативном и диссипативном случае. Фазовые портреты в разных случаях сильно отличаются. При параметре диссипации $B=1$ система консервативная и выполняется закон сохранения энергии, фазовый объем сохраняется. Фазовые портреты при разных значениях амплитуды внешнего воздействия K в консервативном случае приведены на рисунке 1.



а) б)

Рисунок 1. Фазовый портрет отображения (1) в консервативном случае ($B=1$). Значение параметра K: а) 0.1, б) 0.4.

В консервативном случае наблюдаются эллиптические неподвижные точки, окруженные замкнутыми траекториями. При амплитуде K=0.1 (Рисунок 1. а.) заметно образование стохастического слоя около сепаратрис седловых (гиперболических) точек. В интервале амплитуды между K=0.1 и K=0.2 происходит резкое увеличение стохастического слоя, который начинает переходить в так называемое «стохастическое море» [5]. При увеличении амплитуды заметно, что площадь, занятая «стохастическим морем», увеличивается.



а) б)

Рисунок 2. Фазовый портрет отображения (1) в диссипативном случае (*B=0.9*). Значение параметра *K*: а) 0.1, б) 0.4. Белыми точками отмечены аттракторы.

С введением в систему диссипации, эллиптические неподвижные точки переходят в устойчивые (фокусы), колебания затухают, эволюция системы во времени завершается выходом на периодические аттракторы.

Бифуркационное дерево при различных параметрах диссипации

Для наблюдения зависимости аттракторов стандартного отображения с малым коэффициентом диссипации от параметра необходимо построить бифуркационные деревья. Бифуркационное дерево представляет собой зависимость возможных дискретных значений динамической переменной на аттракторе от параметра [7].

Возьмем произвольную точку на бифуркационном дереве (отмечена кругом на рисунке 3.) в области существования цикла периода 2 и пронаблюдаем изменение фазового портрета при разных параметрах диссипации.

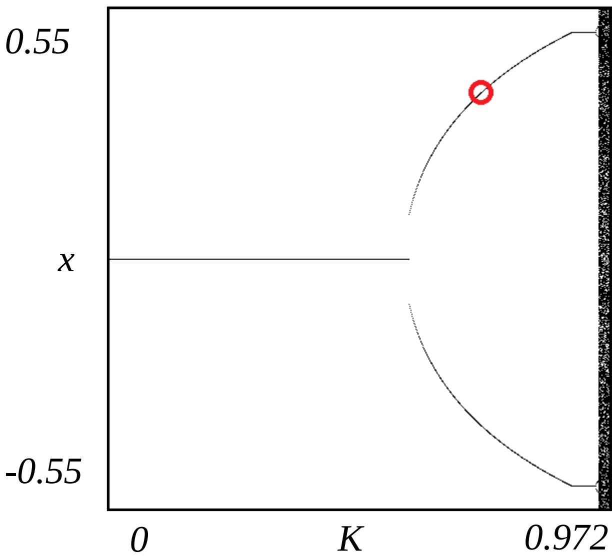
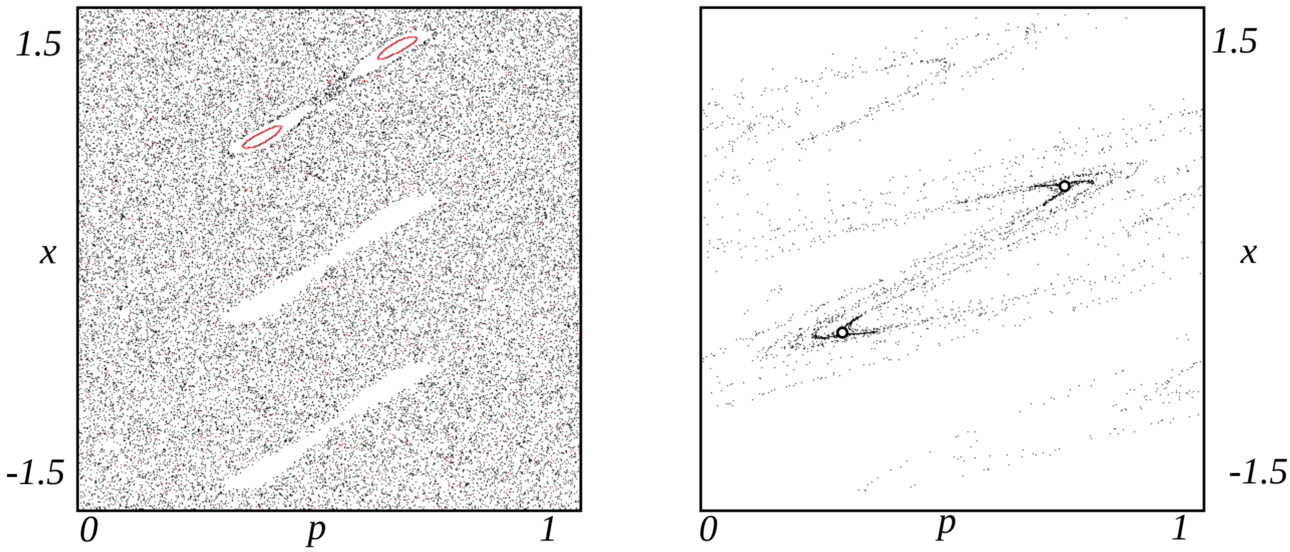


Рисунок 3. Бифуркационное дерево. *B=0.9*, *K=0.725* (координаты точки отмеченной на рисунке).



а) б)

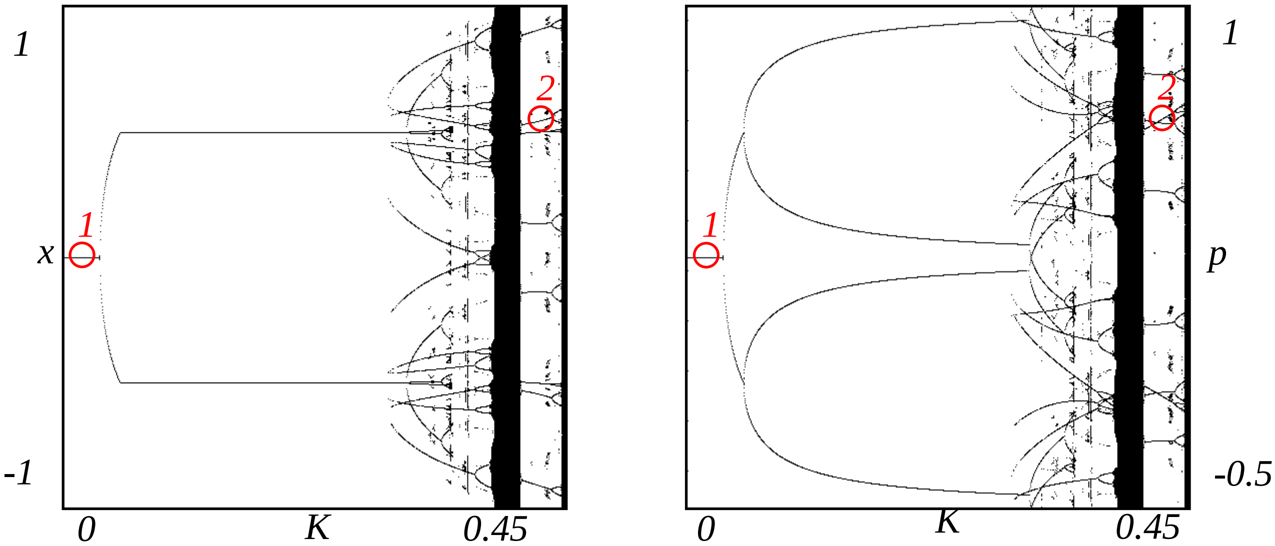
Рисунок 4. Фазовые портреты в консервативном и диссипативном случае. Значение параметра *B*: а) 1, б) 0.6. Белыми точками отмечены аттракторы.

В консервативном случае на фазовом потрете наблюдается две замкнутых траектории периода 2 (Рисунок 4. а). В диссипативном - видно, что существует устойчивый режим периода 2, а траектории сходятся к аттрактору быстрее при увеличении диссипации (Рисунок 4. б.).

Бифуркационное дерево с отрицательным значением параметра диссипации

Теперь рассмотрим случай с отрицательными значениями параметра диссипации *B*. Якобиан отображения равен *B*, поэтому если его модуль равен 1, то фазовый объем сохраняется, а если меньше, то фазовый объем уменьшается. При этом также будут наблюдаться аттракторы. Такую диссипацию мы будем называть «отрицательной» из-за отрицательного значения параметра *B.*

Далее построим фазовые портреты и найдем на них аттракторы. Для нахождения координат аттракторов необходимо построить дополнительное дерево с параметром *p* по оси ординат, так как на фазовой плоскости может существовать большое количество аттракторов и для точного определения необходимо знать обе координаты. В точке 1 – параметр *K=0.015,* в точке 2 - *K=0.42* (Рисунок 5. а, б.).



а) б)

Рисунок 5. Бифуркационные деревья с начальными условиями и «отрицательной» диссипацией. *B=-0.9.*

Теперь построим фазовые портреты с «отрицательной» диссипацией в консервативном случае при *B= –1,* и в диссипативном случае при *B= –0.9.* Определим положение аттракторов в диссипативном случае.

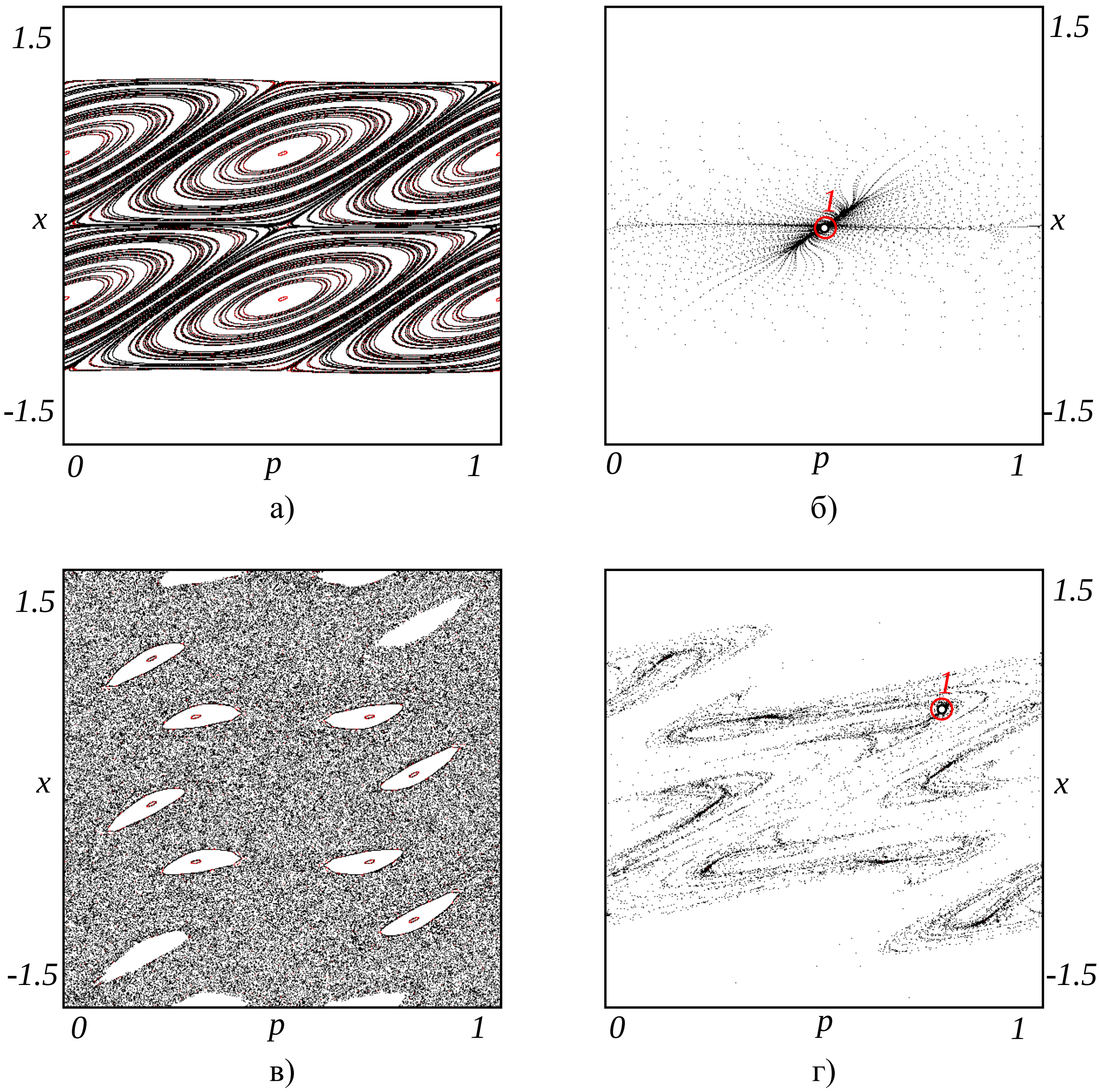


Рисунок 6. Фазовые портреты в консервативном и диссипативном случае. Значение параметра *B*: 1(а, в), 0.9 (б, г). Значение параметра *K*: *0.015* (а, б), 0.42 (в, г). Белыми точками отмечены аттракторы.

С увеличением параметра *K* в случае с отрицательной диссипацией переход к хаотическому морю происходит намного быстрее, чем в случае с положительной диссипацией. Для изучения зависимости границ хаоса от параметра в диссипативной системе, построим карту динамических режимов.

Карта динамических режимов

Карта динамических режимов – плоскость параметров, которая раскрашена разными цветами [7]. В нашем случае - это области в которых существуют циклы разных периодов. Черным отмечена область непериодического поведения. Далее необходимо исследовать плоскость параметров в положительной и отрицательной областях диссипации, а также рассмотреть точки бифуркаций и перехода к хаосу, построить фазовые портреты в разных точках плоскости параметров.

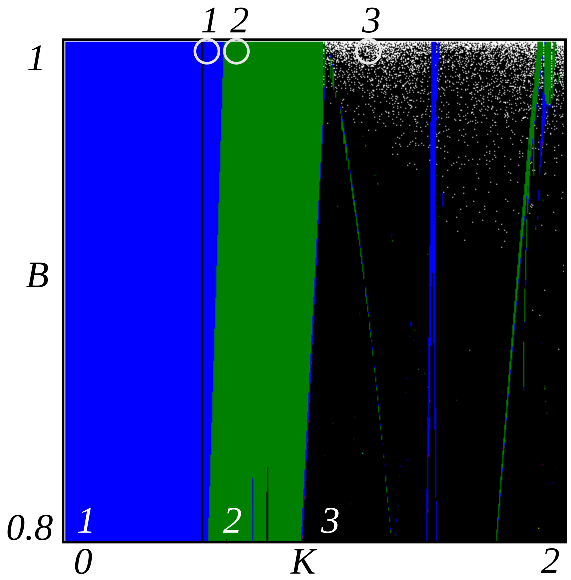


Рисунок 7. Карта динамических режимов, в области положительной диссипации. Числами на карте обозначены периоды: 1 – режим периода 1, 2 – режим периода 2, 3 – непериодический режим.

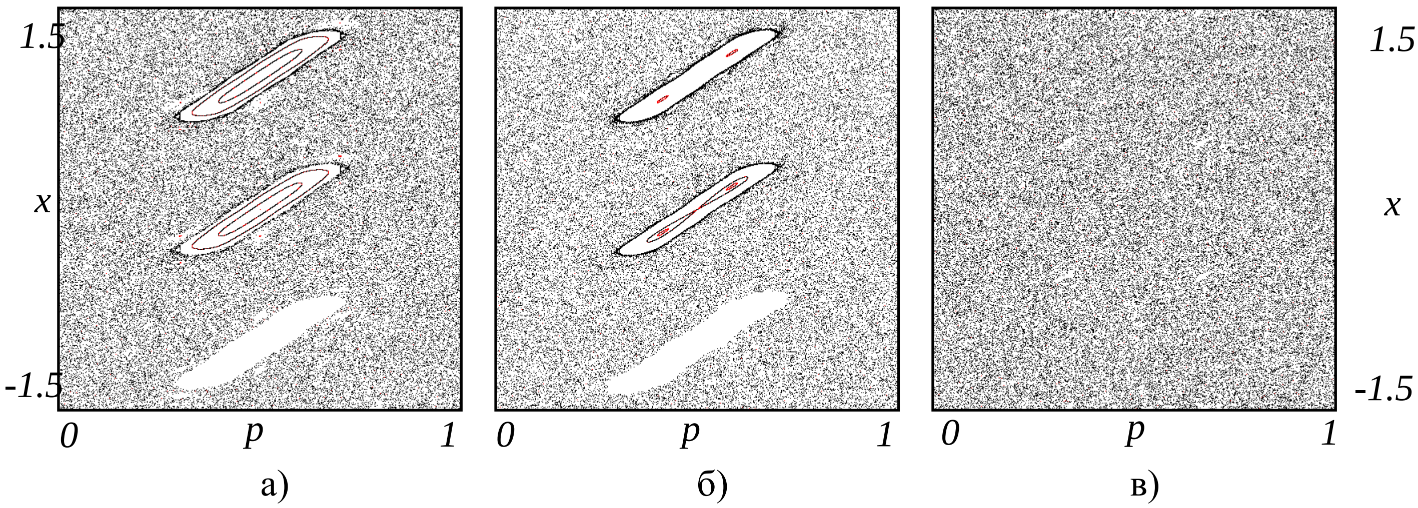


Рисунок 8. Фазовые портреты в консервативном случае. Значение параметра K: а) 0.63, б) 0.67, в) 1.024.

В точке 1 на фазовом портрете наблюдается устойчивый островок периода 1 (Рисунок 8.а.). После перехода через линии удвоения в область периода 2 (Рисунок 8.б.), островок удваивается и сохраняется на всей области существования периода 2. Чем ближе к краю границы перехода находится островок, тем меньше он становится и в конце концов исчезает (Рисунок 8.д.), а все фазовое пространство занимает хаотическое море.

Теперь построим карту динамических режимов для случая с отрицательной диссипацией.

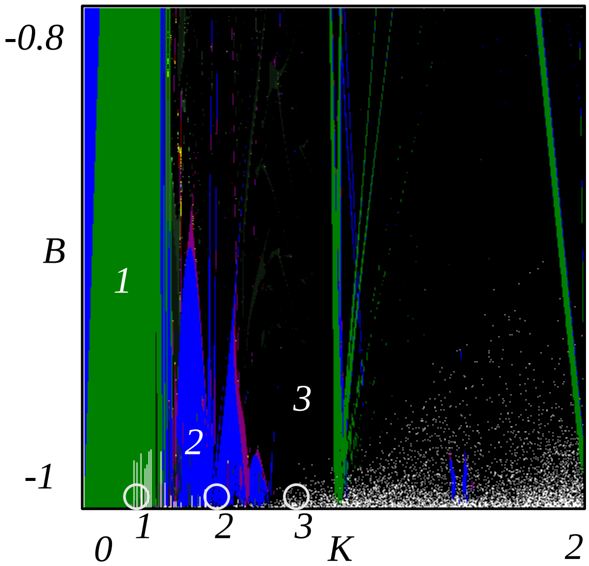


Рисунок 9. Карта динамических режимов, в области отрицательной диссипации. На карте: 1 – период режима 1, 2 – период режима 4, 3 – непериодический режим.

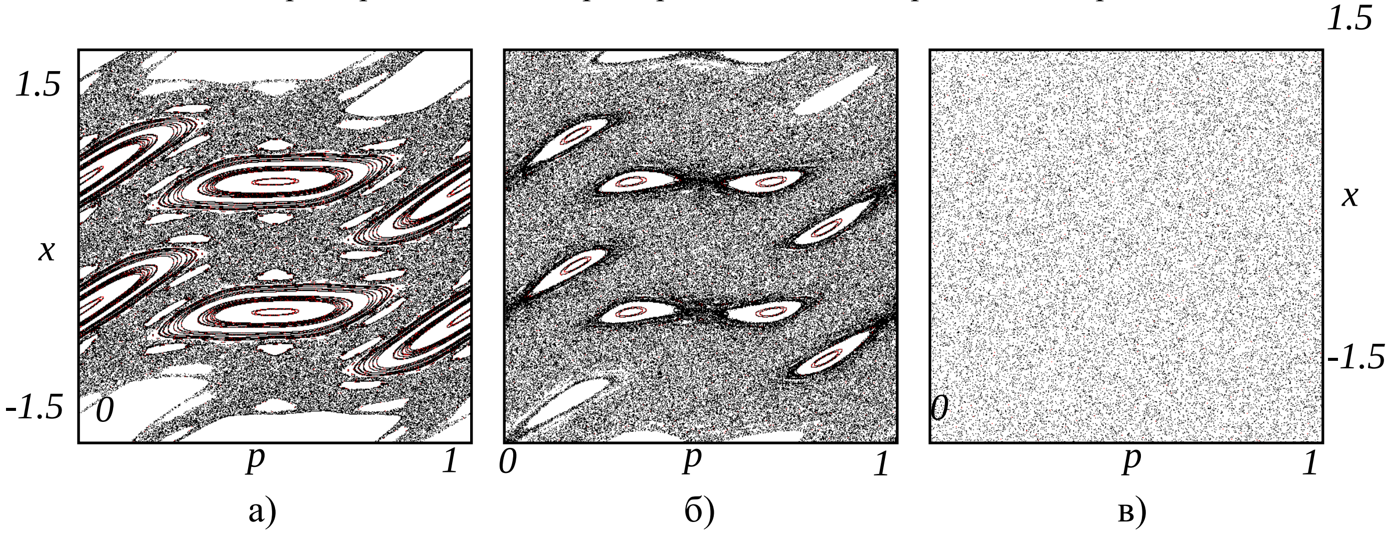


Рисунок 10. Фазовые портреты в консервативном случае. Значение параметра Значение параметра *K*: а) 0.12, б) 0.29, в) 0.4, г) 0.7.

На карте динамических режимов, в диссипативном случае, удваивается устойчивый цикл, а в консервативном случае удваивается островок. Далее при движении по области периода 2 в сторону увеличения параметра K, островок уменьшается и в конце концов исчезает, а в диссипативном случае в этот момент происходит кризис аттракторов и аттрактор становится хаотическим.

Заключение

В ходе дипломной работы были построены и исследованы бифуркационные деревья, фазовые портреты, карты динамических режимов в консервативном случае и в случае отрицательных и положительных значений параметра диссипации.

При изменении управляющих параметров в диссипативной системе происходят последовательные бифуркации удвоения периода. В консервативной системе этому соответствует удвоение неподвижных точек эллиптического типа и соответствующих им островков устойчивости. Были построены фазовые портреты, соответствующие различным режимам поведения системы, как для диссипативной системы, так и для консервативной. При дальнейшем увеличении параметра происходит кризис аттрактора и переход к хаосу.

Было обнаружено, что в системе с отрицательными значениями параметра диссипации динамика отличается. Кризис аттракторов наступает намного быстрее, чем в системе с положительной диссипацией. Это хорошо заметно на карте динамических режимов. При параметре $K=0.95$, в системе с положительной диссипацией, на карте динамических режимов наблюдался режим периода 2, а на фазовом портрете находились островки устойчивости. В отрицательной диссипации при том же параметре $K=0.95$, на карте динамических режимов уже находится область хаотического поведения, а на фазовом портрете отсутствовали устойчивые точки.

Список литературы

1. Кузнецов, С. П. Динамический хаос / С. П. Кузнецов, М.: Физматлит, 2006

2. Feudel, U. Map with more than 100 coexisting low-period periodic attractors. / U. Feudel, C. Grebogi, B. R. Hunt, J. A. Yorke // Physical Review E – 1996 – V. 54 – P. 71–81.

3. Feudel, U. Complex dynamics in multistable systems. */ U. Feudel* // International Journal of Bifurcation and Chaos – 2008 – V. 18 – № 6 – P. 1607–1626.

4. Kuznetsov, A. P. On some properties of nearly conservative dynamics of Ikeda map and its relation with the conservative case. / A. P. Kuznetsov, A. V. Savin, D. V. Savin // Physica A – 2008 – V. 387 – № 7 – P. 1464–1474.

5. Заславский, Г.М. Стохастичность динамических систем. / Г.М. Заславский - Москва «Наука» главная редакция физико-математической литературы 1984, 268 с.

6. Кузнецов, А.П. Нелинейные колебания. / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин - М.:Физматлит, 2002. - 292 с.

7. Кузнецов, А.П. Введение в физику нелинейных отображений / А.П. Кузнецов, А.В. Савин, Л.В. Тюрюкина - Саратов: изд-во «Научная книга», 2010, 134 с.