

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиоп физики и нелинейной динамики

**Мультифрактальный анализ нестационарных процессов**

**АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ**

студента 2 курса 241 группы  
направления 03.04.03 «Радиоп физика»  
физического факультета  
Аринушкина Павла Алексеевича

Научный руководитель  
профессор, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ А.Н. Павлов

Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ В.С. Анищенко

Саратов 2017 год

## ВВЕДЕНИЕ

В течение последних лет концепции фракталов и мультифракталов широко применяются в анализе биомедицинских сигналов и приложений, таких как распознавание изображений, структурный анализ и сегментация. Применение фрактальной и мультифрактальной геометрии в значительной степени зависит от возможности корректного вычисления характеристик сложного скейлинга. Существуют различные методы для оценки фрактальной размерности и мультифрактального спектра сигнала.

Идея описания природных явлений путем изучения статистических закономерностей скейлинга не является новой, многие исследования проводились на эту тему и ранее [1-4]. Однако, в последнее время наблюдается всплеск интереса к этому подходу. Большое количество физических систем представляют подобную форму поведения на различных масштабах наблюдения. Главной достопримечательностью фрактального подхода является его способность описывать нерегулярные или фрагментированные формы природных объектов, а также других сложных объектов, которые в рамках традиционной евклидовой геометрии не поддаются анализу. Это явление часто выражается в пространственных и временных статистических закономерностях скейлинга, и данное степенное поведение характерно для реальных физических систем. Эта концепция имеет простую геометрическую интерпретацию и часто встречается в различных областях, таких как геофизика, биология или механика жидкостей и газов. В связи с этим Мандельброт ввел понятие фрактальных множеств [5], которое позволяет учитывать степень регулярности упорядоченной структуры, связанной с поведением физической системы. Фрактальный подход широко используется в задачах анализа изображений, изучении турбулентных потоков и особенно в биомедицине.

**Целью выпускной квалификационной работы** является сравнительный анализ различных методов мультифрактального анализа и их применение для анализа зашумленных сигналов различной природы.

**Материалы исследования.** Исследования проводились на основе цифровой обработки временных реализаций модельных динамических систем и экспериментальных записей биомедицинских сигналов. Мультифрактальный анализ выполнялся с применением метода максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП) и метода мультифрактального анализа флуктуаций относительно тренда (МФАФТ).

Выпускная квалификационная работа содержит введение, три главы (1 Предварительные теоретические сведения; 2 Численные методы вычисления фрактальных размерностей; 3 Численный анализ экспериментальных данных и оценка мультифрактальных методов), заключение и список использованных источников. Общий объем работы 60 стр.

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

**Краткие теоретические сведения.** Для описания методов мультифрактального анализа рассмотрим базовые понятия, такие как фрактал, фрактальная размерность и мультифрактал. Фрактал можно определить, как некий объект, обладающий самоподобием при изменении масштаба. Нужно взять элемент этого объекта и окружить его сферой заданного радиуса  $R$  и посчитать количество элементов объекта  $\Sigma$  внутри сферы. Мера  $\Sigma$  может быть произвольной, здесь важна только зависимость  $\Sigma$  от радиуса сферы. Это определение учитывает тот факт, что соответствующая размерность объекта зависит от пространственного масштаба. Основной характеристикой фрактального объекта является то, что его метрические свойства, например, длина или площадь, являются функцией показателя масштаба. Классическим примером, демонстрирующим данное свойство, является длина береговой линии [6]. При заданном пространственном масштабе  $d$ , общая длина береговой линии кривой  $L(d)$  определяется как набор из  $N$  прямолинейных отрезков длины  $d$ . Данное следствие ведет к тому, что мелкие детали на побережье не проявляются при более малом масштабе и становятся очевидными при более высоких значениях. По этой причине измеренная длина

$L(d)$  повышается при увеличении масштаба  $d$ . Таким образом, во фрактальной геометрии евклидово понятие «длины» является процессом, и этот процесс контролируется постоянным параметром. Более формально, Мандельброт [7] определил фрактал как набор, для которого размерность Хаусдорфа  $D_h$  больше, чем его топологическая размерность  $D_T$ .

Размерность Хаусдорфа-Безиковича  $D_h$  определяется как логарифмическое отношение между количеством внутренних подобий объекта  $N$  и обратной величиной коэффициента данного подобия  $r$ :

$$D_h = \frac{\ln(N)}{\ln\left(\frac{1}{r}\right)} \quad (1)$$

Мультифракталы можно рассматривать как расширение понятия фрактала. Мультифрактальный объект не так прост в описании и анализе, например, для количественного описания простого фрактала достаточно знать величину фрактальной размерности или параметра, описывающего неизменность статистических характеристик при изменении параметра масштаба. В этом плане мультифракталы являются более сложными объектами, для полного описания которых требуется не одна, а целый спектр фрактальных размерностей. Наличие спектра мультифрактальных размерностей означает, что исследуемый объект включает в себя подмножества, для каждого из которых наблюдаются свои свойства самоподобия.

Применение фрактальной концепции для анализа сложных сигналов позволяет провести оценку фрактальной размерности. Известно много методов ее вычисления, каждый из которых базируется на своей теоретической основе. Этот факт часто приводит к получению различных фрактальных размерностей разными методами для одного исследуемого объекта. Различия возникают потому, что размерность Хаусдорфа-Безиковича (1) не может быть вычислена непосредственно по определению в большинстве случаев. Таким образом, применяются приближенные методы, которые используют различные алгоритмы для оценки параметра  $N$ .

Хотя прикладные алгоритмы отличаются, они подчиняются одним и тем же правилам:

1. Измерение объема объекта, используя различную длину шага.
2. Построение графика в логарифмическом масштабе измеряемых величин от длины шага и аппроксимация по методу наименьших квадратов линии регрессии.
3. Оценка фрактальной размерности как наклона линии регрессии.

Для оценки фрактальной размерности существует много способов аппроксимации мультифрактального спектра. В данной работе будут описаны два самых популярных метода оценки мультифрактального спектра, которые зарекомендовали себя при решении различных прикладных задач:

1. Метод максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП).
2. Метод анализа флуктуаций относительно тренда (АФТ, или, в английском варианте – DFA от «detrended fluctuation analysis»).

**Результаты проведенных исследований.** В качестве образца была рассмотрена динамическая модель Ресслера, представленная в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + \alpha y \\ \dot{z} = \beta + z(x - \gamma) \end{cases} \quad (1)$$

Модель анализировалась в режиме развитого детерминированного хаоса. Параметры модели были подобраны следующие:  $\alpha = 0.42, \beta = 2, \gamma = 4$ . Для исследования особенностей мультифрактального спектра в каждое уравнение системы добавлялся аддитивный белый гауссовский шум с интенсивностью  $D$ , которая варьировалась в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^{-1}$ :

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z + \sqrt{2Dh}\xi(t) \\ \dot{y} = x + \alpha y + \sqrt{2Dh}\xi(t) \\ \dot{z} = \beta + z(x - \gamma) + \sqrt{2Dh}\xi(t) \end{cases} \quad (2)$$

В системе (2)  $h$  шаг интегрирования,  $\xi(t)$  независимый источник шума. Интенсивность шума  $D$  лежит в пределах от  $10^{-6}$  до  $10^{-1}$ . На рисунке 1 приведены результаты расчетов, выполненных при интенсивности шума  $D = 10^{-6}$ ,  $D = 10^{-4}$ ,  $D = 10^{-2}$ .

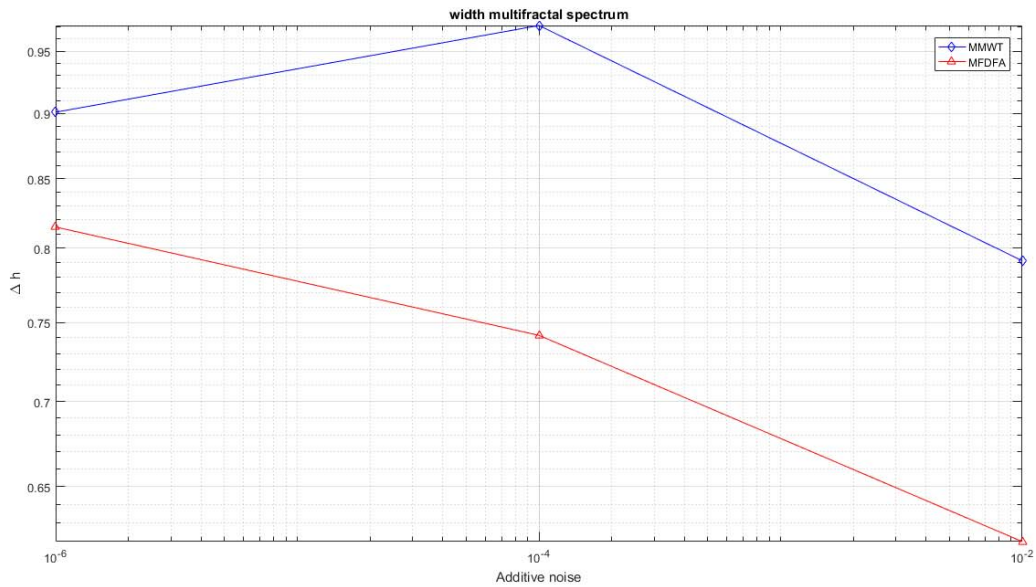


Рисунок 1. Ширина мультифрактального спектра от интенсивности шума  $D$ .

Хорошо видны различия между двумя исследуемыми методами, в отличие от МФАФТ метода ММВП метод показывает, что сигнал является более мультифрактальным при значении интенсивности  $D = 10^{-4}$ . В целом, как показано на рисунке 1, увеличение интенсивности шума ведет к потере мультифрактальности исследуемого сигнала.

Далее была проанализирована динамическая система Ресслера при добавлении в систему исключительно мультипликативного шума. Мультипликативная помеха была включена в параметр  $\alpha$ . Исходное уравнение примет следующий вид:

$$\begin{cases} \dot{x} = -y - z \\ \dot{y} = x + \alpha y(1 + \sqrt{2Dh}\xi(t)) \\ \dot{z} = \beta + z(x - \gamma) \end{cases} \quad (3)$$

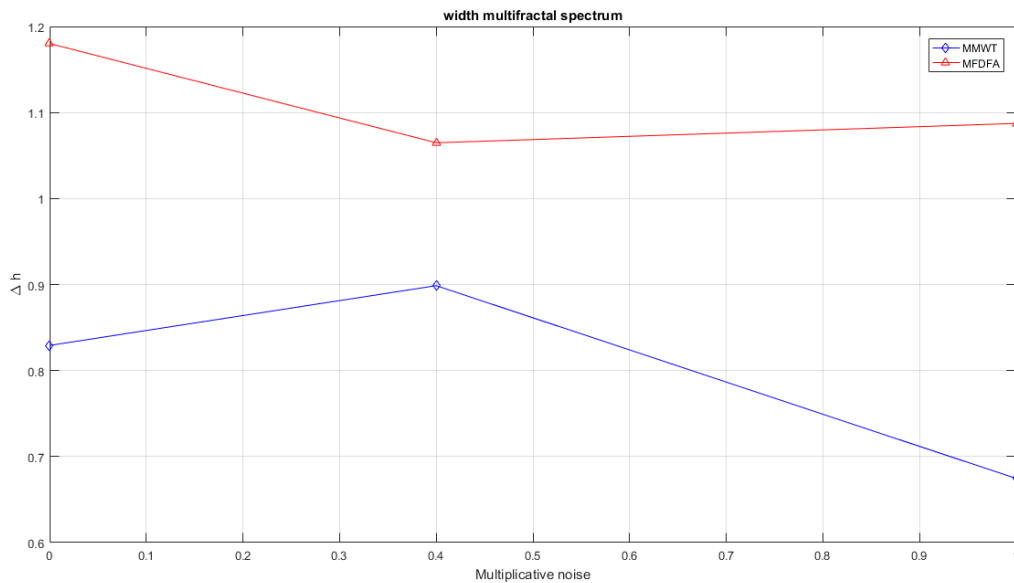


Рисунок 2. Ширина мультифрактального спектра от интенсивности шума  $D$ .

На рисунке 2 показана ширина спектра сингулярностей мультифрактального сигнала. ММВП метод показал аналогичный результат поведения ширины мультифрактального спектра, как и в предыдущем случае с аддитивным шумом. МФАФТ оказался менее точным в данном случае, это связано со слабой чувствительностью данного метода к построению мультифрактального спектра в области отрицательных значений статистических моментов  $q$ , которые отвечают за слабые флуктуации (слабые сингулярности).

Был проведен сравнительный анализ мультифрактальных методов на примере бистабильной модели Фитц Хью Нагумо. Для наглядной демонстрации мультифрактального анализа рассмотрено явление когерентного резонанса в исследуемой модели, при этом в каждое уравнение системы добавлялся аддитивный белый гауссовский шум. Запишем уравнение исходной модели в следующем виде:

$$\begin{cases} \dot{x} = (x - x^3/3 - y)/\epsilon + \sqrt{2Dh}\xi(t) \\ \dot{y} = \gamma x - y - \beta + \sqrt{2Dh}\xi(t) \end{cases} \quad (4)$$

где  $D$  интенсивность шума,  $h$  шаг интегрирования,  $\xi(t)$  независимый источник шума. Параметры модели Фитц Хью Нагумо были выбраны следующие:  $\beta = 0.0001$ ,  $\gamma = 0.7$ ,  $\epsilon = 0.35$ . Меняя интенсивность шума  $D$  в пределах от  $10^{-4}$  до  $10^{-1}$ , исследовалось явление когерентного резонанса путем построения ширины мультифрактального спектра исследуемого сигнала.

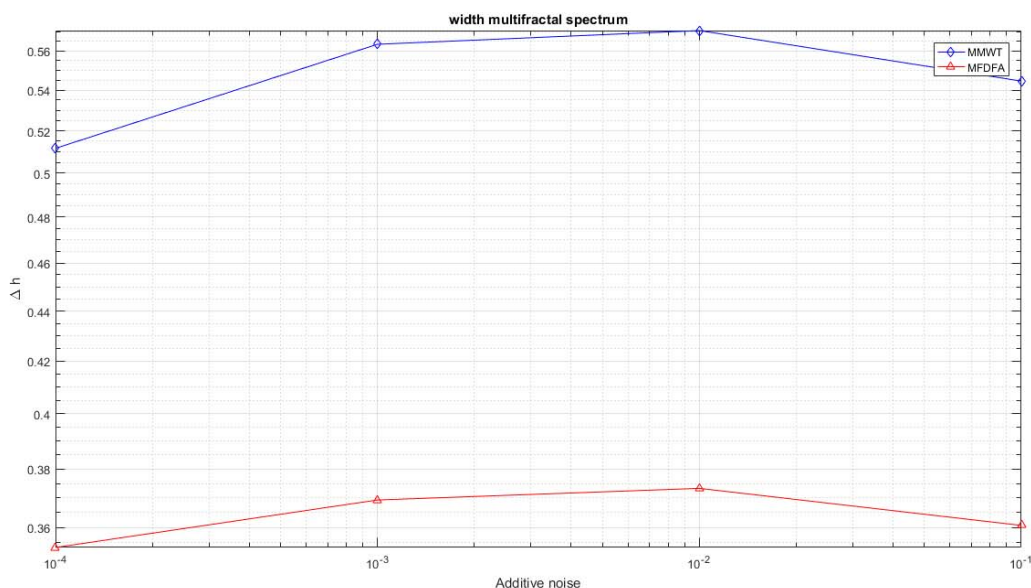


Рисунок 3. Ширина мультифрактального спектра от интенсивности шума  $D$

Присутствие в модели когерентного резонанса демонстрирует ширина мультифрактального спектра, представленная на рисунке 3. Рассматривая на графике кривую, полученную ММВП методом, мы видим, как ширина мультифрактального спектра скачкообразно становится больше при интенсивности шума  $D = 10^{-3}$  и становится немного шире при значении  $D = 10^{-2}$ . Далее при интенсивности шума  $D = 10^{-1}$  ширина мультифрактального спектра убывает. Аналогичный результат был получен методом МФАФТ, который также представлен на рисунке 3. Таким образом, с помощью мультифрактальных методов удалось выявить в исследуемой модели Фитц Хью Нагумо явление когерентного резонанса. Также данные методы могут послужить для определения оптимальной интенсивности шума в системе посредством рассмотрения зависимости ширины мультифрактального спектра от интенсивности шума.



Далее была рассмотрена применимость мультифрактальных методов к анализу физиологических сигналов. В данном случае это сигнал RR-интервалов сердечного ритма. Для нормальной динамики сердечного ритма человека характерны последовательности RR-интервалов, демонстрирующие мультифрактальное поведение. Уменьшение нелинейности скейлиновых экспонент может применяться для диагностики сердечно-сосудистых заболеваний. В качестве примера рассмотрим образцы RR-интервалов здорового человека и человека с сердечно-сосудистой патологией.

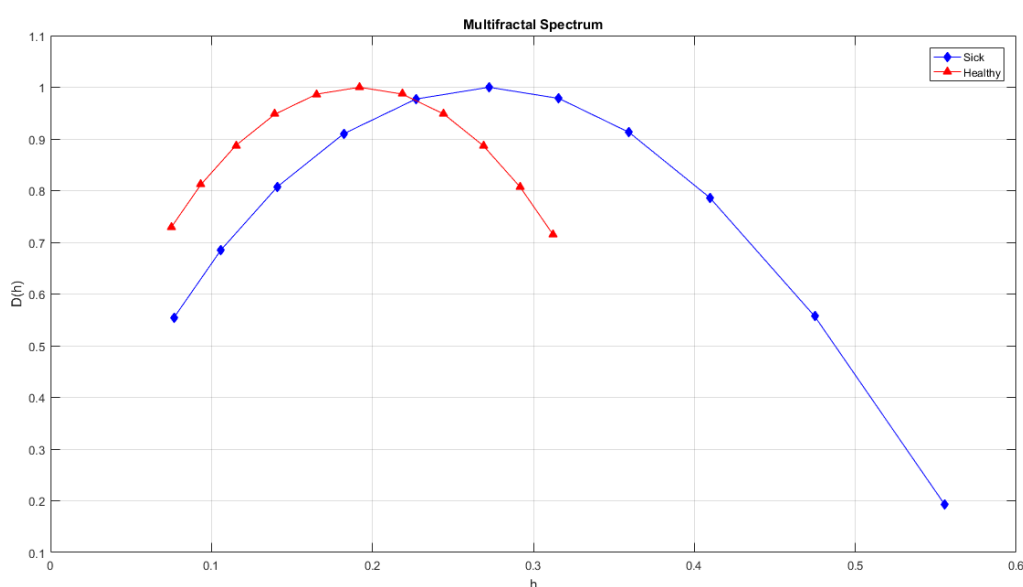


Рисунок 4. Мультифрактальный спектр численного метода ММВП для двух образцов RR-интервалов.

Как видно из представленных рисунков 4 и 5, методы ММВТ и МФАФТ справились с поставленной задачей. На рисунке 4 показан мультифрактальный спектр ММВП метода, в этом случае последовательности RR-интервалов характеризуются различными значениями гильдеровских экспонент и ширины сингулярного спектра. Для образца человека с патологией они составляют  $h_0 = 0.28$  и  $\Delta h = 0.48$ , соответственно.

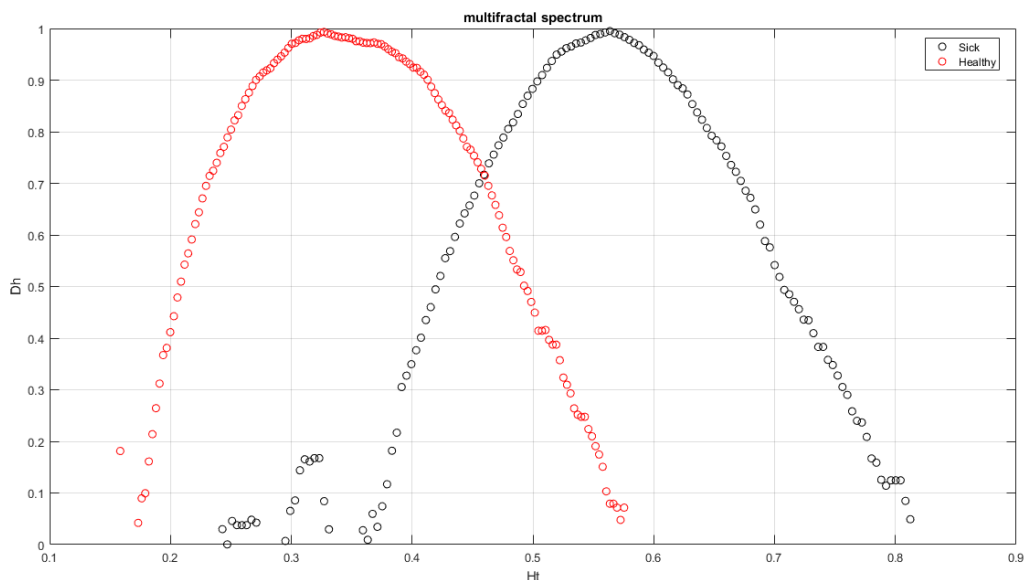


Рисунок 5. Мультифрактальный спектр численного метода МФАФТ для двух образцов RR-интервалов.

Для последовательности RR-интервалов здорового человека гельдеровская экспонента  $h_0 = 0.19$ , а ширина спектра  $\Delta h = 0.24$ . Результаты расчета методом МФАФТ представлены на рисунке 5. Были получены аналогичные результаты расчета сингулярных спектров: гельдеровская экспонента и ширина спектра составили  $h_0 = 0.32$  и  $\Delta h = 0.51$  (норма),  $h_0 = 0.58$  и  $\Delta h = 0.66$  (патология), соответственно. Исходя из полученных результатов, можно сделать вывод о том, что мультифрактальный спектр будет становиться шире при нарушении нормального функционирования сердечно-сосудистой системы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Нестационарные и неоднородные процессы являются сложными для анализа. Спектр мощности и автокорреляционный анализ не всегда являются подходящим инструментом в исследовании сложных процессов. Нестационарность может быть связана, в том числе, с присутствием мультипликативной помехи. Для решения проблемы анализа сигнала сложной структуры может быть применен мультифрактальный формализм. Его

применение для анализа сложных сигналов позволяет ввести в рассмотрение такие характеристики как фрактальные размерности и спектр сингулярностей. Имеется множество методов оценки спектра сингулярностей, в данной работе были рассмотрены два метода: максимумов модулей вейвлет-преобразования и мультифрактального анализа флуктуаций относительно тренда. Первый метод базируется на непрерывном вейвлет-преобразовании и зависит от выбора базиса. Второй метод основывается на устранении основного тренда сигнала и вычислении характеристик сложного скейлинга с помощью метода наименьших квадратов. Для сравнения представленных методов были использованы образцы временных реализаций динамической системы Ресслера в режиме развитого хаоса. Анализ проводился с воздействием на систему как белого гауссовского шума, так и мультипликативной помехи. Было показано, что при малой интенсивности шума в системе мультифрактальный спектр имеет наибольшую ширину, а при увеличении интенсивности шума сигнал становится монофрактальным из-за превалирующего в системе шума. Была также рассмотрена модель Фитц Хью Нагумо. С помощью мультифрактальных методов было охарактеризовано явление когерентного резонанса в системе, таким образом, анализируя этот эффект данными методами можно оптимально подобрать значения интенсивности шума, основываясь на ширине мультифрактального спектра сигнала.

Мультифрактальный анализ зарекомендовал себя незаменимым инструментом исследования структуры биомедицинских сигналов. Он используется в обработке биомедицинских сигналов посредством выявления мультифрактальных структур в ЭКГ, ЭЭГ и МРТ. В качестве примера были рассмотрены образцы последовательностей RR-интервалов сердечного ритма для случая нормы и патологии. Спектральный и автокорреляционный анализ не смогли выявить различия в рассмотренных последовательностях RR-интервалов. Для разделения и анализа были применены методы ММВП и МФАФТ. Данные методы выполнили поставленную задачу, также было

выявлено, что последовательности RR-интервалов, отражающие нарушение работы сердечного ритма, имели более широкий мультифрактальный спектр. Таким образом, мультифрактальные методы являются незаменимым инструментом в работе с нестационарными сигналами.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

- [1] Bachelier, L. Théorie de la speculation // Annales scientifiques de l'École Normale Supérieure. – 1900. – Vol. 17 (3). – P. 21–86.
- [2] Frish, U. Turbulence: the Legacy of A.N Kolmogorov // Cambridge University Press (Eds), Cambridge (UK). – 1995. – P. 296.
- [3] Kolmogorov, A. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large reynolds number // Comptes Rendus de l'Académie des sciences. – 1941. – Vol. 30. – P. 9–13.
- [4] Mandelbrot, B. The variation of certain speculative prices // J. of Business. – 1963. – Vol. 36. – P. 394–419.
- [5] Mandelbrot, B. Fractals: Form // Chance and Dimension, Freeman (Eds). – 1977. – P. 365.
- [6] Mandelbrot, B. How long is the coast of Britain? Statistical self-similarity and fractional dimension // Science. – 1967. – Vol. 156. – P. 636–638.
- [7] Mandelbrot, B. The Fractal Geometry of Nature // Freeman (Eds). – 1983. – P. 468.