

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ  
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Исследование различных типов химерных состояний в кольце  
нелокально связанных отображений Эно**  
АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 241 группы  
направления 03.04.03 «Радиофизика»  
физического факультета

**Копеечкиной Анны Викторовны**

Научный руководитель  
доцент, к.ф.-м.н., доцент

\_\_\_\_\_

Стрелкова Г.И.

Зав. кафедрой  
д.ф.-м.н, профессор

\_\_\_\_\_

Анищенко В.С.

# ВВЕДЕНИЕ

Исследование поведения ансамблей осцилляторов является одной из важных задач современной нелинейной динамики. В то время как изолированные нелинейные системы достаточно хорошо изучены, намного меньше известно о динамике связанных систем, где одну из ключевых ролей играет тип взаимодействия. Интенсивно исследовались такие топологии сетей, как связь «каждый с каждым» в сети из фазовых осцилляторов (моделей Курамото) или хаотических отображений. В таких системах найдено множество различных режимов. Противоположный тип топологии сети – «локальная связь» в сетях из дифференциальных систем или дискретных отображений. Подобные системы на данный момент также хорошо изучены. Они могут демонстрировать разнообразную динамику от рождения солитонов до установления режима пространственно-временного хаоса. Случай сетей с нелокальной связью не так хорошо изучен и в последние годы представляет собой одно из актуальных направлений исследований в нелинейной динамике. Поводом для изучения таких сетей стало открытие так называемых химерных состояний: одновременное сосуществование областей пространственной когерентности и некогерентности в системе. Хотя изначально этот эффект наблюдался в цепочке связанных фазовых осцилляторов, на данный момент химерные состояния найдены в ансамблях, в которых в качестве парциальных элементов выступают дискретные отображения, непрерывные во времени хаотические осцилляторы, осцилляторы ван дер Поля, модели популяционной динамики и автономные булевы сети. Химерные состояния играют важную роль в описании большого числа эффектов в реальных системах, химических реакциях, лазерных решетках и другие. В реальных системах химерные состояния также могут играть существенную роль, например, при изучении особенностей однополушарного сна птиц и дельфинов, при эпилептических припадках, в энергетических сетях или в социальных системах.

Химерные состояния, которые возникают в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов, представляют собой особый тип химерных структур и их формирование тесно связано с переходом от полной хаотической синхронизации к асинхронной динамике (пространственно-временному хаосу) при уменьшении силы связи между элементами ансамбля. В работе был подробно исследован данный переход и описан механизм возникновения

химерных структур в ансамбле нелокально связанных логистических отображений в режиме хаотической динамики. В частности, было показано, что при уменьшении параметра связи (при переходе от когерентности к некогерентности) в кольце сначала возникают так называемые фазовые химеры, появление которых обусловлено переходом ансамбля в режим случайных переключений между синфазными и противофазными колебаниями. При дальнейшем уменьшении силы связи в ансамбле связанных логистических отображений появляется кластер осцилляторов, амплитуды которых сильно хаотичны. Данный тип химерной структуры был назван амплитудной химерой. В данной работе пойдет о исследовании возникновения и эволюции различных типов химерных состояний в кольце нелокально связанных отображений Эно.

# 1 Основное содержание работы

В первом разделе настоящей дипломной работы представлен краткий теоретический обзор математической теории, описывающий различные типы химерных состояний. Приведена формулировка определения химерного состояния. Представлены основные математические выражения, с помощью которых проводится исследование динамики одномерного ансамбля хаотических отображений Эно в условиях нелокальной связи, заданного уравнениями:

$$\begin{aligned}x_i^{t+1} &= 1 - \alpha(x_i^t)^2 + y_i^t + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t, y_j^t) - f(x_i^t, y_i^t)], \\y_i^{t+1} &= \beta x_i^t,\end{aligned}\tag{1}$$

где  $f(x_i^t, y_i^t) = 1 - \alpha(x_i^t)^2 + y_i^t$  – первое уравнение двумерного отображения Эно,  $i, j$  принимают значения  $1, 2, \dots, N$ ,  $N = 1000$  – число элементов ансамбля  $P$  – число соседей  $i$ -го элемента слева и справа,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$  – параметры индивидуальных элементов ансамбля,  $\sigma$  – коэффициент связи,  $r = P/N$  – радиус связи. Динамика ансамбля (1) исследуется при вариации значений параметров  $r$  и  $\sigma$  при фиксированных значениях начальных условий  $x_i^0$  и  $y_i^0$ . Осцилляторы исследуются при определенных значениях параметров  $r$  и  $\sigma$  бифуркационной диаграммы системы (1).

## 2 Экспериментальная часть и обсуждение результатов

### 2.1 Проведение численного анализа перехода "когерентность-некогерентность" в кольце нелокально связанных отображений Эно

В данном разделе мы представляем наши численные результаты для различных значений параметра связи, при его уменьшении. На рисунках показана динамика системы, которая представляет собой мгновенное пространственное распределение амплитуд во всех элементах от координаты  $x$ . Другие участки представляют собой 100 последних итераций для каждого элемен-

та и показывают конкретную динамику в каждом элементе. Мы называем это графическое представление в виде пространственно-временного профиля. Участки представляют собой последние 100 итераций (пространственно-временные профили) для так называемой функции связи  $S$ , которая является третьим членом в первом уравнении для кольца отображений Эно (1).

Для случайных условий построены. 1- Мгновенный профиль (snapshot). 2- Профиль для последних 100 итераций ( $t_{iter} = 10000$ ). 3 - Профиль для последних 100 итераций функции связи  $S$ .

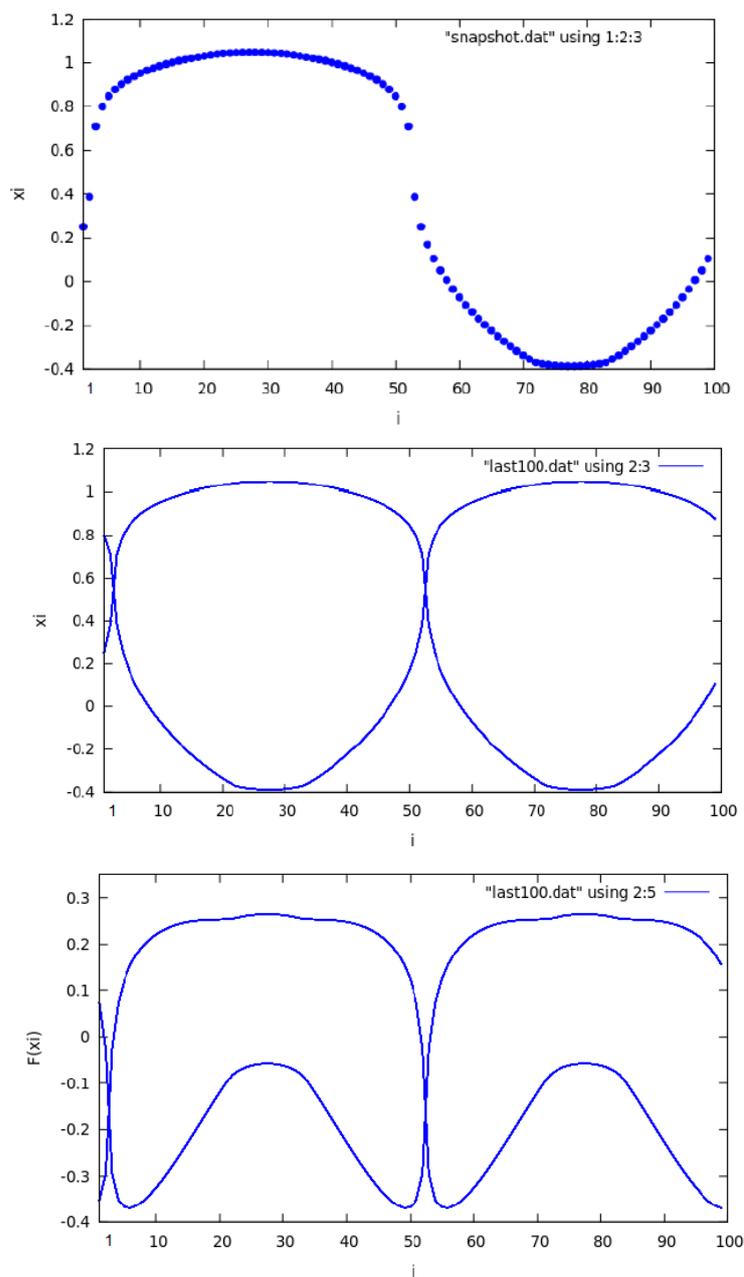


Рисунок 1 – Мгновенный профиль динамики кольца (1), пространственно-временной профиль для элементов (средний график) и для функции связи при  $\sigma = 0.47$

Как видно из представленных результатов, динамика в каждом элементе и функции связи являются регулярными и периодическими функциями и представляют собой 2-цикл. Тем не менее, из результатов видно, что снимок (профиль волны) показывает разрыв в волне вертикальных фронтов. Это первый знак (условие) для появления области некогерентной динамики, то есть образование химеры. Кроме того, химера представлена как состояние, фаза которого резко меняется в соседних осцилляторах. Другими словами, соседние элементы колеблются с фазой случайным образом смещенной на одну итерацию.

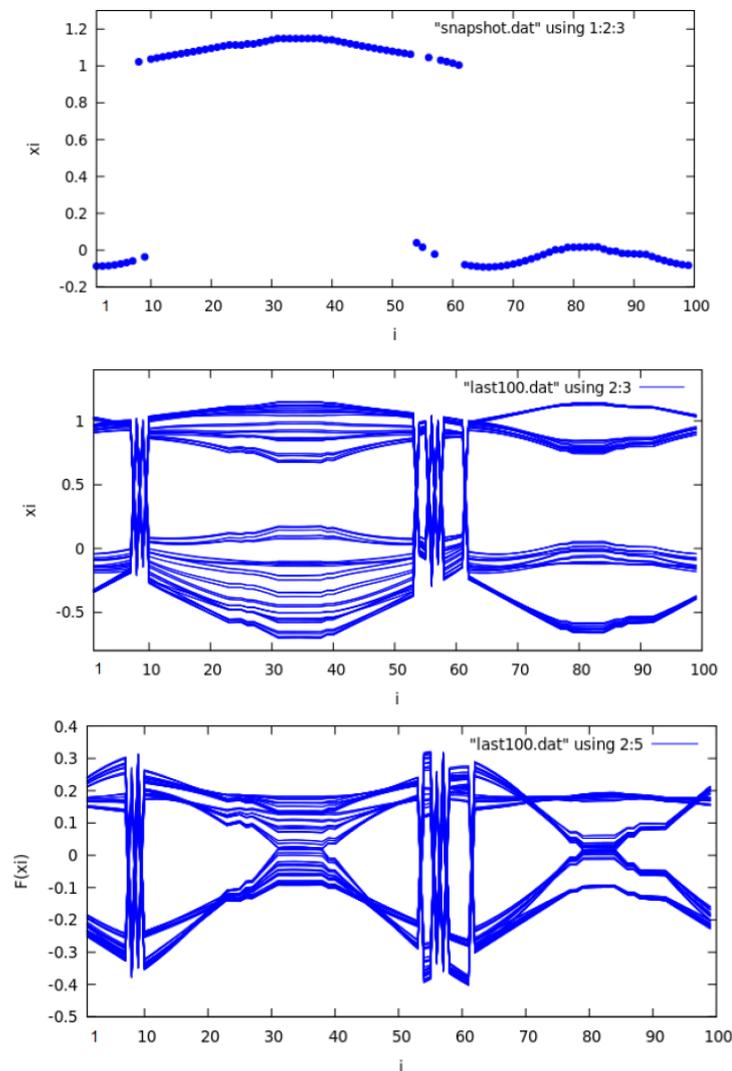


Рисунок 2 – Мгновенный профиль динамики кольца (1), пространственно-временной профиль для элементов (средний график) и для функции связи при  $\sigma = 0.33$

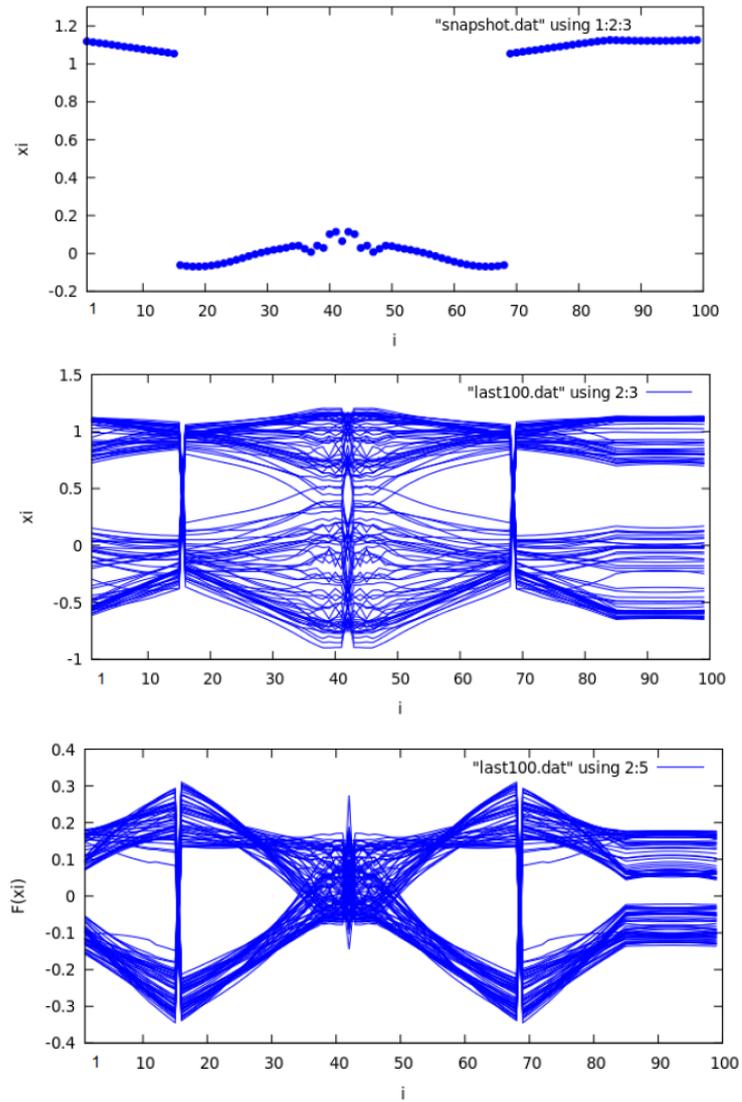


Рисунок 3 – Мгновенный профиль динамики кольца (1), пространственно-временной профиль для элементов (средний график) и для функции связи при  $\sigma = 0.303$

При  $\sigma = 0.33$  определяется состояние фазовой химеры. Пространственно-временные профили для обоих элементов сети и функции связи характеризуют развитое хаотическое поведение. Это второе главное условие для появления химера-подобных состояний. Участки для  $\sigma = 0.303$  иллюстрируют сосуществование двух некогерентных областей или двух химера-подобных состояний, а именно, фазы и амплитуды состояний химер. Кластер генераторов от 38 до 48 показывает повышенную хаотизацию амплитуд колебаний парциальных осцилляторов и, следовательно, это состояние химеры может упоминаться как амплитуда состояния химера. Дальнейшее уменьшение  $\sigma$  приводит к увеличению числа некогерентных интервалов (областей). Наконец, при  $\sigma < 0.28$  происходит рассинхронизация хаотическая динамика развивается дальше и заполняет все кольцо.

Данные результаты показали, что сеть нелокально связанных идентичных отображений Эно может продемонстрировать несколько типов состояний, так называемые, химера-подобные состояния. Это наблюдается, когда параметр связи  $\sigma$  уменьшается. Мы также определили и показали два типа химерных состояний, а именно, фазы и амплитуды состояний химер.

## **2.2 Исследование эффекта перемежаемости между фазовой и амплитудной химерами в кольце нелокально связанных отображений Эно**

Построив мгновенные профили для данных значений параметров  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $r \in [0.14, 0.17]$ ,  $\sigma \in [0.25, 0.34]$ ,  $N = 100$ , мы можем наблюдать явление перемежаемости между фазовой и амплитудной химерами в кольце нелокально связанных отображений Эно (1). Для более наглядной иллюстрации данного эффекта мы выберем один из элементов, принадлежащих амплитудной химере, и пронаблюдаем эволюцию его динамики во времени. Времена наблюдения (время итерирования системы (1)) выбираются достаточно большими, чтобы увидеть эффект переключения между химерными структурами. Мы строим временные реализации  $x_i(t)$  для выбранного осциллятора и представляем на рисунках их отдельные фрагменты.

Зададим параметр силы связи ( $\sigma = 0.25$ ) и проведем расчеты для системы

(1). На рисунке 4 приведен мгновенный профиль динамики всего кольца (1) для значений параметров связи  $r = 0.17, \sigma = 0.25$ . На рисунке хорошо различимы два кластера фазовой химеры и два кластера амплитудной химеры. В качестве примера мы выберем 100-й элемент кольца, который принадлежит первой амплитудной химере и находится практически в ее центре. Затем произведем расчет временной реализации для данного элемента на достаточно больших временах.

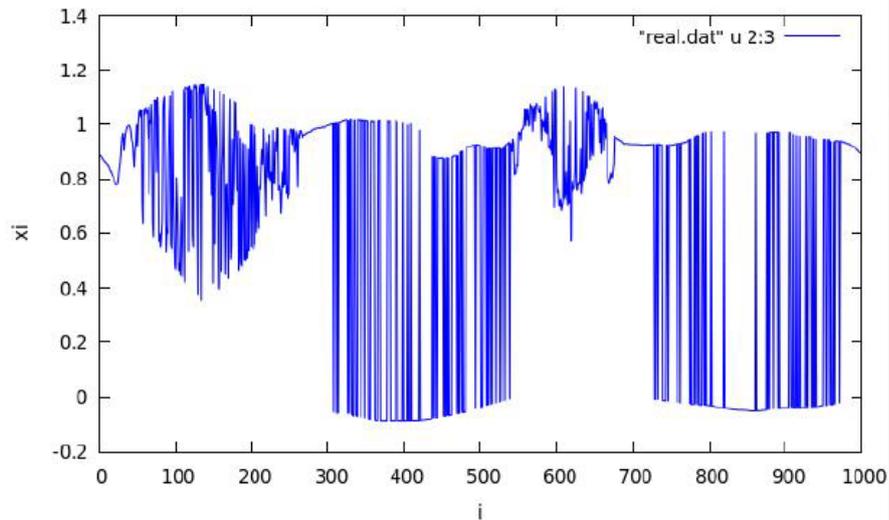


Рисунок 4 – Мгновенный профиль динамики ансамбля (1) для значений параметров  $r = 0.17, \sigma = 0.25$

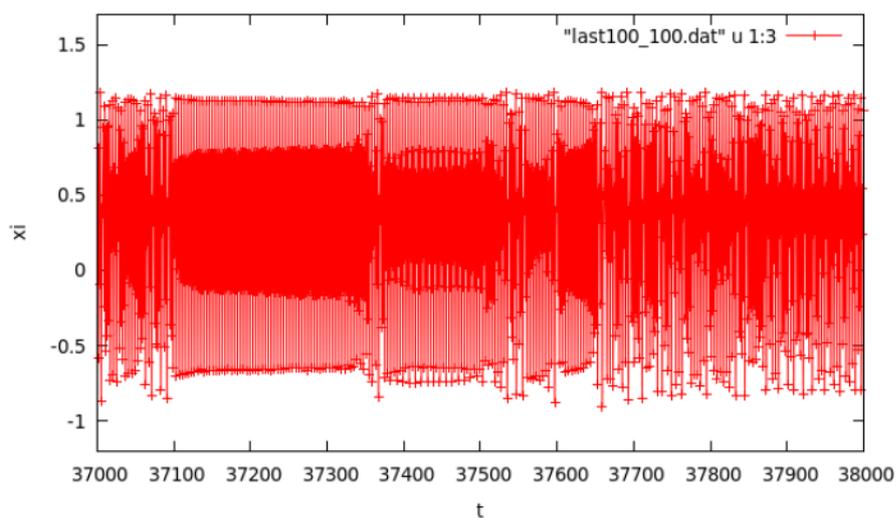


Рисунок 5 – Фрагмент временной реализации на интервале времени (37 000: 38 000) для 100-го элемента, входящего в кластер амплитудной химеры

Тщательный анализ временной реализации для 100-го элемента позволяет уверенно диагностировать и наблюдать эффект переключений или перемежаемости между амплитудной и фазовой химерами. Причем подобные переключения происходят случайно во времени и могут продолжаться достаточно долго. Так на рисунке 5 режим фазовой химеры имеет место на интервале от 37 100 до 37 500 итераций.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе были проведено численное моделирование динамики одномерного ансамбля хаотических отображений Эно (1) с нелокальной связью в виде кольца. Для выбранного значения радиуса связи и при уменьшении коэффициента связи мы наблюдали переход от режима полной синхронизации (когерентности) к режиму пространственно-временного хаоса (некогерентности). Было показано и проиллюстрировано мгновенными профилями и пространственно-временными профилями для динамики всего кольца, что данный переход происходит через возникновение в ансамбле нелокально связанных отображений Эно химерных структур – фазовой и амплитудной химер. Причем сначала появляется кластер фазовой химеры, а при уменьшении силы связи наблюдается появление кластера амплитудной химеры, который сосуществует наряду с фазовой химерой.

В результате проведенных численных исследований было установлено, что колебания элементов химерных кластеров в ансамбле (1) характеризуются нестационарной динамикой. Нестационарность проявляется в случайном во времени чередовании когерентных и некогерентных колебаний, что можно назвать перемежаемостью. Перемежаемость выглядит как процесс случайных переключений между режимами амплитудных и фазовых химер. С уверенностью можно утверждать то, что нестационарный режим перемежаемости характеризуется конечным временем жизни.

Проведенные исследования и полученные результаты могут иметь важное практическое значение. Как уже отмечалось во Введении, большие ансамбли взаимосвязанных элементов живой и неживой природы характеризуются, как правило, очень сложной динамикой. В представленной работе предпринята попытка численно смоделировать режим переключений химерных структур в автономном ансамбле взаимодействующих идентичных осцилляторов на примере ансамбля нелокально связанных отображений Эно в хаотическом режиме. В результате проведенных исследований получены численные результаты, которые уверенно показали, что в данной системе наблюдается режим переключений или перемежаемости во времени между различными типами химерных структур.