

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧЕРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Бифуркации пространственно – временных структур в модели активной
среды на основе осцилляторов ФитцХью-Нагумо**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2-го курса 241 группы
Направления 03.04.03. - Радиофизика
Физического факультета

Шамшина Дмитрия Владимировича

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., профессор _____ Т.Е.Вадивасова.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор _____ В.С.Анищенко.

Саратов 2017

Характеристика работы

Работа посвящена изучению волновых и стационарных режимов в модели активной среды с периодическими граничными условиями при изменении параметров, управляющих характером динамики среды. Цель выпускной квалификационной работы состоит в исследовании режимов бегущих волн и стационарных пространственных структур в модели среды на основе кольца осцилляторов ФитцХью-Нагумо с диффузионной связью и выяснении связи динамики среды с динамикой отдельного элемента.

Содержание работы

Во введении обосновывается актуальность работы, даются общие представления о динамике активных сред, приводится обзор научной литературы по теме работы, формулируется цель работы.

Исследование нелинейных сред и распределенных систем остается на сегодняшний день одним из актуальных направлений в нелинейной динамике. Вызывает интерес проблема формирования сложных пространственных структур, которой посвящен ряд монографий. Наибольший интерес представляют так называемые активные среды, в которых наблюдаются автоволновые процессы, т.е. в пространстве могут распространяться незатухающие волны. Модели активных сред и их дискретные аналоги в виде цепочек и решеток взаимодействующих активных элементов играют важную роль в задачах биофизики и нейродинамики, химии, экологии и эпидемиологии и других отраслях науки. Образование пространственных структур является следствием синергетических явлений, связанных с эффектами синхронизации определенных групп взаимодействующих парциальных подсистем (элементов) распределенной системы. Важную роль в образовании структур играют как свойства взаимодействующих элементов, так и вид взаимодействия между элементами.

Во многих случаях непрерывную среду можно представить, как распределенную систему, состоящую из очень большого числа элементов малого размера, связанных локальным взаимодействием. При этом выделяют три типа активных сред: автоколебательные, возбудимые и бистабильные среды. Элементы этих сред, соответственно, являются автогенераторами, возбудимыми системами или бистабильными осцилляторами с двумя устойчивыми состояниями равновесия. Все три типа среды являются активными и демонстрируют автоволновые явления. Однако имеются существенные различия в свойствах этих трех типов сред. Так, элементы автоколебательной среды в соответствующем режиме вне зависимости от граничных условий всегда демонстрируют незатухающие колебания. В возбудимой среде для поддержания таких колебаний требуются определенные условия, обеспечивающие возврат импульса возбуждения к элементу среды спустя некоторое время релаксации. Так, в кольце возбудимых элементов распространяются незатухающие волны возбуждения. В двумерных и трёхмерных возбудимых решетках и средах при определенных начальных условиях наблюдаются волновые структуры в виде спиральных волн.

В системах из бистабильных элементов бегущие волны наблюдаются далеко не всегда. Так в кольце из осцилляторов Дуффинга при диффузионном взаимодействии волновых режимов не возникает. Однонаправленная (конвективная) связь может привести к появлению бегущих волн. Однако в модели бистабильной среды, представляющей собой кольцо диффузионно связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо (ФХН) в бистабильном режиме, можно наблюдать множество волновых мод с различной длиной волны.

Как известно, осциллятор ФХН является простейшей нейронной моделью и классическим примером возбудимой системы. В то же время, при определенном выборе формы уравнений, осциллятор ФХН обладает не

только возбудимым поведением, но также, в зависимости от выбора параметров, может быть бистабильным осциллятором и автогенератором. Возникает интересная задача – исследовать, как меняется поведение модели среды, составленной из осцилляторов ФХН, при изменении управляющих параметров элементов, приводящих к изменению характера их динамики. Ранее, в научной литературе были выявлены определенные общие черты и различия в поведении бегущих волн в автоколебательном, возбудимом и бистабильном режимах, однако достаточно полного анализа режимов при вариации различных параметров, управляющих динамикой парциальных осцилляторов, проведено не было.

В разделе 1 приводится описание базового элемента, выбранного для моделирования среды – осциллятора ФитцХью-Нагумо и исследуемой модели среды. Рассматриваются уравнения осциллятора в следующем безразмерном виде

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x - y - \alpha x^3, \quad \frac{dy}{dt} = \gamma x - y + \beta. \quad (1)$$

В зависимости от значений параметров осциллятор (1) может находиться в трех различных динамических режимах: автоколебательном, возбудимом и бистабильном. Как одна из простейших возбудимых систем, осциллятор ФХН широко используется для создания моделей динамики ансамблей нейронов и волокон тканей в биофизике. Ансамбль локально взаимодействующих осцилляторов (1) может служить достаточно универсальной моделью активной среды, которая, в зависимости от значений параметров осцилляторов может являться автоколебательной, возбудимой или бистабильной. Нами исследовалось кольцо осцилляторов ФХН с диффузионной связью, задаваемое уравнениями

$$\varepsilon \frac{dx_j}{dt} = x_j - y_j - \alpha x_j^3 + k(x_{j-1} + x_{j+1} - 2x_j), \quad \frac{dy_j}{dt} = \gamma x_j - y_j + \beta, \quad j = 1, \dots, N, \quad (2)$$

$$x_{j \pm N}(t) \equiv x_j(t), \quad y_{j \pm N}(t) \equiv y_j(t).$$

Здесь N – число элементов в кольце, k – коэффициент связи.

От дискретной модели среды (2) можно перейти к модели с непрерывной пространственной координатой s . Пусть длина системы в пространстве есть L , тогда элементы среды имеют размер Δs (шаг дискретизации пространственной координаты). В непрерывном пределе $N \rightarrow \infty$, $\Delta s \rightarrow 0$ получаем непрерывную среду с коэффициентом диффузии $\delta = k \cdot (\Delta s)^2$:

$$\varepsilon \frac{\partial x}{\partial t} = x - y - \alpha x^3 + \delta \frac{\partial^2 x}{\partial s^2}, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \gamma x - y + \beta, \quad x(s \pm L, t) \equiv x(s, t), \quad y(s \pm L, t) \equiv y(s, t). \quad (3)$$

Особенности поведения такой среды, находящейся в разных динамических режимах частично были исследованы. Однако не было проведено достаточно полного исследования границ существования различных режимов при изменении управляющих параметров и бифуркаций, определяющих эти границы. Кроме того, поведение распределенной распределённой системы не сопоставлялось в деталях с поведением отдельно взятого осциллятора ФХН.

В разделе 2 приводится бифуркационный анализ отдельно взятого осциллятора ФитцХью-Нагумо при изменении параметров, управляющих характером динамики осциллятора. Были исследованы различные режимы осциллятора (1) при фиксированных значениях параметров $\alpha = 1/3$, $\varepsilon = 0.2$ и изменении β , γ . Построенная в результате проведенных исследований бифуркационная диаграмма осциллятора (1) на плоскости управляющих параметров β , γ приведена на рисунке 1. На диаграмме выделены три области: область бистабильности с двумя устойчивыми точками равновесия (затонированная область I); область автоколебаний (затонированная область II); область с единственным аттрактором – устойчивой точкой равновесия (III). Вблизи порога автоколебаний наблюдается возбудимый режим, для которого характерно возникновение спайков активности при внешнем воздействии на осциллятор, превышающем некоторый порог возбуждения.

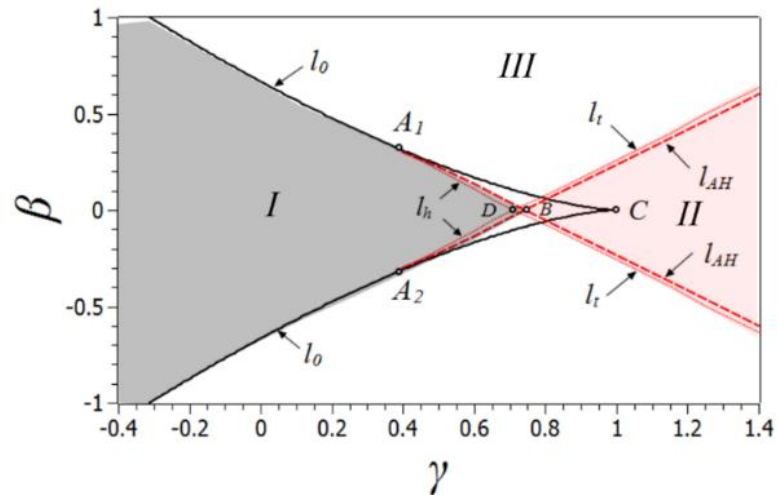


Рисунок 1 - Бифуркационная диаграмма осциллятора (1) на плоскости управляющих параметров β , γ при $\alpha = 1/3$, $\varepsilon = 0.2$: I – область бистабильности с двумя устойчивыми точками равновесия (серая тонировка); II – область автоколебаний (светло-серая тонировка); III – область с единственным аттрактором, которым является одна устойчивая точка равновесия. l_0 - линия касательной бифуркации равновесий; l_{AH} - линия субкритической бифуркации Андронова-Хопфа; l_t - линия касательной бифуркации циклов; l_h - линии гомоклинической бифуркации

В разделе 3 исследован возбудимый характер динамики осциллятора (1) при различных значениях управляющих параметров. О возбудимом характере осциллятора свидетельствует эффект когерентного резонанса (КР), наблюдаемый в осцилляторе (1) при воздействии шума возрастающей интенсивности. Для диагностики эффекта КР использовался коэффициент вариабельности (коэффициент девиации) R , определяемый как отношение девиации интерспайковых интервалов к среднему значению интервала:

$$R = \frac{\sqrt{\sigma_T^2}}{\langle T_i \rangle}, \quad \sigma_T^2 = \langle T_i^2 \rangle - \langle T_i \rangle^2, \quad (4)$$

где T_i есть i -ый интерспайковый интервал, т.е. интервал между последовательными моментами времени t_i и t_{i+1} , соответствующими достижению переменной x уровня возбуждения. Угловые скобки обозначают статистическое усреднение. Зависимости R от D , полученные для значений

параметров, соответствующих областям *III* и *I* (см. рисунок 1), вблизи порога автоколебаний демонстрируют существование оптимальной интенсивности шума, при которой коэффициент вариабельности R достигает минимума. Минимальное значение R соответствует эффекту КР. Если значение параметра γ близко к нулю и, тем более, отрицательно, то осциллятор ФХН не демонстрирует свойства возбудимости.

В разделе 4 исследуются динамические режимы в модели среды на основе диффузионно-связанных идентичных осцилляторов ФитцХью-Нагумо.

Были исследованы различные режимы в кольце идентичных осцилляторов ФХН (2), являющемся дискретным аналогом модели среды (3). Число элементов было выбрано $N = 500$. Модель (3) рассматривалась при фиксированной длине системы $L=100$, коэффициенте диффузии $\delta = 0.1$ и значении параметра $\alpha = 1/3$. Были проведены расчеты при двух значениях параметра ε : $\varepsilon = 0.2$ и $\varepsilon = 0.01$, соответствующих различной степени релаксационности осцилляторов ФХН. Параметры β и γ менялись, что приводило к изменениям характера динамики изолированных парциальных осцилляторов в соответствии с диаграммой, приведенной на рисунке 1. В проведенных исследованиях рассматривались две из возможных волновых мод: одноволновая, соответствующая одной длине волны, укладывающейся вдоль кольца, и двухволновая, когда вдоль кольца укладываются две длины волны. Эти моды можно было получить, задавая начальные условия в виде периодических в пространстве функций с соответствующим пространственным периодом.

Диаграмма режимов на плоскости управляющих параметров β, γ , полученная при $\varepsilon = 0.2$, приведена на рисунке 2. На диаграмме приведены области *I* и *II*, соответствующие областям бистабильности и автоколебаний отдельно взятого осциллятора (см. рисунок 1). Везде, за исключением области *II*, в системе (2) существуют устойчивые равновесные

пространственно-однородные решения, соответствующие пребыванию всех элементов кольца в одном из устойчивых состояний равновесия. В области бистабильности I , имеется два устойчивых равновесных однородных режима, поскольку парциальные осцилляторы характеризуются двумя устойчивыми точками равновесия. Вне областей I и II (белая область на диаграмме) имеется только одно такое решение. В области II устойчивых равновесных состояний не существуют. Здесь возможны только колебательные режимы: пространственно-однородные (идентичные) колебания всех элементов и режимы бегущих волн с различной длиной волны. При соответствующем выборе начальных условий устойчивые режимы бегущих волн наблюдаются также в области W , расположенной вблизи порога автоколебаний. Область W перекрывается с областями I и III , т.е. бегущие волны наблюдаются как при бистабильном характере динамики элементов кольца, так и в области возбудимости при наличии одного устойчивого равновесия.

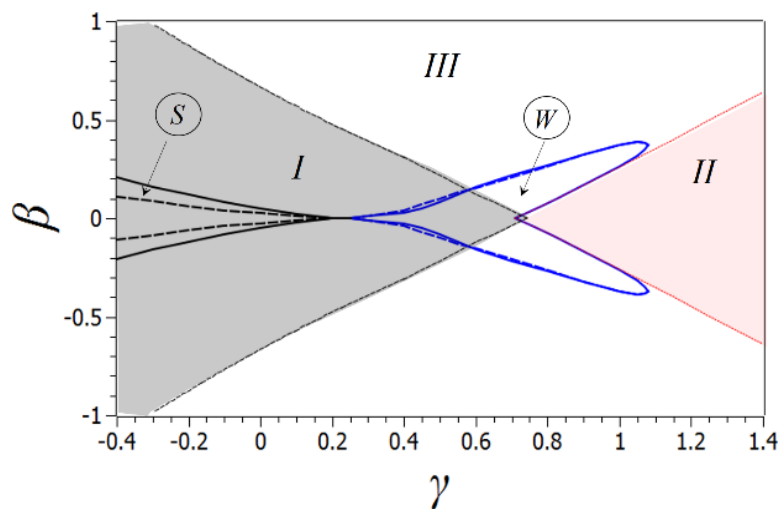


Рисунок 2 - Диаграмма режимов среды (3) при фиксированных параметрах $\alpha = 1/3$, $\varepsilon = 0.2$, $\delta = 0.1$ и изменении параметров β и γ . Области I и II соответствуют области бистабильности и области автоколебаний отдельно взятого элемента. В области III отдельный осциллятор имеет единственный аттрактор – устойчивую точку равновесия. На диаграмме отмечена область W, где наблюдаются бегущие волны в отсутствие автоколебаний в отдельно взятом осцилляторе. Область S соответствует существованию статических пространственных структур. Сплошные жирные линии соответствуют границам одноволновых мод. Жирным пунктиром обозначены границы двухволновых мод.

В режиме бистабильности вдали от порога генерации можно выделить область существования неподвижных пространственных структур S. Такие структуры характерны для широкого класса распределенных систем, состоящих из бистабильных элементов. Они могут быть как периодическими, так и нерегулярными, а их конкретный вид определяется выбором начальных состояний бистабильных осцилляторов.

Была рассмотрена эволюция волнового режима в области W при переходе из области бистабильности II в область III с ростом параметра β . Было обнаружено, что профиль бегущей волны меняется эволюционным образом от биполярных импульсов одинаковой длительности при $\beta = 0$ до узких спайков. При дальнейшем увеличении параметра β режим бегущей волны теряет устойчивость. Таким образом, бегущие волны в области W являются одним и тем же динамическим режимом волн возбуждения, как в области бистабильности, так и вне ее. Был также исследован переход из области W в область автогенерации II с увеличением параметра γ . Было установлено, что при переходе из области W в область I происходит резкая смена формы профиля волны. Таким образом, бегущие волны в областях W и I являются двумя различными динамическими режимами и переход через границу областей связан с бифуркациями этих режимов.

При $\varepsilon = 0.2$ качественный вид бифуркационной диаграммы отдельно взятого осциллятора ФХН не меняется. Линии касательной бифуркации равновесий сохраняют свое положение, линии бифуркаций Андронова-Хопфа и касательных бифуркаций циклов несколько изменяют углы наклона. Главное отличие состоит в том, что при малом ε осциллятор становится сильно релаксационным. Диаграмма режимов в модели среды на плоскости управляющих параметров β , γ при $\varepsilon = 0.01$ приведена на рисунке 3. Здесь использованы те же обозначения, что и на рисунке 2. При сравнении двух диаграмм можно отметить, что область W , соответствующая режиму бегущих волн, теперь становится гораздо больше, имеет другую форму и не ограничена с ростом параметра β по абсолютной величине. Граница области II также служит границей области W . Однако, в отличие от случая $\varepsilon = 0.2$, при переходе из области W в область автоколебаний II не наблюдается каких либо внешних изменений в характере волнового режима. Форма профиля бегущей волны остается практически неизменной при переходе в область автоколебаний. По этой причине на диаграмме, приведенной на рисунке 3, не отмечена правая граница области W . В данном случае нет оснований говорить о наличии какой-то бифуркации режима бегущих волн при переходе от возбудимой динамики среды к автоколебательной.

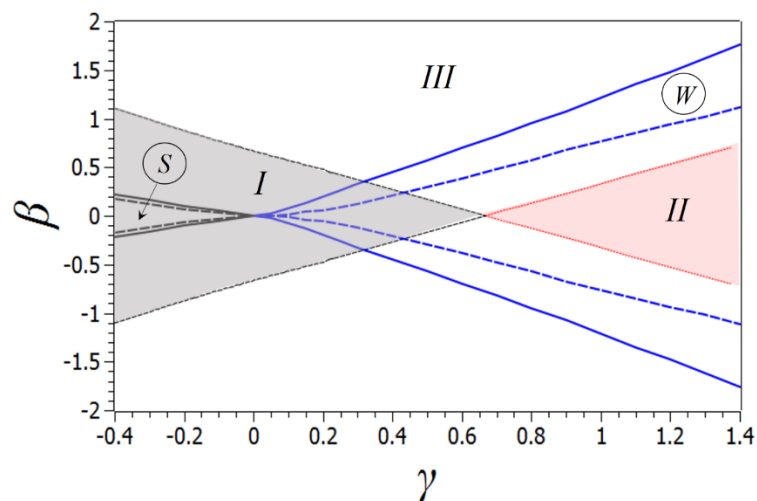


Рисунок 10 - Диаграмма режимов среды (3) при фиксированных параметрах $\alpha = 1/3$, $\varepsilon = 0.01$, $\delta = 0.1$ и изменении β и γ . Затонированные области I и II

соответствуют области бистабильности и области автоколебаний отдельно взятого элемента. В области III (белый цвет) единственным аттрактором отдельного осциллятора является устойчивая точка равновесия. В области, помеченной буквой W наблюдаются бегущие волны в отсутствие автоколебаний в отдельно взятом осцилляторе. Область S соответствует существованию статических пространственных структур. Сплошными жирными линиями показаны границы областей одноволновых мод, жирным пунктиром --границы двухволновых мод

В разделе 5 исследуется влияние шума на режимы бегущих волн в модели среды при различном характере динамики элементов. С учётом источников шума модель (2) принимает вид

$$\varepsilon \frac{dx_j}{dt} = x_j - y_j - \alpha x_j^3 + k(x_{j-1} + x_{j+1} - 2x_j), \quad \frac{dy_j}{dt} = \gamma x_j - y_j + \beta + \sqrt{2D}n_j(t), \quad j = 1, \dots, N, \quad (5)$$

$$x_{j \pm N}(t) \equiv x_j(t), \quad y_{j \pm N}(t) \equiv y_j(t),$$

где $n_j(t)$ – статистически независимые нормированные источники гауссова белого шума. Интенсивность всех источников шума одинакова и задается параметром D .

Было исследовано влияние шума в трех характерных режимах среды, соответствующих различным типам поведения изолированного осциллятора (1): 1) $\gamma = 0.8, \beta = 0.2$ – возбудимый режим; 2) $\gamma = 0.6, \beta = 0.01$ – бистабильный режим; 3) $\gamma = 1.1, \beta = 0.2$ – автоколебательный режим. Во всех трех режимах бегущая волна проявляет устойчивость к слабому шуму и начинает заметно разрушаться только при значительной интенсивности шума $D > 0.01$.

Для трех рассмотренных режимов была рассчитана зависимость коэффициента нормированной девиации интервалов следования импульсов R от интенсивности шума D (рисунок 4). В возбудимом и бистабильном режимах зависимость $R(D)$ носит немонотонный характер, демонстрируя локальный минимум в окрестности значения $D = 0.1$. В автоколебательном режиме зависимость $R(D)$ является монотонной. Наличие локального минимума у зависимости $R(D)$ связано с эффектом когерентного резонанса в

элементах среды. В автоколебательном режиме эффект КР не наблюдается и коэффициент R монотонно растет.

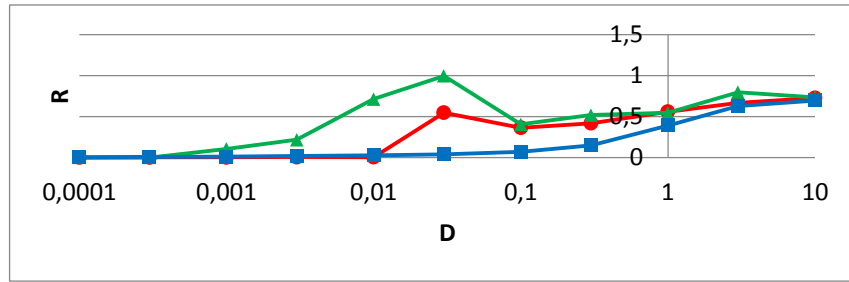


Рисунок 4 - Графики зависимости $R(D)$ в модели среды (5) при $\varepsilon=0.2$, полученные для различных режимов элементов среды: возбуждимого (кружки); бистабильного (треугольники) и автоколебательного (квадраты)

В заключении приводятся основные результаты работы:

1. Построена диаграмма режимов для модели активной среды на плоскости параметров, управляющих характером динамики элементов среды и рассмотрено влияние параметра релаксационности среды ε на границы указанных областей и характер эволюции бегущих волн.
2. Показано, что переход от режима бистабильности в область с одним устойчивым равновесием не сопровождается бифуркацией бегущей волны, которая плавно изменяет свой профиль при изменении параметров.
3. Показано, что переход в область автоколебаний носить различный характер в зависимости от значения параметра ε . При $\varepsilon=0.2$ (случай слабой релаксации) переход в область автоколебаний сопровождается резким изменением профиля бегущей волны, что свидетельствует о бифуркационном характере перехода. При $\varepsilon=0.01$ (случай сильной релаксации) переход в область автоколебаний не сопровождается заметными изменениями формы профиля бегущей волны.
4. При $\varepsilon=0.2$ для возбуждимого и бистабильного режимов в среде наблюдается когерентный резонанс (зависимость коэффициента нормированной девиации интервалов следования импульсов R от

интенсивности шума D носит различных характер). При $\varepsilon=0.01$ когерентный резонанс в среде не наблюдается, как и в автоколебательном режиме при любом значении ε .

В конце работы приводится **список используемых источников**, включающий 40 наименований.

В **приложении** приведен текст программы интегрирования уравнений модели среды с учетом источников шума, написанная на языке С.