

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

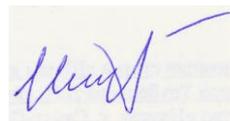
**Радиофизические системы с комплексной аналитической динамикой и
гиперболическим хаосом (кольцевые стадийные системы, модели с
волновой природой, сети связанных колебательных систем)**

НАУЧНЫЙ ДОКЛАД ОБ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ
ПОДГОТОВЛЕННОЙ НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ
(ДИССЕРТАЦИИ)

аспиранта 4 курса 401 группы
направления 03.06.01 «Физика и астрономия»
факультета нелинейных процессов

Обычев Максим Андреевич

Научный руководитель,
доцент кафедры динамических
систем на базе ФГБУН СФ ИРЭ
им В.А. Котельникова РАН
факультета нелинейных процессов,
к.ф.-м.н., доцент



О.Б. Исаева

Саратов 2017

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы

В нелинейной науке принят подход, заключающийся в классификации наблюдающихся феноменов в соответствии с особенностями отвечающей им динамики и конструировании соответствующих модельных систем. Таких специальных феноменов и классов систем описан целый ряд: это и гамильтоновская и консервативная динамика¹, и обратимые и необратимые системы², и комплексная аналитическая динамика³, квазипериодическая динамика⁴, феномен странного нехаотического аттрактора⁵, различные типы хаотических аттракторов⁶, например, гиперболические⁷, и др. С другой стороны, в нелинейной теории весьма актуальными являются исследования, касающиеся поиска взаимосвязей между этими особыми и, тем самым, обособленными классами явлений. К поиску подобного рода можно отнести открытие всевозможных бифуркаций и сценариев, например, перехода к хаосу (фейгенбаумовский сценарий⁸, переход через разрушение квазипериодических движений⁹, перемежаемость¹⁰ и др.). Также это исследования возможности “выживания”, “гибели” или трансформации особых феноменов при переходе системы из одного класса симметрии в другой: например, от диссипативных к консервативным¹¹, от удовлетворяющих условиям комплексной аналитичности к комплексно неаналитическим¹², от необратимых систем к обратимым¹³.

Еще одним актуальным и требующим внимания вопросом является поиск возможностей или определение ситуаций для реализации упомянутых специфических феноменов, многие из которых изначально описывались на базе искусственных математических моделей, в реальных или реалистичных физических системах. Например, создание прототипов радиофизических устройств, генерирующих сигналы с заданными этими феноменами динамическими свойствами, зачастую затруднено. Во-первых, воплощение

¹Reichl L.E. The transition to chaos in conservative classical systems: Quantum manifestations. (Institute for Nonlinear Science.) New York: Springer-Verlag, 1992. 551 pp.

² Пригожин И., Стенгерс И. Время. Хаос. Квант. К решению парадокса времени. Едиториал УРСС, 2003, 210с.

³ Mandelbrot B.B.. The fractal geometry of nature. Freeman, San-Francisko, 1982.

⁴ Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. 1971.V. 20. P. 167

⁵ Feudel U., Kuznetsov S., Pikovsky A.. Strange nonchaotic attractors. Dynamics between order and chaos in quasiperiodically forced systems. World Scientific, Singapore, 2006. 228pp

⁶ Afraimovich V., Hsu S.-B.. Lectures on chaotic dynamical systems, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics, V. 28, American Mathematical Society, Providence, RI;

⁷ Kuznetsov S.P. Hyperbolic chaos: A physicist's view. Higher Education Press: Beijing and Springer: Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 2011. 320pp.

⁸ Feigenbaum, M. J. [1983] "Universal behavior in nonlinear systems," Physica D, V.7, P.16–39.

⁹ Ruelle D., Takens F. On the nature of turbulence // Commun. Math. Phys. 1971.V. 20. P. 167.

¹⁰ Pomeau Y., Manneville P. Intermittent transition to turbulence in dissipative dynamical systems //Commun. Math. Phys., V. 74, No. 2, 1980, P. 189-197.

¹¹ Zisook A.B. Universal effects of dissipation in two-dimensional mappings // Phys. Rev. A, V.24, No 3, 1982, P.1640-1642.

¹² Peckham B.B. Real perturbation of complex analytic families: points to regions // Int. J. of Bifurcation and Chaos, V. 8, 1998, P. 73.

¹³ Roberts J.A.G., Quispel G.R.W. Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems // Physics Reports, V.216, Nos.2-3, 1992, P.63-177

необходимого типа симметрии требует определенных ухищрений, и, во-вторых, идеальное выполнение условий этой симметрии (например, отсутствие потерь для консервативных систем или выполнение условий Коши–Римана для комплексно аналитических) также бывает труднодостижимым.

Цель и задачи работы

Цель исследования состоит в разработке физических и нелинейно-динамических моделей, демонстрирующих некоторые специальные феномены теории динамических систем и детерминированного хаоса. Эти модели призваны позволять осуществлять переход между разными узкоспециальными явлениями и отвечающими им классами симметрии, либо отражать общие механизмы и особенности их возникновения. Данный подход, подразумевающий большую общность ожидаемых результатов, является весьма целесообразным в естествознании вообще. В настоящей же работе он позволит более полно восстановить картину рождения, существования и сосуществования некоторых интересных явлений, ранее описывавшихся в основном обособленно.

Объект и предмет исследования

Объектами исследования в работе являются динамические системы – отображения в стробоскопическом сечении потоковых систем и дискретные отображения как таковые, обладающие заданными свойствами и демонстрирующие заданный тип динамики. Во второй главе изучен особый тип отображений, с неоднозначной, неявно определенной динамикой в прямом времени. Предметом исследования является комплексная аналитическая динамика, консервативная и «почти» консервативная динамика, хаотическая динамика гиперболического типа, «неявная» динамика.

Теоретические и методологические основы исследования

Для достижения целей работы использовались как аналитические методы исследования свойств динамических систем, так и численное моделирование их динамики. Все использованные методы либо являются общепринятыми для решения задач подобного рода, либо имеют четкое теоретическое обоснование.

Для решения систем с непрерывным временем использовался метод Рунге--Кутты. Устойчивость (либо неустойчивость) реализующихся динамических режимов определялась путем расчета спектра ляпуновских показателей, производимого по алгоритму Беннетина с ортогонализацией ляпуновских векторов по Граму-Шмидту¹⁴. Для анализа устойчивости регулярных орбит динамических систем также допускался расчет их мультипликаторов¹⁵.

¹⁴Benettin G., Galgani L., Giorgilli A., Strelcyn J.-M., Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for Hamiltonian systems: A method for computing all of them. Part I: Theory. Part II: Numerical application // *Meccanica*, V. 15, 1980, P. 9-30.

¹⁵ Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006

В первой главе для проверки адекватности поведения предложенной кольцевой системы комплексной аналитической динамике использовался ряд известных методов¹⁶: оценка отвечающего необходимому типу симметрии вырождения спектра показателей Ляпунова; непосредственная численная проверка выполнения условий Коши--Римана. Проверке адекватности динамики второй кольцевой системы из первой главы грубому (структурно устойчивому) хаосу помог анализ локальных (усредненных вдоль относительно короткого участка траектории) ляпуновских показателей и их статистического распределения¹⁷.

В значительной мере результаты второй главы базируются на методе исследования сложных хаотических инвариантных множеств, заключающемся в разложении их по циклам. Вложенные в притягивающие или отталкивающие множества устойчивые или неустойчивые периодические орбиты, плотно на нем распределенные и, тем самым, аппроксимирующие его, могут быть найдены и в строгом порядке перечислены путем присвоения каждой из них уникального символического кода. В рамках рассматриваемой задачи о неоднозначно определенной в прямом времени системе такая методика также оказалась полезной для классификации сосуществующих в случае сильной мультистабильности режимов.

Для представления иллюстративного материала во всей работе применялся метод построения различных модификаций 2D и 3D карт динамических режимов (это и классические карты, и карты мультистабильности, карты ляпуновских показателей, карты «комплексной аналитичности» и др.). Также строились фазовые портреты, бассейны притяжения, бифуркационные деревья.

Обоснованность и достоверность полученных результатов

Достоверность работы подтверждается согласованностью численных и независимых полученных аналитически результатов. В работе использовались известные численные методы решения и методики исследования систем в виде обыкновенных дифференциальных и дискретных уравнений с нелинейной динамической природой. Их применимость для решения задач сходного с рассматриваемыми задачами типа описана в научной литературе. Комплекс всех разработанных автором вычислительных программ, использованных в них методик и алгоритмов тестировался на известных модельных системах, и на отвечающих известным результатам предельным случаям рассматриваемых систем. Все полученные данные воспроизводимы и не противоречат теоретическим предпосылкам.

Теоретическая и практическая значимость работы

Результаты первой главы, касающиеся создания кольцевой системы с динамикой, ассоциирующей с гиперболическим хаосом, имеют прикладное

¹⁶Isaeva O.B., Kuznetsov S.P., Osbaldestin A.H.. A system of alternately excited coupled non-autonomous oscillators manifesting phenomena intrinsic to complex analytical maps. *Physica D*, 237, 2008, 873-884.

¹⁷Kuznetsov S.P.. *Hyperbolic chaos: A physicist's view*. Higher Education Press: Beijing and Springer: Heidelberg, Dordrecht, London, New York, 2011. 320pp.

значение в связи с грубостью, т.е. нечувствительностью к малым возмущениям, данного типа динамики. Генераторы грубого хаоса применимы в радиолокации, в качестве шумотронов, в широкополосной и конфиденциальной коммуникации и др. В рамках последнего предложена в работе модель предстает особо выгодной, поскольку может быть реализована на базе сверхвысокочастотных нелинейных элементов (оптической, магнитостатической природы), что особо важно для скорости передачи данных.

Система, описанная во второй главе, или подобная ей, при экспериментальном ее воплощении (например, на радиотехнической основе) может дать возможность реализации в таком устройстве консервативной динамики, что является отдельной достаточно трудной проблемой для большинства случаев в связи с неизбежностью потерь энергии в «неидеальных» условиях эксперимента. Сложное поведение и сильная мультистабильность в системе могут быть использованы в рамках задач об управлении хаосом и хаотической коммуникации.

Результаты также обладают методическим значением и могут быть использованы в учебном процессе в вузах в рамках дисциплин по теории динамических систем и теории хаоса.

Апробация работы и публикации

Работа представлена в 18 научных публикациях и прошла апробацию на 15 научных конференциях различного уровня, в том числе на международной школе "Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС) Саратов, 7-12 октября 2013; всероссийской конференции "Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика Саратов, 3-5 сентября 2013 г, международной конференции "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity, Saratov, May 19-23, 2014; международной конференции "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors" dedicated to the memory of L.P. Shil'nikov, Nizhni Novgorod, 2013; IX Всероссийской конференции "Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика 2-4 сентября 2014, Саратов; международной конференции "Foundations and Advances of Nonlinear Sciences", Minsk, Belarus, September 29 - October 03 2014; международной конференции "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors" dedicated to the memory of L.P.Shil'nikov, Nizhni Novgorod, 20-24 July 2015; X Всероссийской конференции "Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика", 8-10 сентября 2015, Саратов; XVI Международной школе-семинаре по радиофизике и электронике сверхвысоких частот, 2-7 февраля 2015, Саратов, а также 4 международной школе-конференции "Mathematical Modelling of Complex Systems" 14-25 July 2014, Athens, Greece.

Структура и объем работы

Работа состоит из введения, 3 глав и заключения. Содержит 24 рисунка и список литературы из 139 пунктов.

МАТЕРИАЛЫ ИССЛЕДОВАНИЯ

В первой главе рассматривается возможность реализации феноменов комплексной аналитической динамики в кольцевой системе, изображенной на рис.1. Система функционирует следующим образом. На выходе из узла 1 после n -го прохождения кольца пусть имеем сигнал Z_n . Это комплексная медленная амплитуда, характеризующая интенсивность сигнала и его фазу. Сигнал монохромный и его частота равна ω . После узла 1 сигнал попадает в отрезок слабо-нелинейной среды с дисперсией длиной R_1 , в котором преобразуется – в нем возникает составляющая на удвоенной частоте. Далее на пути сигнала стоит фильтр, который пропускает лишь компоненту на частоте 2ω . После этого сигнал отражается от узла 2, где к нему добавляется сигнал накачки D на частоте ω . На отрезке между узлами 2 и 3 снова имеется нелинейная среда длины R_2 , проходя через которую сигналы (пришедший из фильтра на частоте 2ω и добавленный снаружи на частоте ω) взаимодействуют. Результат на выходе из нелинейной среды проходит сквозь фильтр, где из него выделяется компонента на частоте ω . На узле 3 происходит введение опорного сигнала C на той же частоте ω . В результате, после отражения от узла 4 сигнал замыкает круг. У него частота ω , как и при предыдущем прохождении кольца, а интенсивность и фаза характеризуются некой новой комплексной величиной Z_{n+1} . Зависимость $Z_{n+1}=F(Z_n)$ отвечает комплексному отображению.

Преобразование сигнала внутри нелинейной среды определяется известной моделью двухволнового взаимодействия¹⁸

$$i\dot{a} = \alpha a^* b, \quad i\dot{b} = \beta a^2, \quad (1)$$

где a и b – медленные комплексные амплитуды компонент волны на частотах ω и 2ω , соответственно.

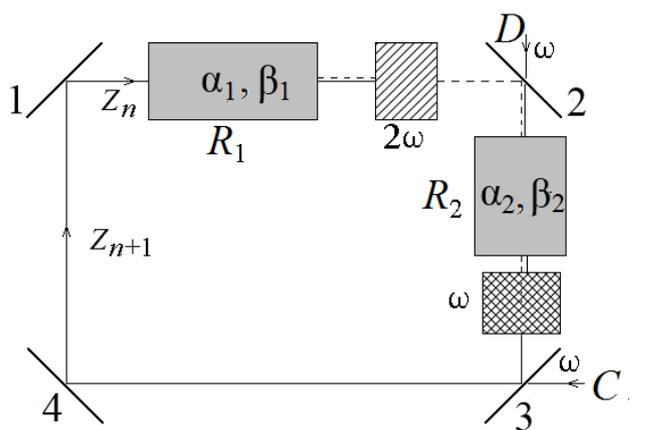


Рис.1. Схема кольцевой системы, рассматриваемой в первой главе

Результаты численного моделирования динамики кольцевой системы представлены на рис.2. На фрагментах (а,д) приведены карты режимов на плоскости комплексного параметра, отвечающего амплитуде опорного

¹⁸ Рабинович М.И., Трубецков Д.И.. Введение в теорию колебаний и волн. М.: Наука–Физматлит, 1984, 432 с; Рыскин Н.М., Трубецков Д.И. Нелинейные волны. М.: Наука–Физматлит, 2000. 272 с.

сигнала C , при фиксированной амплитуде сигнала накачки D и при различных значениях параметров нелинейных сред: α_1, β_1 у первой и α_2, β_2 у второй. Области однородного оттенка на рисунках отвечают периодическому поведению комплексной амплитуды сигнала в стробоскопическом сечении Z_n , и её устойчивой динамике в ограниченной области фазового пространства. На фрагментах (b,c,e,f) изображена фазовая плоскость переменной Z_n при значениях параметра C внутри и снаружи области устойчивости на карте режимов. Однородный оттенок отвечает бассейну притяжения периодического аттрактора. Градациями серого цвета на всех фрагментах размечена область неустойчивости в системе. Более темные оттенки отвечают большему времени убегания траекторий на бесконечность.

На рис.2 (a,d) наблюдаются структуры, сходные с множеством Мандельброта, а на рис. (b,c,e,f) – с множествами Жюлиа. Это сходство становится все более явным при $\alpha_1 \ll \beta_1, \alpha_2 \gg \beta_2$. Объяснить данный факт можно тем, что именно в таком приближении квадрат комплексной амплитуды Z_n лучшим образом передается в качестве затравки амплитуды составляющей волны b при прохождении первого нелинейного элемента и возвращается в качестве затравки для составляющей a при прохождении второго нелинейного элемента.

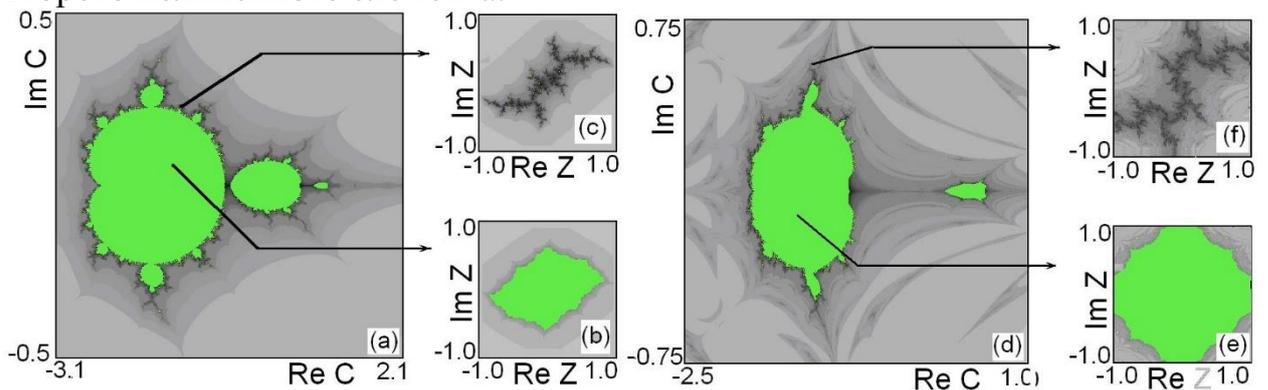


Рис.2. Сходные с множеством Мандельброта структуры на плоскости параметра (a,d), полученное при численном моделировании динамики кольцевой системы. Множества Жюлиа на фазовых плоскости переменной Z (b,c,e,f) при $\alpha_1 = 0.01, \beta_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \beta_2 = 0.01$ (a – c), $\alpha_1 = 1.0, \beta_1 = 0.05, \alpha_2 = 1.0, \beta_2 = 0.1$ (d – f)

На количественном уровне была оценена степень близости реализующейся в исследуемой системе динамики поведению комплексного аналитического отображения. Методика основана на двух подходах.

В случае выполнения условий Коши-Римана должны совпадать ляпуновские показатели отображения. Это следует из равенства собственных чисел матрицы Якоби комплексного аналитического отображения, усредненные вдоль траектории логарифмы которых и отвечают показателям. Изучаемая динамическая система имеет четыре показателя Ляпунова. Сравним два старших.

На рис.3 на фрагментах а и с представлены карты старшего показателя Ляпунова. На рис. с,d приведены карты разности двух показателей. Более темным оттенкам серого цвета отвечают большие значения абсолютной величины этой разности. Видно, что на рис. d существуют области более темного цвета, чем на рис. b, следовательно, в этом случае динамика менее приближена к комплексной аналитической.

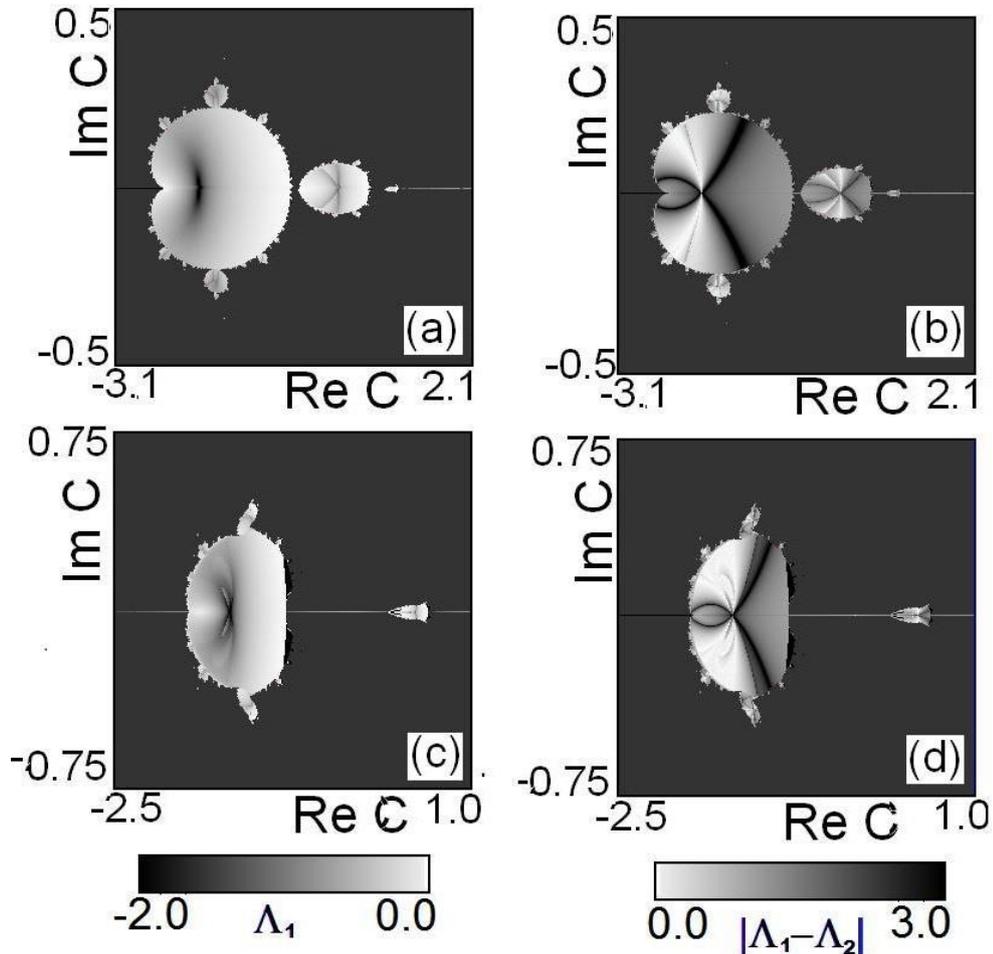


Рис.3. Карты старшего ляпуновского показателя (a,c) и абсолютной величины разности двух наибольших показателей Ляпунова (b,d) при $\alpha_1 = 0.01, \beta_1 = 1.0, \alpha_2 = 1.0, \beta_2 = 0.01$ (a,b), $\alpha_1 = 1.0, \beta_1 = 0.05, \alpha_2 = 1.0, \beta_2 = 0.1$ (c,d).

Второй метод состоит в непосредственном расчете степени выполнения условий Коши–Римана. Для этого введены формальные производные от функции F определяющей динамику в стробоскопическом сечении по комплексной и комплексно сопряженной переменной:

$$d = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} + \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + i \left(\frac{\partial U}{\partial Y} - \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] \quad (2)$$

$$d^* = \frac{\partial F}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial X} - \frac{\partial V}{\partial Y} \right) + i \left(\frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \right) \right] \quad (3)$$

Величину $|d^*|/|d|$ можно считать коэффициентом, определяющим степень приближенности исследуемой динамики комплексной аналитической динамике. Действительно, если условия Коши–Римана выполняются, то формальная производная по комплексно сопряженной переменной равна нулю и, следовательно, введенное отношение производных также равно нулю на всей области определения функции F . Если эта функция неаналитическая, то введенный коэффициент будет положительным. Результаты применения данного метода (рис.4) коррелируют с изложенными ранее.

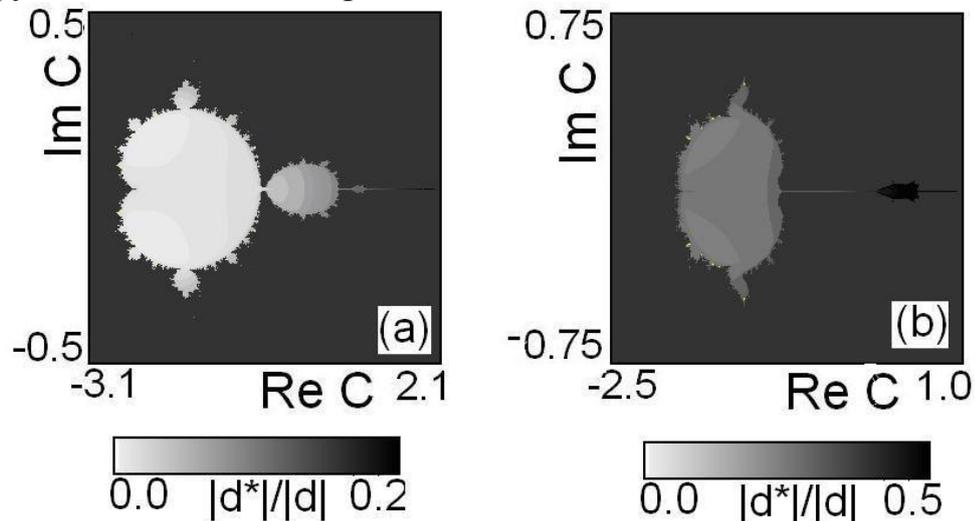


Рис.4. Распределение максимального вдоль траектории отношения модулей формальных производных по комплексно сопряженной и комплексной переменным. Значения параметров $\alpha_1 = 0.01$, $\beta_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 1.0$, $\beta_2 = 0.01$ (вверху), $\alpha_1 = 0.05$, $\beta_1 = 1.0$, $\alpha_2 = 1.0$, $\beta_2 = 0.1$ (внизу).

В первой главе показано также, что модификация кольцевой системы путем введения в нее аттенюатора, стабилизирующего амплитуду модуляции волны, может позволить получить динамику отображения Бернулли $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n \bmod 2\pi$ для ее фазы, а также динамику, ассоциирующуюся с гиперболическим аттрактором Смейла–Вильямса (рис. 5).

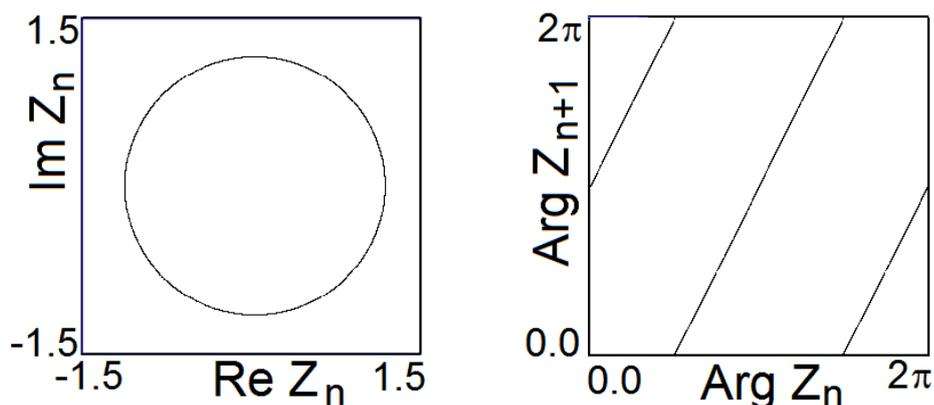


Рис.5. Хаотический аттрактор и отображение Бернулли, реализующиеся в схеме, изображенной на рис. 1 при добавлении в нее аттенюатора

Во второй главе исследована динамика дискретной системы с оператором эволюции, задаваемым неявной функцией, сконструированного на основе отображения Мандельброта

$$z_{n+1} = f(z_n) = \rho z_n + z_n^2, \quad z, \rho \in \mathbb{C} \quad (4)$$

Модельное неявное отображение имеет вид

$$\varepsilon z_{n+1}^2 + z_{n+1} = \rho z_n + z_n^2. \quad (5)$$

Его можно переписать в виде

$$g(z_{n+1}, z_n) = \varepsilon z_{n+1}^2 + z_{n+1} - \rho z_n - z_n^2 = 0 \quad (6)$$

Для (6) может выполняться условие унитарности

$$g(z_{n+1}, z_n) = E g^*(z_{n+1}, z_n) = 0, \quad E = \exp(i\phi) \quad (7)$$

Это происходит при выполнении налагаемых на параметры условий:

$$|\varepsilon| = |\rho| = 1, \quad \text{Arg} \varepsilon = \text{Arg} \rho = \phi + \pi \quad (8)$$

Рассмотрен переход от классической динамики к неоднозначной неявной, а затем к “консервативному”, отвечающему унитарности, пределу при изменении параметра ε (второй параметр в этом случае также должен быть подстроен в соответствии с (8))

Решения модельной системы (5) относительно значения переменной в $(n + 1)$ -ый момент времени имеют вид:

$$z_{n+1} = \frac{\rho z_n + z_n^2}{1/2 \pm \sqrt{1/4 + \varepsilon(\rho z_n + z_n^2)}} \quad (9)$$

Чтобы избежать неоднозначности, обусловленной наличием знака “ \pm ” в решении, будем считать оператором эволюции решение (9) в совокупности с неким правилом выбора знака “+” или “-” на очередном шаге итерирования.

Рассмотрим траектории с выбором знака “+” в (9). Тем самым мы продемонстрируем “продолжение” одного варианта фазового портрета отображения Мандельброта по параметру ε . Зафиксируем $|\rho| = 1$, а модуль управляющего параметра ε будем менять от нуля до единицы. Аргументы обоих комплексных параметров будем считать одинаковыми и равными

$$\text{Arg} \rho = \text{Arg} \varepsilon = \pi(\sqrt{5} - 1) \quad (10)$$

На рис.6 приведены полученные в результате численного моделирования фазовые портреты. Рис.6а – классический диск Зигеля¹⁹ при ε

¹⁹ Дж. Милнор. Голоморфная динамика. Изд-во “РХД”, Удмуртский госуниверситет, 2000.

$= 0$. Рис.6b – продолжение диска Зигеля по параметру ε . Несмотря на достаточно большое по абсолютной величине значение параметра, отвечающего за неявность, структура диска вращения трансформируется довольно слабо. Лишь для унитарного неявного отображения фазовая плоскость кардинально отличается от аналогичной для отображения Мандельброта. На рис.6c имеется иерархическая структура из точек эллиптического типа с так называемыми островками устойчивости вокруг – характерная картина для консервативных систем. Однако, самый большой такой островок является продолжением диска Зигеля и, по-видимому, сохраняет топологическую ему эквивалентность.

Также было рассмотрена эволюция множества Жюлиа⁵ с изменением $|\varepsilon|$. Его можно получить путём итерации в обратном времени. Динамика неявного отображения (7) в обратном времени определяется как

$$z_n = f_{(1,2)}^{-1}(z_{n+1}) = -\frac{\rho}{2} \pm \sqrt{\frac{\rho^2}{4} + (z_{n+1} + \varepsilon z_{n+1}^2)} \quad (11)$$

Наиболее полно обрисовывать неустойчивое предельное множество должна самая развитая и сложная, например, хаотическая орбита. Для ее построения был применен способ, известный как игра в хаос: одно из двух решений в каждый момент дискретного времени выбирается случайным образом. Результаты моделирования для нескольких значений ε вплоть до унитарного предела представлены на рис.7.

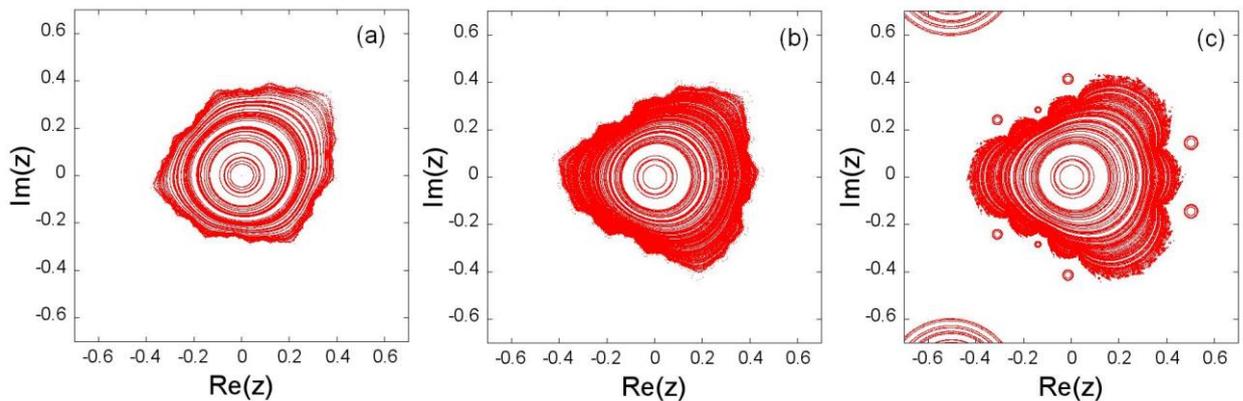


Рис.6. Фазовый портрет модели (7) при $|\varepsilon| = 0$ (a), 0.9 (b), 1.0 (c)

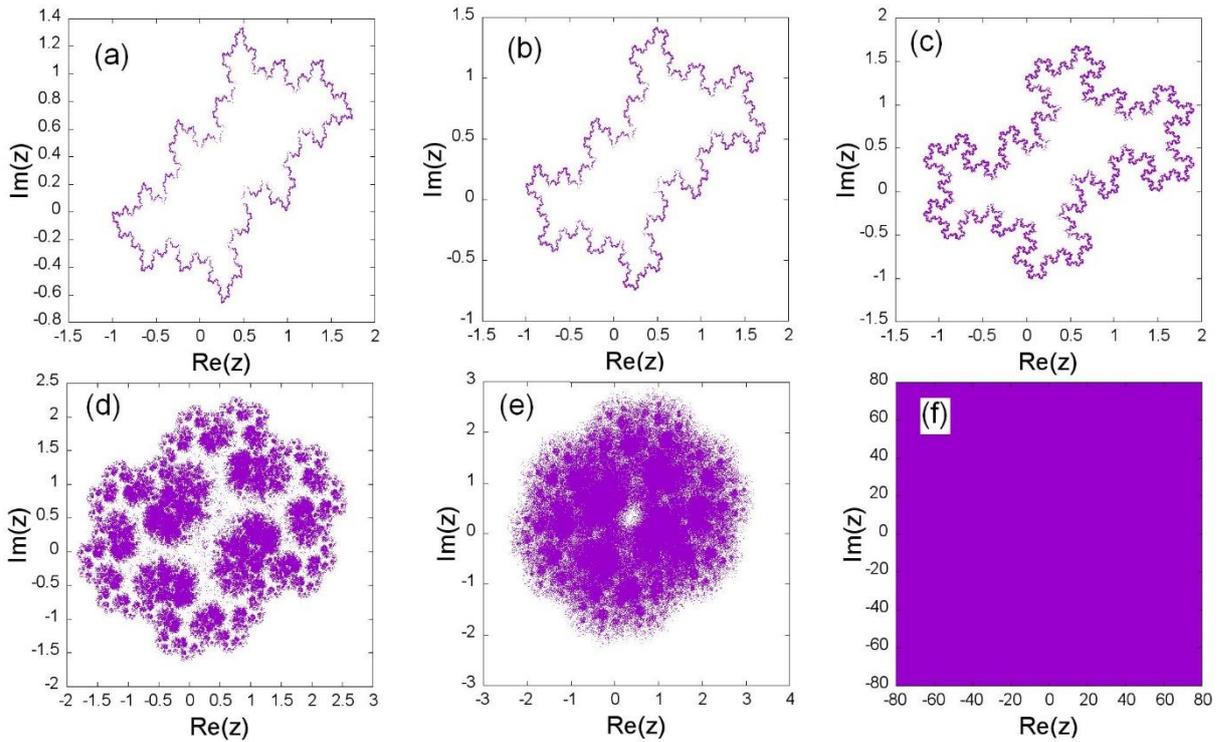


Рис.7. Неустойчивое предельное множество, полученное обратными итерациями (14) со случайным выбором решений при $|\varepsilon| = 0$ (a), 0.2 (b), 0.4 (c), 0.6 (d), 0.7 (e), 1.0 (f)

По мере роста $|\varepsilon|$ увеличивается в размерах получаемая на фазовой плоскости фрактальная структура. Поначалу она мало отличается от множества Жюлиа на рис.7 а, но затем усложняется, утолщается и в пределе $\varepsilon \rightarrow 1$ покрывает всю комплексную плоскость. Последнее подтверждает консервативную природу динамики этого случая: отсутствие как аттракторов, так и репеллеров приводит к “броуновскому” блужданию траектории по фазовой плоскости.

Для поиска устойчивых предельных орбит, обусловленных более сложными символическими последовательностями выбора корней (9) были построены карты динамических режимов при разных значениях $|\varepsilon|$ и при $\text{Arg } \varepsilon = \text{Arg } \rho$ на плоскости $(|\rho|, \text{Arg } \rho)$. Для нахождения устойчивого цикла периода N у неявного отображения производилось итерирование (9) с всеми возможными N -периодическими последовательностями выбора “+”- и “-”-решения.

На рис.8 приведенных картах динамических режимов с символическим кодом периода 1 видно, что множество Мандельброта при отличном от нуля ε сохраняется (см. рис.8а), лишь сжимаются в размере и прижимаются к линии $|\rho| = 1$ с приближением к унитарному пределу лепестки усложненного периода: возникает и приближается к той же линии еще одна структура (см.верх рис.8b-d), обладающая, на первый взгляд, топологическими свойствами того же множества Мандельброта. Эта вторая структура отвечает динамике на базе второго экстремума неявного отображения. Несмотря на то, что обе структуры с ростом ε стремятся слиться, мультистабильности не наблюдается.

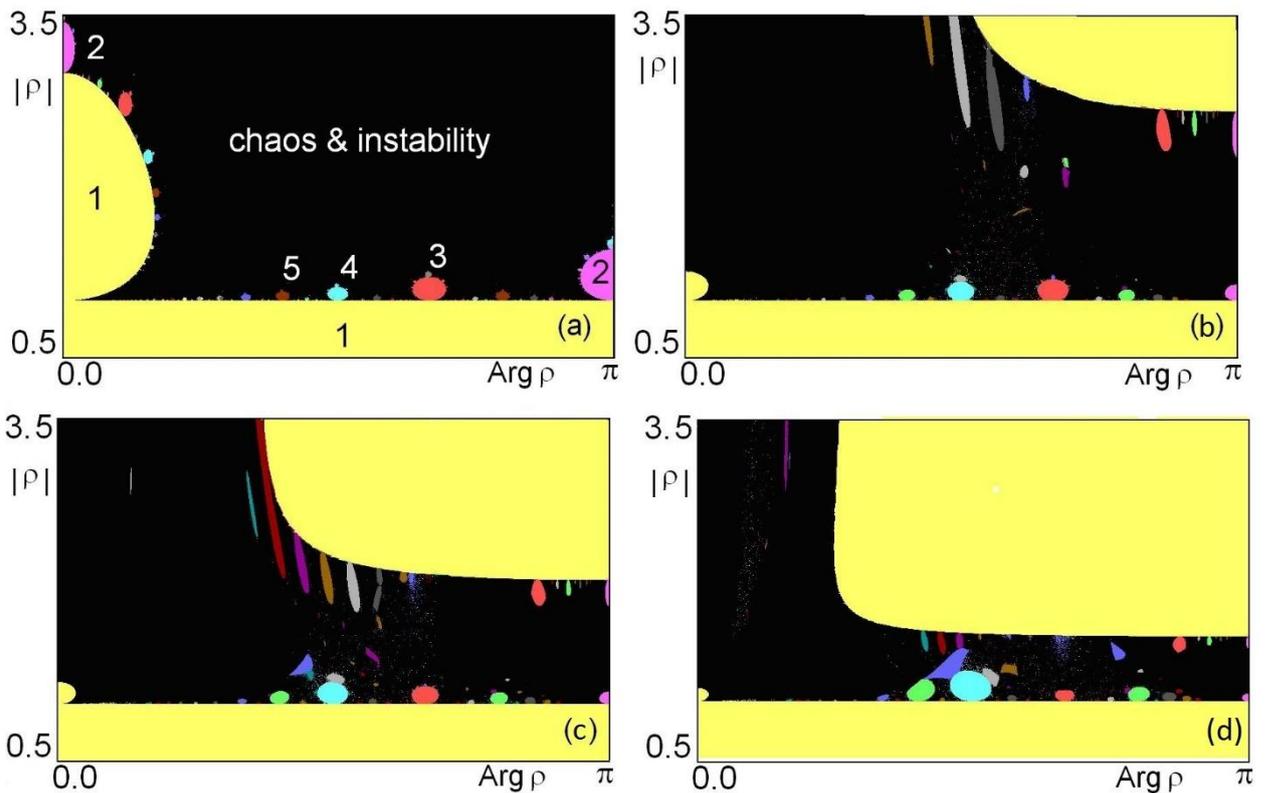


Рис.8. Карта динамических режимов неявного отображения (7) с символическим кодом периода $1n$ при $|\varepsilon| = 0.0001$ (a), 0.63 (b), 0.7 (c), 0.9 (d).

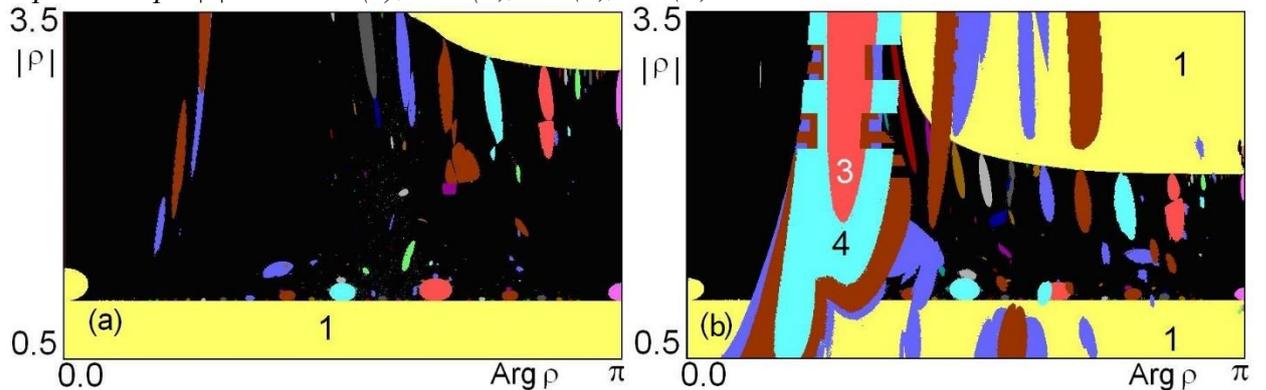


Рис.9. Карта с указанием всех возможных периодических режимов с периодом от 1 до 6 и некоторых более высокопериодических при значении $|\varepsilon| = 0.6$ (a), и 0.7 (b), идентичных отвечающим рис. 9с-е, соответственно. В левой части рис. с у областей периода 3, 4 и 5 сделаны вырезы для демонстрации мультстабильности.

Сосуществование двух или более аттракторов при одних и тех же значениях параметров, которое можно предположить благодаря многообразию символической динамики, становится возможным при учете кодов с минимальным периодом, большим единицы. На рис.9 на картах, демонстрирующих все области циклического поведения с любой символической динамикой и периодом вплоть до 6 (и некоторые более высокопериодические), мультстабильность есть и явно нарастает в окрестности $|\rho| = 1$ с приближением $|\varepsilon|$ к 1, что часто происходит в консервативном пределе у обычных однозначно определенных отображений²⁰.

²⁰Feudel U. Complex dynamics in multistable systems// Int. J. Bif. Cha,18 (6) (2008) 1607-1626.

Феномен сосуществования периодических режимов при учете неоднозначности отображения также был изучен посредством анализа бассейнов их притяжения. Для значения $\rho = 0.9 \exp(i\pi/4)$, отвечающего точке плоскости параметров рис.9 из характерной области нарастающей мультистабильности построены графики положения элементов циклов с периодами вплоть до 8 от параметра (Рис. 10).

Набор рисунков из левого столбца рис.10 демонстрирует трансформацию бассейна притяжения неподвижной точки в начале координат: он увеличивается в размере и усложняется. Остальные столбцы – бассейны более длинных периодических орбит. Эти циклы были получены анализом траекторий со всевозможными символическими кодами периода от 2 (устойчивых траекторий не обнаружилось) до 8. Видно, что для указанных бассейнов также сохраняется тенденция к увеличению размера с ростом $|\varepsilon|$. К тому же, за исключением бассейна неподвижной точки, которая наследуется от отображения Мандельброта, размер бассейна тем больше, чем выше период определяющего аттрактор кода.

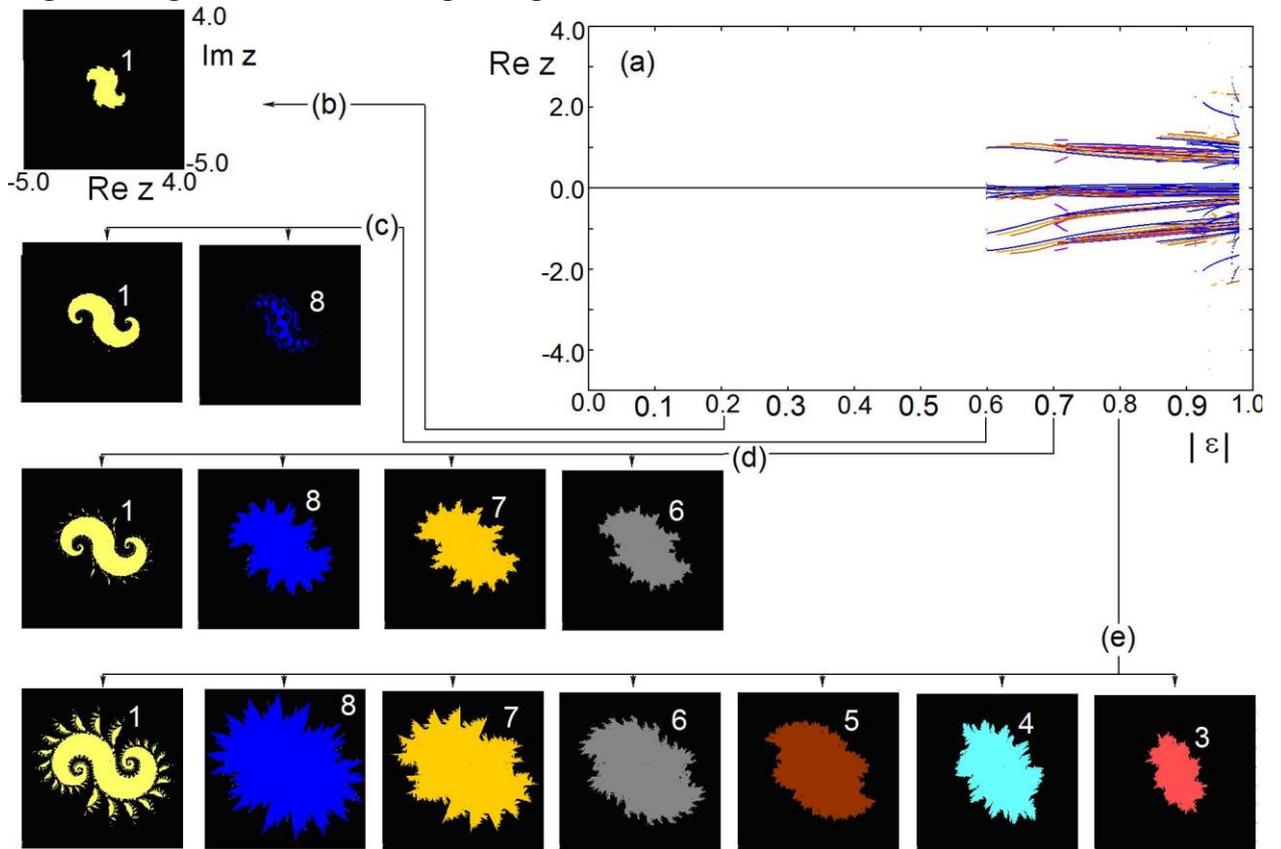


Рис.10. Диаграмма зависимости от параметра положения элементов устойчивых циклов периода от 1 до 8 модельного неявного отображения (7) (a). Линии, отвечающие разным циклам, окрашены разными цветами. Серии (b), (c), (d), (e) – бассейны притяжения сосуществующих циклов (периоды указаны цифрами) при $|\varepsilon| = 0.4, 0.6, 0.7, 0.8$, соответственно. Другие параметры: $|\rho| = 0.9, \text{Arg} \rho = \text{Arg} \varepsilon = \pi/4$. Диапазон изменения вещественной и мнимой части переменной на всех фазовых плоскостях идентичен рис. b

В третьей главе рассматривается сеть из связанных логистических отображений. Квадратичное отображение

$$Z' = Z^2 + C \quad (12)$$

на комплексной плоскости можно представить в виде симметрично связанных логистических отображений

$$\begin{cases} X' = D - X^2 + C_1 \\ Y' = D - Y^2 + C_2 \end{cases} \quad (13)$$

где $X = \text{Re}Z + \text{Im}Z, Y = \text{Re}Z - \text{Im}Z, D = -(\text{Re}Z - \text{Im}Z)^2/2$

Перейдем к более многомерному обобщению поля действительных чисел. Пусть теперь переменная и параметр являются кватернионами – числами с 4-мя компонентами, а именно действительная и 3 мнимые. Переменную, например, можно записать как

$$z = x_0 + i_1x_1 + i_2x_2 + i_3x_3 \quad (14)$$

где мнимые единицы подчиняются следующим условиям

$$i_j^2 = -1, \quad i_j i_k = -i_k i_j = i_m, \quad j, k, m = 1..3 \quad (15)$$

Тогда отображение (12) можно представить в виде четырёх вещественных отображений

$$\begin{cases} x'_0 = c_0 + x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 \\ x'_1 = c_1 + 2x_0x_1 \\ x'_2 = c_2 + 2x_0x_2 \\ x'_3 = c_3 + 2x_0x_3 \end{cases} \quad (16)$$

Введем новую систему координат такую, чтобы одно из преобразований переменных представляло собой суммирование исходных переменных. Остальные преобразования должны естественным образом соответствовать осям координат, ортогональным первой вновь введенной. Например, это можно осуществить следующими заменами:

$$\begin{cases} X_0 = x_0 + x_1 + x_2 + x_3 \\ X_1 = x_0 - x_1 - x_2 + x_3 \\ X_2 = x_0 - x_1 + x_2 - x_3 \\ X_3 = x_0 + x_1 - x_2 - x_3 \end{cases} \quad (17)$$

Тогда (18) можно записать в виде

$$\begin{cases} X'_0 = C_0 + X_0^2 - (X_0 - S)^2 - D \\ X'_1 = C_1 + X_1^2 - (X_1 - S)^2 - D \\ X'_2 = C_2 + X_2^2 - (X_2 - S)^2 - D \\ X'_3 = C_3 + X_3^2 - (X_3 - S)^2 - D \end{cases} \quad (18)$$

где переменные $S = (X_0 + X_1 + X_2 + X_3)/4 = x_0$ и $D = ((X_0 - S)^2 + (X_1 - S)^2 + (X_2 - S)^2 + (X_3 - S)^2)/4$ имеют физический смысл среднего поля и дисперсии.

Отметим, что помимо того, что для (12) при использовании кватернионов оказалось возможным перейти к системе четырех связанных логистических отображений действительных чисел с симметричной связью, эта связь имеет физический смысл, т.к. среднее поле S после замены отвечает

вещественной части исходного отображения, а дисперсия D оказывается равна квадрату расстояния до вещественной оси в фазовом пространстве.

На рис.11 изображена область, до и после замены переменной (17), в пространстве параметра C , со значениями из которой осуществляется периодическая динамика. Для удобства восприятия не учитывались циклы высоких периодов и хаотическая динамика. Т.к замена переменных (17) – линейная, то структура “мандельбротоподобной” области не изменилась, но произошёл её поворот в пространстве.

На рис.12 изображены области периодической динамики в пространстве параметра для отображения после замены переменных при различных значениях отклонения от симметрии, что может иметь физический смысл отстройки от синхронизма. Видно, чем сильнее нарушаются условия симметрии, тем меньше область периодических режимов, причем сначала исчезают области, соответствующие более высоким периодам.

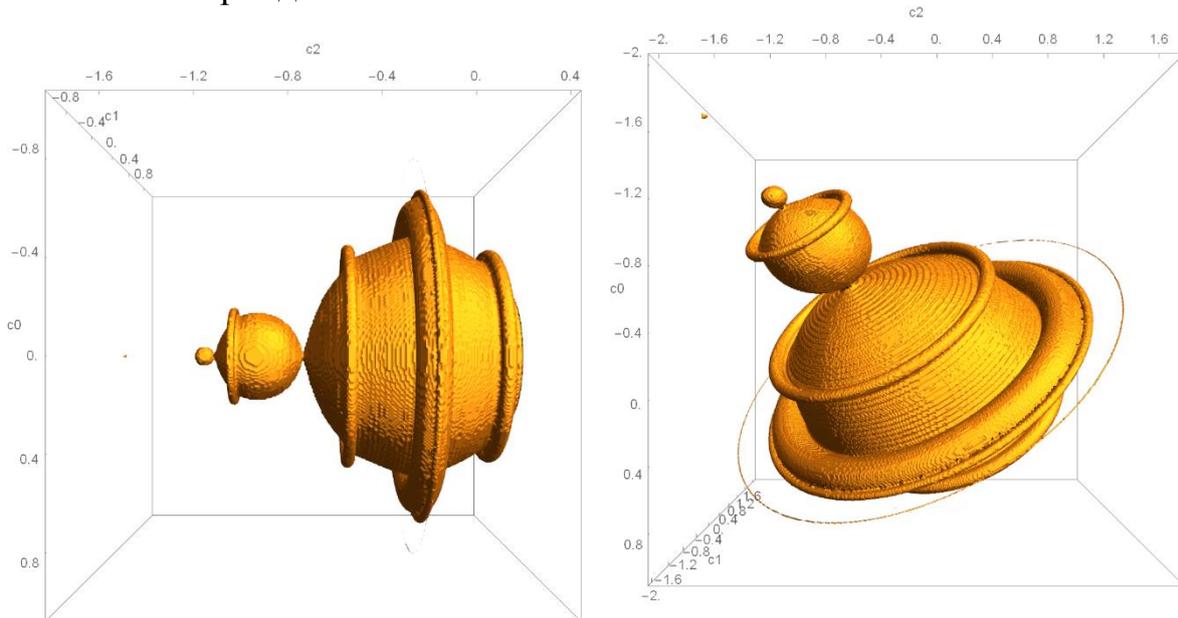


Рис. 11. Трехмерное сечение пространства параметров для кватернионного квадратичного отображения плоскостью $c_3=0$ (a) и для сети квадратичных отображений плоскостью $C_3=C_2$

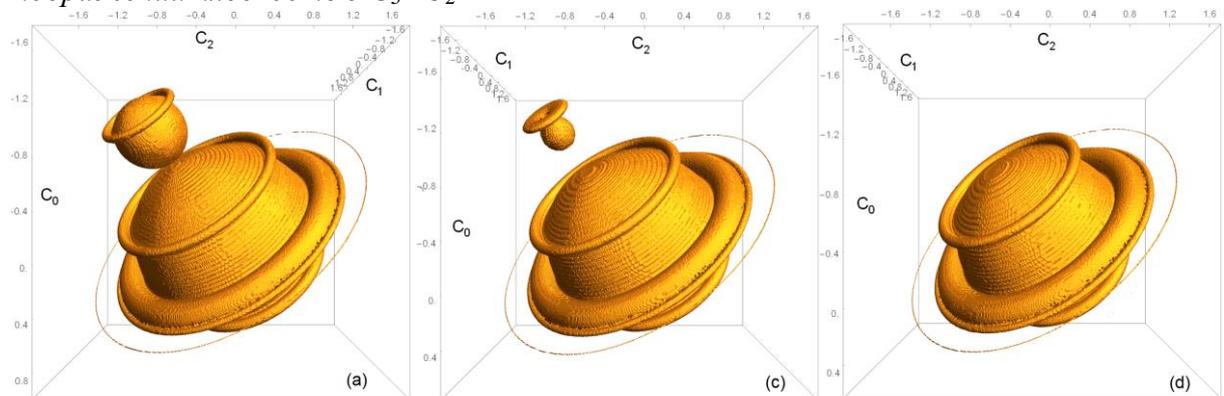


Рис. 12. Сечение пространства параметров плоскостью $C_3=C_2+0.2$ (a), $C_3=C_2+0.6$ (b), $C_3=C_2+0.8$ (c),

Выводы и рекомендации

В первой главе работы рассмотрена одна из модификаций модели двухволнового взаимодействия. В этой системе динамика интенсивностей компонент волны описывается законом сохранения и состоит в перекачке энергии между ними. Разработана кольцевая неавтономная система, в которой могут реализовываться феномены комплексной аналитической динамики, такие как множество Мандельброта. Система содержит квадратично нелинейные элементы, которым отвечает математическая модель двухволнового взаимодействия. Комбинация из двух таких нелинейных элементов в кольцевой системе и наличие внешнего сигнала накачки позволяет «манипулировать» комплексными медленными амплитудами компонент волны таким образом, что в стробоскопическом сечении динамика может соответствовать комплексному квадратичному отображению Мандельброта. Из проведенных в работе численных расчетов можно сделать вывод, что в предложенной кольцевой системе действительно может реализовываться динамика, которая с большой степенью точности приближается к комплексно-аналитической. Степень этого приближения управляется параметрами нелинейного взаимодействия компонент волны в двух входящих в схему нелинейных элементов. При определенных асимптотических значениях этих параметров наблюдаются лишь незначительные отклонения описывающей эволюцию в стробоскопическом сечении функции от удовлетворяющей условиям Коши-Римана.

Во второй главе введена в рассмотрение модельную дискретную динамическую систему, динамика которой задается неявным отображением на множестве комплексных чисел и, следовательно, неоднозначно определена как в прямом, так и в обратном времени. При этом, варьируя параметры системы, можно переводить её как в класс однозначно определённых в прямом времени систем, так и в класс систем с унитарным оператором эволюции, т.е. «консервативных». В случае, когда уравнения системы определяют поведение системы в прямом времени явным образом, её динамика является комплексно-аналитической и демонстрирует соответствующие характерные феномены. При появлении неоднозначности в прямом времени характерные для комплексной аналитической динамики черты сохраняются, при этом в результате стабилизации вложенных в множество Жюлиа явно определённой системы неустойчивых циклов появляется мультистабильность, усиливающаяся тем больше, чем ближе параметры системы к соответствующим унитарности оператора эволюции значениям. В случае, когда оператор эволюции является унитарным, поведение системы как в прямом, так и в обратном времени обладает свойствами, характерными для консервативной динамики.

В третьей главе показано, что в системе симметрично связанных нелинейных элементов в виде сети можно наблюдать феномены комплексной аналитической динамики. В пространстве параметров сети квадратично нелинейных систем со связью, определяемой отклонением от среднего поля и дисперсией величины динамической переменной по ансамблю, имеет место

структура в виде фигуры вращения множества Мандельброта относительно оси его симметрии (или самому множеству в случае, если сеть состоит всего из двух элементов). Данный результат проиллюстрирован на примере системы 4-х связанных в сеть логистических отображений: представлены результаты численного моделирования, и аналитический вывод, подтверждающий изоморфизм математической модели такой сети логистическому отображению, переменная и параметр которого -- кватернионы. Данный результат, однако, не ограничивается лишь малыми сетями и может быть обобщен на произвольное число элементов. Кроме того, в качестве парциальных систем могут выступать и имеющие большее прикладное значение потоковые системы, например осцилляторы.

Положения, выносимые на защиту

1. Феномены комплексной аналитической динамики (множество Мандельброта, связанные с ним типы бифуркаций и перехода к хаосу) и структурно устойчивая хаотическая динамика (ассоциирующаяся с гиперболическим аттрактором Смейла--Вильямса) могут наблюдаться в кольцевой кусочно-непрерывной неавтономной системе, содержащей нелинейные элементы, описываемые резонансной моделью двухволнового взаимодействия.

2. Особая динамическая система – отображение, оператор эволюции которого задается неявной функцией значений переменной в следующие друг за другом моменты дискретного времени, – может сочетать нелинейную динамику диссипативного типа и консервативную динамику. Будучи неоднозначно определенной как в обратном, так и в прямом времени она совмещает особенности обратимых и необратимых систем.

3. Феномены комплексной аналитической динамики являются особым случаем коллективной динамики сети из связанных нелинейных элементов, отвечающему специальному типу симметричной связи между ними и близкому к синхронизму состоянию. При квадратично-нелинейных элементах сети связь выражается через статистические моменты значений динамических переменных по ансамблю вплоть до второго порядка, а именно через отклонение переменной от среднего по ансамблю поля и через дисперсию этого отклонения.

Основные научные публикации по теме работы

1. М.А. Обычев. Кольцевая система с описываемыми моделью двухволнового взаимодействия нелинейными элементами, в которой реализуются феномены комплексной аналитической динамики // Известия вузов. Прикладная нелинейная динамика, №3, 2013 С.96-102.

2. O.V. Isaeva, S.P. Kuznetsov, M.A. Obichev. Phenomena of complex analytic dynamics in the non-autonomous nonlinear ring system //Cornell University Library. Preprint nlin. arXiv: 1011.4771 (9 pages) ,2010.

3. М.А. Обычев. Численное исследование динамических систем приближенных моделей резонансного взаимодействия волн в слабонелинейной среде с дисперсией // Сборник тезисов конференции <Нелинейные дни в Саратове для молодых>, Саратов, Изд-во <Кол-

ледж», 2010, С.87-91.

4. М.А. Обычев. Возможность реализации комплексной аналитической динамики в неавтономной нелинейной кольцевой системе // Сборник тезисов конференции <Нелинейные дни в Саратове для молодых>, Саратов, Изд-во <Колледж>, 2010, С.83-87.

5. О.Б. Исаева, М.А. Обычев. Пример кольцевой системы, демонстрирующей комплексную аналитическую динамику // Сборник тезисов Всероссийской конференции <Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика>, Изд-во Саратовского государственного университета, 2010, С. 34-35, ISSN 2218-2985.

6. М.А. Обычев, О.Б. Исаева, С.В. Гришин. О динамике модели резонансного взаимодействия двух волн в слабонелинейной дисперсионной среде и о некоторых кольцевых системах на ее основе // Сборник тезисов Всероссийской конференции <Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика>, Изд-во Саратовского государственного университета, 2011, С. 131-132, ISSN 2218-2985.

7. М.А. Обычев, О.Б. Исаева. Комплексная аналитическая динамика в неавтономной негладкой нелинейной кольцевой системе // Сборник тезисов Всероссийской конференции <Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика>, Изд-во Саратовского государственного университета, 2012, С. 104-105, ISSN 2218-2985.

8. М.А. Обычев, О.Б. Исаева, С.П. Кузнецов. Реализация соленоида Смейла-Вильямса и феноменов комплексной аналитической динамики в кольцевой стадийной системе // Сборник тезисов Международной школы "Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС) Изд-е Саратовского ун-та, 2013, С.86.

9. М.А. Обычев, О.Б. Исаева. Комплексная аналитическая динамика и гиперболический хаос в кольцевой системе с нелинейными волновыми элементами// Сборник тезисов Всероссийской конференции "Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика Изд-во Саратовского государственного университета, ISSN 2218-2985 2013, С. 175.

10. М.А. Obychev, O.B. Isaeva, An example of stage ring system with wave nonlinear elements, manifesting the special phenomena of the theory of chaos: complex analytical dynamics, hyperbolic chaos //Book of Abstracts of International Conference "Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling Complexity 2014,P.35.

11. М.А. Obychev, O.B. Isaeva, S.P. Kuznetsov. Ring system with the complex analytical dynamics phenomena // Book of Abstractsof International Conference "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors"dedicated to the memory of L.P. Shil'nikov (Nizhni Novgorod, Russia) , 2014, P. 93.

12. М.А. Обычев, О.Б. Исаева. Реализация специальных феноменов теории динамического хаоса в одной распределенной системе с нелинейными элементами, описываемыми консервативной моделью двухволнового взаимодействия // Сборник тезисов IX Всероссийской конференции "Нанoeлектроника, нанофотоника и нелинейная физика 2014, С.130-132.

13. O.B. Isaeva, M.A. Obychev, S.P. Kuznetsov Realization of the hyperbolic chaos and complex analytical dynamics in one ring stage wave system // Book of abstracts of Int. Conf. "Foundations and Advances of Nonlinear Sciences Minsk, Belarus,
14. M.A. Obychev, O.B. Isaeva. Features of dynamics of the implicit maps. Conservative and near conservative case // Book of Abstracts of International Conference "Dynamics, Bifurcations and Strange Attractors" dedicated to the memory of L.P. Shil'nikov (Nizhni Novgorod, Russia) , 2015, P. 25.
15. М.А. Обычев, О.Б. Исаева. Феномены комплексной аналитической и консервативной динамики в особом классе динамических систем - неявных отображениях // Сборник тезисов X Всероссийской конференции "Нанозлектроника, нанофотоника и нелинейная физика 2015, С.213-214.
16. О.Б. Исаева, М.А. Обычев. Стадийная волновая система с феноменами комплексной динамики и гиперболическим аттрактором // Сборник тезисов XVI Международной школы-семинара по радиофизике и электронике сверхвысоких частот, 2015, С.49.
17. Исаева О.Б., Обычев М.А., Савин Д.В. Модель неявного отображения, демонстрирующая переход от диссипативной комплексной аналитической динамики к консервативной // Сборник тезисов Международной школы "Хаотические автоколебания и образование структур (ХАОС) Изд-е Саратовского ун-та, 2016, С.86.
18. Исаева О.Б., Обычев М.А., Савин Д.В. Динамика дискретной системы с оператором эволюции, задаваемым неявной функцией: от отображения Мандельброта к унитарному отображению // Нелинейная динамика. 2017 (в печати).