Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дискретной математики и информационных технологий

Паросочетания

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы
специальности 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»
факультета компьютерных наук и информационных технологий
Крикунова Сергея Сергеевича

Научный руководитель
профессор, д.ф.-м.н. ________________ В.А. Молчанов
дата, подпись

Заведующий кафедрой
доцент, к.ф.-м.н. ________________ Л.Б. Тяпаев
дата, подпись

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время графы и связанные с ними методы исследований пронизывают на разных уровнях едва ли не всю современную математику. Графы используются в теории планирования и управления, теории расписаний, социологии, математической лингвистике, экономике, биологии, медицине. Как более жизненный пример можно взять использование графов в геоинформационных системах. Существующие или вновь проектируемые дома, сооружения, кварталы и т. п. рассматриваются как вершины, а соединяющие их дороги, инженерные сети, линии электропередачи и т. п. — как рёбра. Применение различных вычислений, производимых на таком графе, позволяет, например, найти кратчайший объездной путь или ближайший продуктовый магазин, спланировать оптимальный маршрут.

Целью дипломной работы является изучение графов и паросочетаний. Для достижения цели были выделены подзадачи и на их основе составлен следующий план работы:

1) Изучить специальную литературу, включающую в себя статьи и учебники по дискретной математике и теории графов
2) Реализовать алгоритм, позволяющий решить задачу нахождения наибольшего паросочетания.
3) Провести серию экспериментов, которые помогут отчетливо представить, как находится решение задачи нахождения наибольшего паросочетания в графе, а также убедиться в корректности работы программы.

Бакалаврская работа состоит из введения, 8 разделов, заключения, списка использованных источников и приложения. Общий объем работы – 41 страница, из них 33 страницы – основное содержание, включая 29 рисунков, список использованных источников из 11 наименований.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении ставятся цели и задачи бакалаврской работы.

В первом разделе «Основные понятия теории графов» рассматриваются основные определения, необходимые для уточнения или установления терминов, используемых в работе.

Во втором разделе рассматриваем теорему Холла и задачу о свадьбах.

Теорема Холла

Пусть G — двудольный граф с долями V_1 и V_2. Совершенное паросочетание из V_1 в V_2 существует тогда и только тогда, когда $|O(M)| > |M|$ для всякого $M \subseteq V_1$ [2].

Задача о свадьбах

Имеется множество юношей, каждый из которых знаком с некоторыми девушками. При каких условиях можно женить всех юношей так, чтобы каждый из них женился на знакомой ему девушке?[7]

Действительно, построим двудольный граф $G = (V_1,V_2)$, в котором V_1 есть множество юношей, а V_2 — соответственно множество девушек, а знакомые юноши и девушки соединены ребрами. Тогда одновременно женить всех юношей означает найти в данном графе совершенное паросочетание из V_1 в V_2 .

Ответ на вопрос задачи о свадьбах можно сформулировать так: задача разрешима тогда и только тогда, когда любые к юношей из данного множества знакомы в совокупности не менее чем с к девушками[7].

В третьем разделе рассматриваются определение увеличивающей цепи и доказательство Теоремы Бержа.

Чередующаяся цепь называется увеличивающей, если её первая и последняя вершины не принадлежат паросочетанию. Иными словами, простая цепь M является увеличивающей тогда и только тогда, когда вершина v_1 не принадлежит P, ребро (v_2,v_3) принадлежит P, ребро (v4,v5) принадлежит P, ..., ребро ($v_{\{k-2\}}$,$v_{\{k-1\}}$) принадлежит P, и вершина v_k не принадлежит P [6].

Лемма об увеличивающей цепи

Если в двудольном графе G есть увеличивающая относительно паросочетания P цепь, то при перекраске всех ребер этой цепи получится паросочетание, содержащее на одно ребро больше, чем P [6].

Теорема Бержа

Паросочетание P в двудольном графе G является наибольшим тогда и только тогда, когда не существует увеличивающей относительно P цепи [6].

В четвертом разделе «Алгоритмы обхода графов» описываются поиск в глубину и поиск в ширину.

При поиске в глубину посещается первая вершина, затем необходимо идти вдоль ребер графа, до попадания в тупик. Вершина графа является тупиком, если все смежные с ней вершины уже посещены. После попадания в тупик нужно возвращаться назад вдоль пройденного пути, пока не будет обнаружена вершина, у которой есть еще не посещенная вершина, а затем необходимо двигаться в этом новом направлении. Процесс оказывается завершенным при возвращении в начальную вершину, причем все смежные с ней вершины уже должны быть посещены [10,5].

Таким образом, основная идея поиска в глубину – когда возможные пути по ребрам, выходящим из вершин, разветвляются, нужно сначала полностью исследовать одну ветку и только потом переходить к другим веткам (если они останутся нерассмотренными)[10,5].

При поиске в ширину, после посещения первой вершины, посещаются все соседние с ней вершины. Потом посещаются все вершины, находящиеся на расстоянии двух ребер от начальной. При каждом новом шаге посещаются вершины, расстояние от которых до начальной на единицу больше предыдущего. Чтобы предотвратить повторное посещение вершин, необходимо вести список посещенных вершин. Для хранения временных данных, необходимых для работы алгоритма, используется очередь – упорядоченная последовательность элементов, в которой новые элементы добавляются в конец, а старые удаляются из начала [10,5].

Таким образом, основная идея поиска в ширину заключается в том, что сначала исследуются все вершины, смежные с начальной вершиной (вершина с которой начинается обход). Эти вершины находятся на расстоянии 1 от начальной. Затем исследуются все вершины на расстоянии 2 от начальной, затем все на расстоянии 3 и т.д. Обратим внимание, что при этом для каждой вершины сразу находятся длина кратчайшего маршрута от начальной вершины[10,5].

В пятом разделе рассматривается венгерский алгоритм (алгоритм Куна).

Вход: двудольный граф G с долями X и Y

Выход: список ребер наибольшего паросочетания P в графе G.

1 Выбрать произвольное ребро (x, y), положить P = {(x, y)}.
2 Положить F = Y \ {y}.
3 Если F пусто, закончить работу, иначе пометить все вершины из F как не просмотренные.
4 Выбрать не просмотренную вершину v из F; если существует увеличивающая цепь с началом в v, перекрасить все ребра этой цепи, удалить v из F и вернуться на шаг 3.
5 Пометить вершину v как просмотренную; если в F остались не просмотренные вершины, вернуться на шаг 4 [10].

В шестом рассматривается задача о покрытии. Задача о покрытии наименьшей мощности состоит в нахождении такого множества E ребер графа G = (X,A) что число ребер в E минимально и каждая вершина из G является концевой вершиной по крайней мере одного ребра из E [9].

В седьмом разделе рассматривается задача о назначениях. Задача состоит в том, чтобы найти совершенное паросочетание наибольшего или наименьшего веса.

В восьмом разделе «Практическая часть» описывается созданная в ходе проделанной работы программа, позволяющая найти наибольшее паросочетание в двудольном графе, используя алгоритм Куна. Программа была реализована на языке C# в среде VISUAL STUDIO 2015 COMMUNITY.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При написании выпускной квалификационной работы изучена специальная литература, включающая в себя статьи и учебники по дискретной математике и теории графов, описаны теоретические аспекты и раскрыты ключевые понятия исследования.

В соответствии с поставленными задачами разработана программа, позволяющая проводить вычислительные эксперименты, а именно, находить наибольшее паросочетание в графе.

Программа написана на языке C# в среде VISUAL STUDIO 2015 COMMUNITY. Программа оправдывает свое назначение и выполняет операции с различными входными данными, что и являлось заданием данной работы.

Таким образом, все поставленные задачи были в полном объеме решены.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Уилсон Р. Введение в теорию графов / пер. с англ. И.Г. Никитиной; под ред. Г.П. Гаврилова. — М.: «Мир» , 1977.

2 Белов В.В. Теория графов. Учеб. пособие для втузов / Белов В.В. — М.: «Высш. школа», 1976.

3 Кристофидес Н. Теория графов. Алгоритмический подход / под ред. А. Бряндинской. — М.: «Мир» , 1978.

4 Липский В. Комбинаторика для программистов. М.: Мир, 1988. —

5 Кормен Т. Алгоритмы. Построение и анализ / пер. с англ. И.В. Красикова; под ред. И.В. Красикова. — М.: Издательский дом «Вильямс» , 2005.

6 Берж К. Теория графов и ее применения. — М.: Изд-во иностр. лит., 1962.

7 О. Оре. Графы и их применение. — Москва: Мир, 1965. — С. 40-41.

8 Стивен С. Скиена. Алгоритмы. Руководство по разработке. Второе издание. Пер. с англ. 2011.

9 Герман О. В., Ефремов О. В. Алгоритм решения обобщенной задачи о покрытии / / Экономика и мат. методы. 1998. Т. 34, вып. 4.

10 Дасгупта С. Алгоритмы / под ред. А. Шеня — М.: МЦНМО, 2014.

11 Ваныкина, Г. В. Алгоритмы компьютерной обработки данных / Т. О. Сундукова, Г. В. Ваныкина .— Тула : Издательство ТГПУ им. Л.Н.Толстого, 2011