Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

Построение функции полезности с помощью решения системы Африата

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 441 группы

направления 09.03.03 «Прикладная информатика»

механико-математического факультета

Ухановой Ксении Александровны

Научный руководитель

Старший преподаватель С. Н. Купцов

Зав. кафедрой

д. ф. – м. наук, профессор С. И. Дудов

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Теория формирования потребительского спроса А. Маршалла была одобрена в научных кругах и изменила представление о развитии экономики. Она открыла равноправие спроса и предложения при формировании цен товаров, учла полезность благ и затраты на их производство. Но для объяснения того, как формируются глобальные соотношения цен и объемов производства в экономике эта теория не годилась. Первым приблизился к разработке теории потребительского выбора В. Парето, который показал, что можно отказаться от построения функции полезности и можно заменить ее набором поверхностей безразличия, каждая их которых соответствует множеству наборов благ, одинаково полезных для потребителя. Английский экономист Дж. Р. Хикс развил идеи Парето относительно потребительского выбора в 1939 году. Анализируя реакцию потребителя на изменение цены блага Дж. Р. Хикс выделил эффект замены, соответствующий смещению вдоль кривой безразличия, и эффект дохода, возникающий из-за того, что при росте цены анализируемого блага потребитель не может получить те наборы благ, которые мог получить раньше.

Теперь теория потребительского выбора получила практическую направленность, поскольку в масштабе всей экономики эффект замены можно было оценить, исследовав предпочтения потребителей при сложившихся ценах, а эффект дохода можно было определить, изучив спрос потребителей, имеющих разные доходы.

Обратными задачами математического моделирования называются задачи нахождения коэффициентов и функций модели, определяющих конкретную модель, наиболее адекватную моделируемому объекту. Показателем адекватности выбирается некоторая мера соответствия расчетных и наблюдаемых характеристик объекта. В соответствии с этим обратной задачей теории потребительского спроса является конструирование функции полезности (индикатора отношения предпочтений) для данного рынка из условия наилучшего согласования расчетного спроса наблюдаемым значениям количеств продаж всех продуктов.

Актуальность выбранной темы обусловлена тем, что в современном мире нужно уметь предсказывать экономические ситуации и решать задачу рационального потребления, для этого надо знать функцию полезности. Но мы её заранее не знаем, поэтому её нужно восстанавливать. Актуальность темы выпускной работы также связана со значительным распространением исследуемого явления и заключается в необходимости разработки рекомендаций по совершенствованию решения задачи рационального потребления.

Объектом данной работы выступает экономическая деятельность. Предметом исследования является задача рационального потребления. Инструментом исследования является математическая модель потребительского спроса.

Целью выпускной работы является нахождение функции полезности по торговой статистике. Для решения этой задачи используется система Африата, решение которой осуществляется симплекс-методом.

Источники исследования – учебные пособия, научные статьи, интернет-ресурсы, данные для решения задачи с официального сайта Федеральной службы государственной статистики.

Методы исследования: В теоретической части работы использованы обобщение и анализ статистических данных о ценах на продукты и объеме их потребления, анализ научной и учебной литературы. В практической части работы при решении системы Африата симплекс-методом в среде IntelliJ IDEA 2016.3.5 будет использоваться язык программирования Java.

Выпускная работа состоит из введения, четырех разделов, заключения, списка использованных источников и приложения с реализованной программой.

Основное содержание работы

В первом разделе рассказывается о модели потребительского спроса: задача рационального потребления.

Рассмотрим равновесный рынок n безгранично делимых товаров с заданными ценами $p = (p_1, \dots, p_n) > 0$. Покупатели в совокупности выделяют для закупки этих товаров деньги (бюджет) в количестве $b > 0$. Их отношение предпочтения представляется индикатором - порядковой функцией полезности $u(x)$. Под рациональным поведением покупателей понимается покупка набора товаров, наиболее предпочтительного среди всех наборов, доступных при бюджете b. Это означает, что выбор покупателей x является решением задачи рационального потребления (РП):

$$v(p, b) = max\{u(x) : < p, x > \leq b, x \geq 0\}. \qquad (1)$$

Эту задачу будем также считать моделью коллективного рационального поведения совокупности (ансамбля) потребителей некоторого рынка.

Экстремальное значение целевой функции называется в теории оптимальных решений значением, или маргинальной функцией оптимизационной задачи. Значение задачи РП $v(p, b)$ называется косвенной функцией полезности.

Поставленная задача (1) является базовой в современной микроэкономической теории. Она используется в основном в теоретических целях для формализованного представления основных законов потребительского спроса. При этом она традиционно связывается с поведением индивидуальных потребителей.

Второй раздел посвящен изучению обратной задачи теории потребительского спроса и методов решения систем Африата.

Постановка обратной задачи. Обратными задачи математического моделирования называются задачи нахождения коэффициентов и функций модели, определяющих конкретную модель, наиболее адекватную (в уточняемом смысле) моделируемому объекту. Показателем адекватности выбирается некоторая мера соответствия расчетных и наблюдаемых характеристик объекта. В соответствии с этим обратной задачей теории потребительского спроса является конструирование функции полезности (индикатора отношения предпочтений) для данного рынка из условия наилучшего согласования расчетного спроса наблюдаемым значениям количеств продаж всех продуктов. Уточним эту проблему.

Пусть известна торговая статистика за некоторый период, т.е. в дискретные моменты времени наблюдений заданы цены $p^t = (p_1^t, \dots, p_n^t)$ и объемы продаж $x^t = (x_1^t, \dots, x_n^t)$:

$$\{p^t, x^t: t = \overline{0,T}\} \tag{2}$$

Все цены p_i^t и количества товаров x_i^t считаются положительными. Они определяют потребительские затраты $b_t = < p^t, x^t >$. Статистика (2) является исходными данными обратной задачи РП.

Функция полезности $u(x)$ рационализирует данные (2), если

$$u(x^t) = max\{u(x): < p^t, x > \leq b_t, x \geq 0\}. \tag{3}$$

Это означает, что наблюдаемый спрос (2) является реализацией рачетного спроса $x(p,b)$, т.е. решения задачи (1) с данной функцией $u(x)$ и параметрами (p^t, b_t)

$$x(p^t, b_t) = x^t, t = \overline{0,T} \tag{4}$$

Разумеется, условия согласования модели и наблюдений (4) идеализированы ввиду неизбежных погрешностей реальных данных и определенной условности моделирования. Однако на первом этапе целесообразно исходить из их выполнения. Проблема погрешностей статистики (2) рассмотрена ниже.

Вопрос о существовании функции полезности, рационализирующей данную торговую статистику, был впервые решен С. Африатом в [12] (1967). При этом была выведена система линейных неравенств, определяющих значения рационализирующей функции и множителя Лагранжа на статистических данных, и по этим значениям была построена простая кусочно-линейная рационализирующая функция.

Позже Х. Вэриан развил вычислительные и прикладные стороны фундаментального результата Африата, построив непараметрический метод анализа статистического потребительского спроса.

Для представления основного результата исследований Африата и Вэриана введем следующие величины, связанные со статистикой (2), функцией полезности $u(x)$ и множителем Лагранжа $\lambda(p, b)$ исходной задачи РП:

$$\begin{cases} b_{ts} =< p^t, x^s >,\ b_t = b_{tt},\ a_{ts} = b_{ts} - b_t,\ \ (s,t) = \overline{0,T}; \\ \quad u_t = u(x^t),\ \lambda_t = \lambda(p^t, b_t),\ q^t = \lambda_t p^t,\ \ t = \overline{0,T}. \end{cases} \tag{5}$$

Числа $\{b_{ts}\}$ представляют перекрестные стоимости наборов x^s в ценах p^t. Величины a_{ts} называются кросс-коэффициентами и $\{u_t, \lambda_t\}$ – числами Африата.

Общая теорема Африата. Следующие утверждения эквивалентны:

1) Существует непрерывная, возрастающая, вогнутая функция полезности, рационализирующая данные (2);
2) Существует положительное решение $\{\mathrm{u_t}, \lambda_\mathrm{t}: \mathrm{t} = \overline{0, \mathrm{T}}\}$ системы неравенств

$$\mathrm{u_s} \le \mathrm{u_t} + \lambda_\mathrm{t} < \mathrm{p^t}, \mathrm{x^s} - \mathrm{x^t} >\equiv \mathrm{u_t} + \lambda_\mathrm{t} \mathrm{a_{ts}}, (\mathrm{s}, \mathrm{t}) = \overline{0, \mathrm{T}}. \tag{6}$$

Если существует положительное решение системы (6), то кусочно-линейная функция

$$\bar{u}(x) = \min_t \{l_t(x)\},\ l_t(x) = u_t + \lambda_t < p^t, x - x^t >, \tag{7}$$

рационализирует данные (2).

Методы решения системы Африата. Общим методом решения совместных систем линейных неравенств является симплекс-метод Дж. Данцига линейного программирования (ЛП). При этом вводится некоторый вспомогательный линейный функционал (например, тривиальный с нулевым коэффициентами). Получаемое за конечное число итераций решение, зависит от введённого функционала. В любом случае оно будет опорным, т.е. некоторой угловой точкой многогранного множества решений.

Существуют различные алгоритмы симплекс-метода для задач с условиями – равенствами и неравенствами. Более просты алгоритмы для задач ЛП в канонической форме, т.е. с условиями –равенствами. Для перехода от неравенств к равенствам требуется введение дополнительных переменных для каждого неравенства исходной системы. Системы Африата связывают $2T$ (в общем случае) или T (в однородном случае) переменных и состоят из $T(T+1)$ неравенств. Соответственно, применение простейшего варианта симплекс-метода требует введения $T(T+1)$ дополнительных неотрицательных переменных. Введение такого числа дополнительных неотрицательных переменных. Введение такого числа дополнительных переменных для неравенств также обычно требуется для нахождения исходной вершины допустимого множества (опорного плана).

Известен специальный вариант алгоритма Данцига без введения искусственных переменных, основанный на жордановом исключении переменных неравенств. Однако этот алгоритм достаточно трудоемкий и не использует слабую заполненность матриц систем Африата.

Линейные неравенства можно также решать методами квадратичного программирования (КП), вводя простейший квадратичный функционал – квадрат евклидового расстояния от заданной точки. Соответствующие решение будет проекцией этой точна на многогранное множество решений неравенств. Такая задача о проекции называется также задачей о нормальном решении [30]. Проектируемая точка называется пробным решением и может строиться с учётом смысла решения и его содержательных (экспертных) оценок.

В третьем разделе подробно описывается симплекс-метод: понятие базисного плана и его базиса, доказательство теорем Данцига, построение исходного базисного плана.

Симплекс-метод является основным численным методом решения задач линейного программирования. В этом разделе дано его описание применительно к канонической задаче ЛП:

$$< c, x > \to max,\ Ax = b,\ x \geq 0_n, \quad (8)$$

где $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in R^n,\ c = (c_1, \dots, c_n)^T \in R^n, b = (b_1, \dots, b_n)^T \in R^m,$ матрица A размерности $m \times n$. Это не ограничивает общность метода, так как любая задача ЛП может быть представлена в форме (8). Будем считать, что $m < n$ и $rankA = m$, т.е. все строки матрица A линейно независимы. К этому можно прийти, исключив из системы $Ax = b$ линейно зависимые уравнения. Кроме того, естественно считать $b \neq 0_m$, так как иначе задача (8) становится тривиальной.

Построение исходного базисного плана. При описании симплекс-метода мы предполагали, что уже известен некоторый начальный базисный план задачи. Здесь рассмотрен один из общих способов его построения — метод искусственного базиса.

Пусть дана задача (8). Без потери общности будем считать, что $b \geq 0_m$. Рассмотрим задачу

$$\sum_{i=1}^{m} u_i \to min\,, Ax + u = b, x \geq 0_n, u \geq 0_m, \quad (9)$$

где $u = (u_1, \dots, u_m) \in R^m$. Эта задача имеет решение, так как целевая функция является линейной и ограниченной на допустимом множестве. Причем вектор $z^0 = (0_n, b) \in R^{m+n}$ является базисным планом задачи (9) с базисом $\{e^1, \dots, e^m\}$, ггде e^i – i-й единичный орт в R^m. Применим к задаче (9) симплекс-метод, используя в качестве начального базисный план z^0. В результате найдем оптимальный базисный план $z^* = (x^*, u^*) \in R^{m+n}$ задачи (9). Теперь вопрос о начальном базисном плане для исходной задачи (8) решается в соответствии со следующим утверждением.

В четвертом разделе описывается решение системы Африата с помощью симплекс-метода.

Будем решать систему Африата, используя в качестве исходных значений таблицы (1, 2) со статистическими данными о ценах на продукты питания по Российской Федерации и объеме потребления на душу населения за 1990, 1995, 2000, 2005, 2010-2015 года.

Таблица 1 - Уровень и динамика цен на потребительском рынке (в рублях)

Год	1990	1995	2000	2005	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Картофель	2,26	1882,00	5,19	9,72	28,94	14,26	16,07	23,18	26,66	19,91
Яйца куриные, за 10 шт.	4,47	5345,00	16,57	24,50	38,56	41,25	43,34	56,01	58,76	65,02
Сахар-песок	2,45	4486,00	15,62	19,69	40,62	30,22	31,58	32,32	44,97	52,14
Хлеб и булочные изделия	0,99	4811,00	12,19	22,24	42,60	45,36	50,51	55,11	58,75	64,80

Таблица 2 - Потребление основных продуктов питания по Российской Федерации (на душу населения в год; килограммов)

Год	1990	1995	2000	2005	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Картофель	106	124	109	109	104	110	111	111	111	112
Яйца и яйцепродукты	297	216	229	250	269	271	276	269	269	269
Сахар	47	32	35	38	39	40	40	40	40	39
Хлеб и булочные изделия	120	122	117	121	120	119	119	118	118	118

Введем следующие величины, связанные со статистическими данными (таблицы 1, 2), функцией полезности $u(x)$ и множителем Лагранжа $\lambda(p,b)$ исходной задачи рационального потребления:

$$\begin{cases} b_{ts} = \sum_{k=1}^{n} p_k^t \cdot p_k^s \ = < p^t, x^s >,\ b_t = b_{tt},\ a_{ts} = b_{ts} - b_t,\ \ (s,t) = \overline{0,T}; \\ u_t = u(x^t),\ \lambda_t = \lambda(p^t, b_t),\ t = \overline{0,T}. \end{cases} \quad (10)$$

Числа $\{b_{ts}\}$ представляют перекрестные стоимости наборов x^s в ценах p^t. Величины a_{ts} называются кросс-коэффициентами и $\{u_t, \lambda_t\}$ – числами Африата.

С помощью программы, реализованной в приложении, находим значения b_t, b_{ts} и a_{ts}, представленных в таблице 3.

Таблица 3 - Значения b_t, b_{ts} и a_{ts}

b_{ts}	*x1*	*x2*	*x3*	*x4*
p1	249886,8	446921,5	66177,65	247529
p2	701110,6	1247644	184775,06	693438
p3	585845,4	1040852	154143,31	579297
p4	634848,3	1132346	167666,12	628245
a_{ts}	*s=1*	*s=2*	*s=3*	*s=4*
t=1	0	197034,7	-183709,15	-2357,5
t=2	-546533	0	-1062868,8	-554206
t=3	431702,1	886709	0	425154
t=4	6603,2	504101,3	-460578,96	0

С помощью симплекс-метода, реализованного в программе, находим значения u_t и λ_t:

$$u_t = (249886.8, 446921.5, 61387.68, 367940.792) \quad (11)$$

$$\lambda_t = (1.0, 0.36052, 0.72104, 0.54078) \quad (12)$$

Если существует положительное решение системы

$$u_s \le u_t + \lambda_t < p^t, x^s - x^t > \equiv u_t + \lambda_t a_{ts}, (s,t) = \overline{0,T}, \quad (13)$$

то кусочно-линейная функция

$$\bar{u}(x) = \min_t\{l_t(x)\},\ l_t(x) = u_t + \lambda_t < p^t, x - x^t > \qquad (14)$$

рационализирует статистические данные (таблицы 1, 2).

Чтобы найти значение функции $l_t(x)$ в точке x, подставим в функцию произвольный вектор $x = (197, 316, 129, 250)$. С помощью программы получим:

$$l_t = (636050.89, 637783.203484, 1023680.359865, 898774.950105) \qquad (15)$$

Следовательно, $\bar{u}(x) = \min_t\{l_t(x)\} = 636050.89$ является найденным значением функции полезности.

В приложении представлена программная реализация решения системы Африата симплекс-методом на языке программирования Java.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе выполнено построение кусочно-линейной функции полезности, полученной в результате решения системы С. Н. Африата. Само решение этой системы осуществлено с помощью симплекс-метода решения задачи линейного программирования. В качестве исходных данных для задачи была использована торговая статистика продуктового рынка за несколько лет.

Решение осуществлялось в среде IntelliJ IDEA 2016.3.5 на языке программирования Java. В результате получена функция полезности. Таким образом, поставленная задача полностью решена.