

Министерство образования и науки Российской Федерации  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

**ПОСТРОЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИРУЕМОЙ ФУНКЦИИ ПОЛЕЗНОСТИ  
ПАРАМЕТРИЧЕСКИМ МЕТОДОМ**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 441 группы

направления 09.03.03 Прикладная информатика

Механико-математический факультет

Бухановой Элины Александровны

Научный руководитель

старший преподаватель

С.Н. Купцов

---

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

С.И. Дудов

---

Саратов 2017 г.

## ВВЕДЕНИЕ

Как отмечают многие исследователи, современное общество в последней четверти XX – начале XXI века вступило в новую стадию общественного развития, характеризуемого терминами: «постиндустриальное», «общество риска», «потребительское», «индивидуализированное». Эти термины указывают, прежде всего, на качественное новое состояние общества и на изменения в экономике. Новые экономические реалии ставят перед обществом новые задачи, требующие решений.

Современной экономической теории не хватает фундаментальных закономерностей для описания многообразия тех процессов, которые бы соответствовали современным экономическим реалиям.

Одним из разделов экономической теории, требующих новых подходов и решений на современном этапе развития общества, стала теория потребительского спроса, одной из главных задач которой стал анализ потребительского поведения. Математической интерпретацией данного понятия является функция полезности.

Целью нашей работы является написание программы, описывающей параметрический метод построения дифференцируемой функции полезности. Полученная функция является решением обратной задачи теории потребительского спроса.

Цель исследования может быть достигнута посредством решения следующих задач:

- раскрыть сущность понятий «пространство товаров» и «отношение предпочтения»;
- рассмотреть функцию полезности в качестве критерия оценки товаров;
- проанализировать оптимизационную модель задачи потребительского выбора;
- провести постановку и обзор методов решения обратной задачи теории потребительского спроса;

– описать построение дифференцируемой функции полезности параметрическим методом;

– написать программу, результатом которой является построение функции полезности.

Работа состоит из введения, трех разделов, заключения и списка использованных источников.

## КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Актуальность темы нашей работы определяется тем, что решение обратной задачи теории потребительского спроса позволяет использовать данную модель в качестве инструмента объективного и эффективного решения проблем анализа и регулирования рынков и национальной экономики в целом. Именно это позволяет объективно отвечать на вопросы:

- Как изменится спрос на товары при изменении цен?
- Какие цены обеспечат заданный спрос?

Ответы на эти вопросы необходимы для принятия решений по налогообложению, дотированию производства социально значимой продукции, субсидированию социальных программ и внешнеэкономическому обмену.

Степень научной разработанности темы исследования. Использование подходов в решении обратной задачи потребительского спроса стало возможным благодаря работам отечественных и зарубежных ученых: В.К.Горбунова, Л.А.Козловой, В.И.Зоркальцева, Х.Веряна, С.Н.Африата и др.

Для решения поставленных в исследовании задач были использованы методы анализа, синтеза, моделирования, индукции, дедукции, обобщения.

Практическая значимость работы состоит в написании программы, дающей решение обратной задачи теории потребительского спроса.

Первый раздел дипломной работы посвящён рассмотрению поведения отдельного участника экономики как потребителя товаров. В качестве первичных элементов экономики нами будут исследованы товары и участники рынка. Эта проблема показана с точки зрения рационального распределения личного бюджета потребителя, и, в итоге, сводится к решению вопроса о том, какое количество каждого имеющегося в наличии товара он должен приобрести при заданных ценах и имеющемся доходе.

Нами описаны основные этапы формирования теории потребительского спроса. Показано, что фундамент теории был заложен во второй половине XIX века в работах Г. Госсена, У. Джевонса, Л. Вальраса [1, 2, 3]. В основе данной теории лежит понятие функции полезности. На основе этого понятия и была

построена теория рационального потребительского выбора как максимизация полезности приобретаемого набора благ на множестве благ, доступных при заданном уровне совокупных расходов. Отсутствие эффективных методов решения обратной задачи рационального потребления, а именно построения функции полезности по известной торговой статистике, способствовало дальнейшему развитию теории рационального потребления в 40-50-е годы XX века в работах П. Самуэльсона и Х. Хаутеккера [4, 5]. Однако эта теория имела скорее описательный характер и не отвечала на основные вопросы прикладного анализа рынков. Существенные сдвиги в проблеме построения функции полезности, объясняющей наблюдаемый спрос, явилась работа С. Африата [6], в которой было установлено, что существование такой функции эквивалентно разрешимости некоторой системы линейных неравенств (системы Африата), определяющей конечные наборы значений функций полезности и предельной полезности покупательских затрат для наблюдаемых цен и количеств продаж исследуемого рынка. Последним этапом формирования данной теории стали работы современного российского ученого В.К. Горбунова. В.К. Горбунов предлагает авторскую концепцию моделирования рыночного спроса как исходного объекта, представляющего статистический ансамбль потребителей. Обратной задачей соответствующей теории является построение коллективной функции полезности по торговой статистике.

Далее нами рассмотрены понятия «отношение предпочтения» и «пространство товаров», которые подводят нас к понятию «функция полезности».

В следующем пункте данного раздела мы рассматриваем понятие функции полезности как критерия оценки товаров. Согласно Х. Вэриану, функция полезности – это такой способ приписывания каждому возможному потребительскому набору некоего численного значения, при котором более предпочитаемым наборам приписываются большие численные значения, чем менее предпочитаемым [4]. Отмечается, что функция полезности напрямую зависит от всех тех объективных и субъективных условий, которые влияют на

предпочтение потребителя. При построении функции полезности учитывается то обстоятельство, что эта функция строится сугубо на основе отношения предпочтения.

В следующем пункте первого раздела излагается оптимизационная задача потребительского выбора. Содержательно задача формулируется так: сколько товаров каждого вида, из имеющихся на рынке, следует купить потребителю, чтобы максимально удовлетворить себя, и при этом суммарная стоимость купленных товаров не должна превышать его доход.

Модель задачи потребительского выбора имеет вид:

$$u(x) \rightarrow \max_{x \in B(p,I)} \quad (1)$$

при ограничениях:  $\langle p, x \rangle \leq I, x \geq 0$ , где  $p$  – цена товара,  $x$  – спрос на товар.

Оптимальным решением задачи называется такой вектор

$$x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*), \text{ что } u(x^*) = \max_{x \in B(p,I)} u(x) \quad (2)$$

Оптимальное решение  $x^*$  задачи называется спросом потребителя.

Поставленная задача является базовой в современной микроэкономической теории. При этом она традиционно связывается с поведением индивидуальных потребителей. Условия оптимального решения задачи потребительского выбора могут быть найдены с помощью теоремы Куна–Таккера.

Во втором разделе работы рассматривается обратная задача теории потребительского спроса и приводится краткий обзор методов её решения.

Обратной задачей теории потребительского спроса является конструирование функции полезности для данного рынка из условия наилучшего согласования расчётного спроса наблюдаемым значениям количеств продаж всех продуктов. Используя торговую статистику, мы восстанавливаем функцию полезности, для которой будет выполняться:

$$u(x^t) = \max\{u(x) : \langle p^t, x \rangle \leq b_t, x \geq 0\}, \quad (3)$$

где  $b_t$  – потребительские затраты. Разумеется, условия согласования модели расчётного спроса и наблюдаемого спроса идеализированы ввиду неизбежных погрешностей реальных данных и определенной условности моделирования.

Следующий пункт второго раздела посвящён рассмотрению системы Африата.

Вопрос о существовании функции полезности, рационализирующей данную торговую статистику, был впервые решен С. Африатом в 1967 г [6]. При этом была выведена система линейных неравенств, определяющих значения рационализирующей функции и множителя Лагранжа на статистических данных, и по этим значениям была построена простая кусочно-линейная рационализирующая функция.

Позже Х. Вэриан развил вычислительные и прикладные стороны фундаментального результата Африата, построив непараметрический метод анализа статистического потребительского спроса.

Для представления основного результата исследований Африата и Вэриана введём следующие величины, связанные со статистикой

$$\{p^t, x^t : t = 0, \dots, T\}, \quad (4)$$

функцией полезности  $u(x)$  и множителем Лагранжа  $\lambda(p, b)$  исходной задачи рационального потребления:

$$\begin{cases} b_{ts} = \langle p^t, x^s \rangle, b_t = b_{tt}, a_{ts} = b_{ts} - b_t, (s, t) = 0, \dots, T; \\ u_t = u(x^t), \lambda_t = \lambda(p^t, b_t), q^t = \lambda_t p^t, t = 0, \dots, T. \end{cases} \quad (5)$$

Числа  $\{b_{ts}\}$  представляют перекрёстные стоимости наборов  $x^s$  в ценах  $p^t$ . Величины  $a_{ts}$  называются кросс – коэффициентами и  $\{u_t, \lambda_t\}$  – числами Африата. Далее приводится общая теорема Африата, одним из утверждений которой является то, что существует положительное решение  $\{u_t, \lambda_t : t = 0, \dots, T\}$  системы неравенств

$$u_s \leq u_t + \lambda_t \langle p^t, x^s - x^t \rangle \equiv \lambda_t a_{ts}, (s, t) = 0, \dots, T. \quad (6)$$

Если существует положительное решение системы (6), то кусочно-линейная функция

$$\bar{u}(x) = \min_t \{l_t(x)\}, \text{ где } l_t(x) = u_t + \lambda_t \langle p^t, x - x^t \rangle, \quad (7)$$

рационализирует данные (4). Неравенства (6) называются неравенствами Африата. Функцию (7) назовём функцией Африата. Кусочно–линейная функция Африата (7) – лишь одно из возможных решений поставленной обратной задачи. Она порождает в общем случае многозначные функции спроса и обратного спроса.

В следующем пункте второго раздела показано, что, если существует строгое решение неравенств (6), то существуют дифференцируемые функции полезности, рационализирующие данные (4) и порождающие однозначные функции спроса. Условия, обеспечивающие возможность построения дифференцируемой рационализирующей функции полезности, удастся получить как критерий существования дифференцируемой и строго вогнутой рационализирующей функции.

В следующем пункте даётся краткое описание методов построения дифференцируемой функции полезности: метод нормальных сплайнов, барицентрическая интерполяция, проективная барицентрическая интерполяция.

Третий раздел посвящён рассмотрению непосредственно параметрического метода построения функции полезности. метод основывается на представлении искомой функции полезности в параметризованном виде  $u(x) = u(x, w)$ , где  $w = (w_1, \dots, w_m)$  – параметры, выбор которых определяет конкретную функцию допустимого класса. Мы будем считать допустимыми непрерывно дифференцируемые функции основного класса, то есть положительные (при  $x > 0$ ), монотонно возрастающие и вогнутые функции. Будем искать функцию в виде:  $u(\alpha, x) = \sum_{i=1}^m u_i(\alpha, x)$ , где  $u_i(\alpha, x) = \prod_{j=1}^n x_j^{\alpha_{ij}}$ . Используя известную торговую статистику (4), нам нужно найти коэффициенты  $\alpha$  и сконструировать функцию полезности.

Производя ряд математических преобразований, мы сводим задачу к решению системы уравнений:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^N \alpha_{ik} u_i(\alpha, x^t) = \frac{p_k^t x_k^t}{b_t} u(\alpha, x^t), k = 1, \dots, n - 1; t = 1, \dots, N. \\ \sum_{k=1}^n \alpha_{ik} = 1. \end{cases} \quad (8)$$



Решая данную систему, мы находим искомые коэффициенты и конструируем функцию полезности.

В последующих разделах представлены алгоритм решения задачи, программа на языке Java, реализующая данный алгоритм, и статистика, на которой программа была протестирована.

## **ЗАКЛЮЧЕНИЕ**

В данной работе нами была рассмотрена функция полезности, как критерий оценки товаров, описана оптимизационная модель задачи потребительского выбора, проведён обзор методов решения обратной задачи теории потребительского спроса, описано построение дифференцируемой функции полезности параметрическим методом. Была написана программа, реализующая параметрический метод построения функции полезности по торговой статистике. Программа была протестирована на основе данных по реализации бытовой техники и электроники в период времени с октября 2014 года по февраль 2015 года.