Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Построение графов по заданным степенным множествам

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студенки 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Садохиной Ангелины Владимировны

Научный руководитель

профессор, к.ф.-м.н. В.Н. Салий

Заведующий кафедрой

профессор, к.ф.-м.н. В.Н. Салий

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

В современной науке теория графов применяется во многих сферах. Поэтому свойства графов представляют большой интерес для исследования. Одним из таких свойств является степенное множество. Эта характеристика графа интересна своей прикладной значимостью в таких областях, как химия структурных изомеров и теория надежности систем.

Эти темы поднимаются в работах таких ученых, как Ф. Харари [5], O. Veblen [6], S. Seshu и M. B. Reed [8], P. Erdos и T. Gallai [9], G. Sierksma и H. Hoogeveen [10], O. Ope [13].

В данной работе рассматривается понятие степенного множества, приводятся теоремы о существовании графов с заданными степенными множествами, иллюстрируются алгоритмы построения графов некоторых типов по заданным степенным множествам.

Дипломная работа состоит из введения, определений, 4 разделов, заключения, списка использованных источников и 7 приложений. Общий объем работы – 54 страниц, из них 32 страниц – основное содержание, включая 22 рисунков, список использованных источников из 15 наименований.

В первой части приводятся определения основных терминов, используемых в работе.

Основная часть состоит из двух разделов. Первый раздел посвящен теоретической составляющей работы. В нем рассматриваются теоремы о реализуемости степенных множеств графами некоторых видов. Второй раздел содержит описание разработанного программного обеспечения, его архитектуры, внутренних алгоритмов и интерфейса.

Также в работе приведены список использованных источников и листинг программного обеспечения.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Степенью исхода вершины v называется число $d^+(v)$ дуг орграфа $\vec{G}$, имеющих своим началом v:

$$d^+(v) := |\alpha(v)| \,. \tag{1}$$

Степень захода вершины v — количество дуг $d^-(v)$, имеющих своим концом v:

$$d^-(v) := |\alpha^{-1}(v)| \,. \tag{2}$$

В неориентированном графе $d^+(v) = d^-(v) := d(v)$. Число $d(v)$ называется ***степенью*** вершины v. Набор чисел D_G, являющихся степенями вершин данного графа G, называют его ***степенным множеством***.

Дерево — это связный ациклический граф. Связность означает наличие путей между любой парой вершин, ацикличность — отсутствие циклов. Нетривиальным назовём дерево, у которого более одной вершины.

Планарным называется граф, который может быть изображён на плоскости без пересечения ребер.

Внешнепланарный граф — планарный граф, который имеет укладку на плоскости такую, что все его вершины лежат на границе внешней грани.

1 Степенное множество произвольного графа

Теорема 1 **[3].**

Для любого множества натуральных чисел $A=\{d_1, d_2, \dots d_k\}, k \geq 1$, где $d_1 < d_2 < \dots < d_k$, существует граф с $d_k + 1$ вершинами, для которого A является степенным множеством.

2 Степенные множества некоторых типов графов

2.1 Тип графа: дерево

Теорема 2 **[2].**

Пусть дано множество положительных целых чисел $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n \geq 1$. Нетривиальное дерево T со степенным множеством $D_T = S$ существует тогда и только тогда, когда $1 \in S$. Кроме того, минимальное количество вершин в нетривиальном дереве T со степенным множеством $D_T = S$ равно $\sum_{i=1}^{n} (a_i - 1) + 2$.

2.2 Тип графа: планарный

Теорема 3 **[2].**

Пусть дано целочисленное множество положительных чисел $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, где $n \geq 1, a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Планарный граф G со степенным множеством $D_G = S$ существует тогда и только тогда, когда $1 \leq a_1 \leq 5$.

Пусть $S=\{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n > 1$, – множество положительных чисел таких что $a_1 < a_2 < \dots < a_n$ и $1 \leq a_1 \leq 5$. Тогда обозначим $\mu_p(S) = \mu_p(a_1, a_2, \dots, a_n)$ — минимальное количество вершин планарного графа G, для которого $D_G = S$. Значение $\mu_p(S)$ известно для $n=1$: $\mu_p(1)=2$, $\mu_p(2)=3$, $\mu_p(3)=4$, $\mu_p(4)=6$, и $\mu_p(5)=12$. (плоские графы, дающие эти значения для $a_1=3,4,5$, являются графами тетраэдра, октаэдра и икосаэдра.) Тем не менее, для произвольного множества S натуральных чисел это значение трудно вычислить.

Теорема 4 [2].

Пусть a_1 и a_2 положительные целые числа и $a_1<a_2$. Тогда

1. $\mu_p(a_1, a_2)=\begin{cases} a_2+1 & для \quad 1\le a_1\le \\ a_2+2 & для \quad a_1= \end{cases}$;

2. $\mu_p(a_1,a_2)\le 2a_2+2\, для\, a_1=5$.

Заметим, что для $a_2=6$ также выполняется формула 2 из Теоремы 6.

2.3 Тип графа: внешнепланарный

Теорема 5 **[2].**

Пусть $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}, n\ge 1$ множество положительных целых чисел, в котором $a_1<a_2<\dots<a_n$. Внешнепланарный граф G со степенным множеством $D_G=S$ существует тогда и только тогда, когда $a_1=1$ или $a_1=2$.

Пусть $S=\{a_1,a_2,\dots,a_n\}$, где $n\ge 1$, множество положительных целых чисел, такое что $a_1<a_2<\dots<a_n$ и $a_1=1$ или $a_1=2$. Тогда через $\mu_0(S)=\mu_0(a_1,a_2,\dots,a_n)$ обозначим минимальное количество вершин внешнепланарного графа G, степенное множество которого $D_S=S$.

Для $n=1$ эта величина находится легко: $\mu_0(1)=2$ и $\mu_0(2)=3$. Для $n=2$ докажем следующую теорему.

Теорема 6 **[2].**

(1) Для $a_1=1$ $\quad \mu_0(1,a_2)=a_2+1$

.(2) Для $a_1=2$ $\mu_0(2,a_2)=\begin{cases} a_2+1, & если\, a_2 чет \\ 2a_2-2, & если\, a_2 неч \end{cases}$

3 Общая информация о разработанном программном обеспечении

3.1 Проектирование общей архитектуры приложения

Жизненный цикл приложения можно разбить на следующие шаги

1. получение входных данных,
2. валидация и внесение исправлений,
3. построение графа, удовлетворяющего входным данным,
4. отрисовка полученного графа.

Приложение разрабатывается на языке C# с применением технологий WinForms.

Для описания графов используется класс Graph, который содержит в себе список вершин и список ребер графа [15].

Для манипуляций с графами, определенными степенным множеством используется дочерний абстрактный класс GraphWithDergeeSet. При создании экземпляра потомка этого класса в конструктор необходимо передать степенное множество и указать тип выходного графа. После чего в конструкторе будет откорректировано переданное степенное множество и вызван метод построения графа по степенному множеству. Реализация этих методов производится в классах-потомках, отвечающих за определенный тип графа.

3.1.1 Реализация общего алгоритма

За имплементацию общего алгоритма построения графа по степенному множеству отвечает класс CommonGraph

Заметим что при корректировке заданного множества оно сортируется и из него удаляются неположительные элементы и повторы. Алгоритм генерации графа соответствует рекурсивному алгоритму из доказательства теоремы 1.

3.1.2 Реализация алгоритма построения дерева

Если пользователь желает построить дерево, реализующее заданное степенное множество, то на введенное множество накладывается дополнительная проверка, оно должно содержать в себе единицу. Построение осуществляется согласно алгоритму из теоремы 2.

3.1.3 Реализация алгоритма построения планарного графа

Если необходимо построить планарный граф, реализующий заданное степенное множество, то на введенное множество накладывается дополнительная проверка, перед построением осуществляется поверка, принадлежит ли минимальный элемент множества интервалу [1, 5]. Построение осуществляется согласно алгоритму из теоремы 5.

3.1.4 Реализация алгоритма построения внешнепланарного графа

Перед построением заданное множество, проверяется на равенство минимального элемента 2 или 1. Построение осуществляется согласно алгоритму из теоремы 7.

3.2 Пользовательский интерфейс

В рамках данной дипломной работы была разработана и реализована программа «GraphByDegreeSet», выполняющая построение графа выбранного типа по заданному степенному множеству. При написании этой программы использовалась среда разработки Visual Studio 2015 для Windows Desktop.

При построении графов используются алгоритмы, рассмотренные в ходе доказательств основных теорем данной дипломной работы.

Для построения графа необходимо ввести в область ввода текста желаемую последовательность чисел. В качестве разделителей можно использовать пробел или запятые. Если строка введена некорректно будет выдано соответствующее предупреждение.

Данная программа может вносить в введенное множество следующие исправления:

- Удалить повторяющиеся элементы;
- Удалить отрицательные элементы;

- Если выбран тип графа «Дерево» и минимальный элемент множества больше единицы, в множество добавляется 1;
- Если выбран тип графа «Планарный граф» и минимальный элемент множества больше 5, будет выдана ошибка;
- Если выбран тип графа «Внешнепланарный граф» и минимальный элемент множества больше 2, будет выдана ошибка;

Обо всех поправках сообщается пользователю.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной дипломной работе было проведено изучение степенных множеств графов. Были рассмотрены степенные множества произвольных графов, деревьев, планарных и внешнепланарных графов, приведены и доказаны теоремы о существовании графов с заданными степенными множествами, проиллюстрированы алгоритмы построения графов по заданным степенным множествам. Также были реализованы алгоритмы построения графов в виде программы «GraphByDegreeSet».

Подводя итоги, можно заключить, что все поставленные цели в данной работе были достигнуты.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Богомолов, А. М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В. Н. Салий ; М.: Наука. Физматлит, 1997.

2. Kapoor, S. F. Degree sets for graphs [Электронный ресурс] / S. F. Kapoor, A. D. Polimeni, C. E. Wall // Fund. Math., 95, 1977. P. 189–194. Загл. с экрана. Яз. англ.

3. Хакими, С. Л. О реализуемости множества целых чисел степенями вершин графа [Электронный ресурс] / С. Л. Хакими // Кибернетический сборник. Новая серия. Выпуск 2., 1961. С. 40–53. Загл. с экрана. Яз. рус.

4. Лекции по теории графов / [В. А. Емеличев и др.] М.: Наука. 1990. 384 с.

5. Харари, Ф. Теория графов [Электронный ресурс] / Ф. Харари ; пер. В. П. Козырева. М. : УРСС, 2003. 296 с. Загл. с экрана. Яз. рус.

6. Veblen, O. Analysis Situs [Электронный ресурс] / O. Veblen // Amer. Math. Soc., Cambridge Colloquium Publication, 1931. Загл. с экрана. Яз. англ.

7. Whitney, H. Non-separable and planar graphs [Электронный ресурс] / H. Whitney // Trans. Amer. Math. Soc., 34 (1932). P. 339–362. Загл. с экрана. Яз. англ.

8. Seshu, S. Linear Graphs and Electrical Networks [Электронный ресурс] / S. Seshu, M. B. Reed. Addison-Wesley, Reading, 1961. Загл. с экрана. Яз. англ.

9. Erdos, P. Graphs with Prescribed Degrees of Vertices [Электронный ресурс] / P. Erdos, T. Gallai // Mat. Lapok, Vol. 11, 1960. P. 264–274. Загл. с экрана. Яз. англ.

10. Sierksma, G. Seven criteria for integer sequences being graphic [Электронный ресурс] / G. Sierksma, H. Hoogeveen // Journal of Graph Theory T. 15, 1991. P. 223–231.

11. Diestel, R. Graph Theory [Электронный ресурс] / R. Diestel // GTM 173. 2016. 312 p. Загл. с экрана. Яз. англ.

12. Зыков, А. А. Основы теории графов [Электронный ресурс] / А. А. Зыков. М.: Вузовская книга, 2004. 380 с. Загл. с экрана. Яз. рус.

13. Оре, О. Графы и их применение [Электронный ресурс] / О. Оре. М.: Едиториал УРСС, 2002. 171 с. Загл. с экрана. Яз. рус.

14. Оре, О. Теория графов [Электронный ресурс] / О. Оре. М.: Наука, 1980. 354 с. Загл. с экрана. Яз. Рус.

15. Касьянов, В. Н. Графы в программировании: обработка, визуализация и применение / В. Н. Касьянов, В. А. Евстигнеев. СПб. : БХВ-Петербург, 2003. 1104 с.