Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии

Минимальные примитивные расширения графов

АВТОРЕФЕРАТ

дипломной работы

студента 6 курса 631 группы

специальности 10.05.01 Компьютерная безопасность

факультета компьютерных наук и информационных технологий

Рипинена Алексея Александровича

Научный руководитель

профессор, к.ф.-м.н. ___________ В.Н. Салий

31.12.2016 г.

Заведующий кафедрой

профессор, к.ф.-м.н. ___________ В.Н. Салий

31.12.2016 г.

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Ориентированный граф $G = (V, \alpha)$ называется примитивным, если существует число $r \in \mathbb{N}$ такое, что каждая вершина графа достижима из любой вершины ровно за r шагов. Это также означает, что матрица $A(G)^r$ состоит только из единиц. Примитивным графам посвящены работы [1], [2], [3], [4], [5].

Из определения примитивного графа следует необходимое условие примитивности графа: если граф является примитивным, то он сильно связный. Однако обратное утверждение неверно. Простым примером является контур: контур является сильно связным, но не является примитивным.

Примитивным расширением ориентированного графа $G = (V, \alpha\ )$ называется ориентированный граф $G' = (V, \alpha')$, $\alpha \subseteq \alpha'$, являющийся примитивным.

Примитивное расширение называется минимальным, если оно получено добавлением минимального количества дуг.

Пусть $G = (V, \alpha)$ – произвольный ориентированный граф. Задача состоит в том, чтобы найти его произвольное минимальное примитивное расширение. Простым решением данной задачи является перебор сильно связных расширений. Но асимптотическая сложность такого подхода будет экспоненциальна, вследствие чего он не применим к графам с большим количество вершин. Поэтому требуется найти полиномиальный алгоритм поиска произвольного минимального примитивного расширения графа G.

Частным тривиальным случаем является граф, имеющий петлю, поэтому будут рассматриваться только беспетельные графы. Ни один из двухвершинных беспетельных графов не имеет примитивного расширения, поэтому все рассматриваемые графы будут иметь число вершин не меньше 3.

КРАТКОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Пусть дан примитивный граф $G = (V, \alpha)$. Тогда его минимальным примитивным расширением является он сам.

В решении задачи основным инструментом будет следующий критерий примитивности графа: граф является примитивным тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель (НОД, gcd) всех его контуров равен 1.[6]

Известно, что любой сильно связный не примитивный граф имеет минимальное примитивное расширение, полученное добавлением ровно одной дуги.[7]

Пусть $G = (V, \alpha)$ – не примитивный сильно связный граф. Алгоритм построения минимального примитивного расширения графа G выглядит следующим образом:

1) найти в графе G цепь $v_1 v_2 v_3$, где $v_i \in V$ при $i = 1 \dots 3$;
2) построить граф $G' = (V, \alpha \cup (v_1 v_3))$. Граф G' является искомым расширением.

Далее будут рассматриваться только не сильно связные ориентированные графы.

Задачу нахождения минимального примитивного расширения графа можно свести к нахождению примитивного минимального сильно связного расширения. Если такого расширения не существует, то из любого минимального сильно связного расширения можно получить минимальное примитивное расширение добавлением ровно одной дуги.

Конденсацией ориентированного графа G называется факторграф $G \backslash \varepsilon$, где ε – отношение эквивалентности на множестве вершин графа G, каждый класс которого представляет собой сильно связную компоненту графа G.

Вершина v графа G называется стоком, если из нее не выходит ни одна дуга.

Вершина v графа G называется источником, если в нее не входит ни одна дуга.

Пусть C_{sinks} – количество стоков в графе G, $C_{sources}$ – количество источников в графе G, c_{sinks} – количество стоков в конденсации графа G, $c_{sources}$ – количество источников в конденсации графа G.

Ориентированный граф G будет называться особым, если $C_{sinks} = C_{sources} = c_{sinks} = c_{sources}$.

Для неособых графов задача полностью решена. Для произвольного особого графа задача не решена.

Теорема 1. Пусть граф G – ориентированный граф, у которого количество источников не равно количеству стоков. Тогда у графа G существует минимальное примитивное расширение, полученное добавлением $\max(c_{sources}, c_{sinks})$ дуг, где $c_{sources}$ – количество источников, а c_{sinks} – количество стоков в конденсации графа G. Данное расширение также будет являться минимальным сильно связным расширением графа G.

Теорема 2. Пусть в графе G количество источников равно количеству стоков. Тогда, если в его конденсации H количество источников отличается от количества источников в G, или количество стоков отличается от количества стоков в G, то по крайней мере один сток или источник в H образован минимум двумя вершинами графа G. Тогда у графа G существует минимальное примитивное расширение, полученное добавлением $\max(c_{sources}, c_{sinks})$ дуг.

Алгоритм нахождения минимального примитивного расширения неособых графов.

Вход: ориентированных граф G с количеством стоков не равным количеству источников.

Выход: граф G_p – минимальное примитивное расширение графа G.

Алгоритм.

1) Построение графа H – конденсации графа G. Пусть ε – соответствующее отношение эквивалентности;
2) для каждой компоненты сильной связности $c_i, 1 \leq i \leq m$, где m – количество компонент сильной связности графа G и количество

вершин в графе H соответственно, запомнить все вершины v в графе G такие, что $\varepsilon(v) = c_i$;

3) выделение в графе H всех стоков $s_1, s_2, \dots, s_k$ и источников $u_1, u_2, \dots, u_t$;
4) если $k = t$, то переход в пункт 5, иначе переход в пункт 9;
5) найти такой сток w в H, что в G существуют попарно различные $w_1, w_2, \dots, w_l, l > 1$ такие, что $\varepsilon(w_i) = w$ для $1 \le i \le l$ и она образуют контур. Если такого w в H не существует, то поменять ориентацию всех дуг в G и в H, сделать все стоки источниками, а все источники стоками, поменять k и t. Найти сток w, удовлетворяющий требованию;
6) построить G_s – минимальное сильно связное расширение графа G;
7) пусть в G_s одна из добавленных дуг выходит из вершины w_k в некоторую вершину u (это всегда возможно). Обходом в глубину нужно найти длину маршрута от вершины u до одной из вершин $w_i, 1 \le i \le l$. Пусть длина маршрута равна r;
8) при движении по контуру $w_1, w_2, \dots, w_l$ от вершины из пункта 7 ищется НОД$(r + 1 + d, l)$, где d – пройденное количество дуг по контуру. Пусть на вершине w_q НОД стал равным 1. Тогда из G_S убирается дуга w_ku и добавляется дуга $w_q u$. Получается граф G_p. Выполняется переход в пункт 16;
9) если в графе H $k > t$, то поменять ориентацию всех дуг в графах G и H, сделать все стоки источниками, а все источники стоками, поменять k и t. После этого гарантируется, что $t > k$;
10) в H ищется такой источник u, что каждый сток в H достижим хотя бы из одного источника, не совпадающего с u;
11) из H вырезается подграф H_{cut}, состоящий только из вершин, достижимых по крайней мере из одного источника, не совпадающего с u;

12) строится минимальное сильно связное расширение графа H_{cut}. В H и в G добавляются все дуги, которые должны быть добавлены в H_{cut}. Полученный из G граф обозначается G_s;
13) в графе H ищется произвольный контур $w_1, w_2, \dots, w_l$. Пусть в графе G_s вершина контура соответствуют вершины с теми же обозначениями. Вершине u в G_s также будет соответствовать вершина u;
14) обходом в глубину в G_s нужно найти длину маршрута от вершины u до одной из вершин $w_i, 1 \leq i \leq l$. Пусть длина маршрута равна r;
15) идя по контуру $w_1, w_2, \dots, w_l$ от вершины из пункта 14, ищется НОД$(r + 1 + d, l)$, где d – пройденное количество дуг по контуру. Пусть на вершине w_q НОД стал равным 1. Тогда в G_s добавляется дуга $w_q u$. Получается граф G_p;
16) если в пункте 5 или 9 была изменена ориентация дуг, то изменить ориентацию всех дуг в G_p.

Асимптотическая сложность алгоритма $O\big((n + m)\log n\big)$, где n – количество вершин в G, m – количество дуг в G.

Задача нахождения произвольного минимального примитивного расширения за полиномиальную асимптотическую сложность не решена для произвольного особого графа.

Среди особых графов можно выделить класс графов С, который можно описать следующим образом:

1) пусть граф G – особый граф;
2) пусть граф G_s – двудольный граф, построенный по графу G следующим образом:
    a) вершинами графа G_s являются все стоки и источники графа G;
    b) вершины u и v соединены ребром, если: вершина u – источник в G, вершина v – сток в G, вершина v достижима из вершины u в графе G;

3) в графе G_s существует гамильтонов путь.

Многоугольный граф – граф, полученный из контура переориентацией некоторых его дуг.

Линейный граф – граф, полученный из цепи переориентацией некоторых ее дуг. Если в линейном графе количество источников не равно количеству стоков, то его относят к I типу, в противном случае – ко II типу.

Многоугольные и линейные графы принадлежат классу C.

Способ нахождения минимального примитивного расширения будет рассмотрен для линейных графов и обобщен на любой граф из класса C.

Если к графу G присоединить все дуги вида $v\varphi(v)$, где v – сток, а $\varphi(v)$ – соответствующий ему источник, то полученное расширение графа G является минимальным сильно связным расширением графа G. Оно будет называться φ - расширением графа G или просто G_φ.

Пусть дан произвольный граф $G = (V, \alpha)$ и вершины $u, v \in V$. Результатом объединения вершин u и v является факторграф G_{uv} по отношению эквивалентности θ_{uv}. θ_{uv} – такое отношение эквивалентности, что вершины u и v попадают в один класс эквивалентности, а каждая другая вершина составляет отдельный класс эквивалентности:

$$\theta \coloneqq \{(\mathrm{x}, \mathrm{y}) \in V \times V \mid (\mathrm{x} = \mathrm{y})\ OR\ \{x, y\} = \{u, v\}\ OR\ \{y, x\} = \{u, v\}\}. \qquad (1)$$

Теорема 3. Пусть в сильно связном графе $G = (V, \alpha)$ существует циклический маршрут длины k и вершины $u, v \in V$ взаимно достижимы за k шагов. Тогда граф G является примитивным тогда и только тогда, когда примитивным является граф G_{uv}.

Под цепочкой объединений графа $G = (V, \alpha)$ будет пониматься последовательное применение операций объединения следующим образом: первое объединение в цепочке применяется к графу G, в результате чего получается граф G_1; второе объединение применяется к графу G_1, в результате чего получается граф G_2; i-е объединение применяется к графу G_{i-1}, в результате чего получается граф G_i. Если к графу G применить цепочку объединений длины n, то результатом будет являться граф G_n.

Максимальная цепочка объединений графа $G = (V, \alpha)$ по заданному набору условий – это цепочка объединений, результатом применения которой к графу G является граф G', в котором в соответствии с заданными условиями невозможно сделать никакое объединение вершин.

Сжатием графа $G = (V, \alpha)$ по заданному набору условий называется процедура применения к графу G любой максимальной цепочки объединений по этому набору условий.

Теорема 4. Пусть $G = (V, \alpha)$ – сильно связный граф, в котором есть циклический маршрут длины s, проходящий через все дуги и вершины графа G. Тогда вершины u_1 и $u_2 \in V$ взаимно достижимы за s шагов в графе G если выполняется одно из следующих условий:

1) существует вершина $v \in V$ такая, что в графе G есть дуги vu_1 и vu_2;
2) существует вершина $v \in V$ такая, что в графе G есть дуги u_1v и u_2v.

Теорема 5. Пусть $G = (V, \alpha)$ – сильно связный граф, G' - результат применения некоторой цепочки объединений к графу G по набору условий из теоремы 4. Тогда наибольший общий делитель всех контуров графа G равен наибольшему общему делителю всех контуров графа G'.

Теорема 6. Сжатый линейный граф типа II может быть трех типов: петля, контур или цепь.

Теорема 7. Пусть G – линейный граф типа II с k источниками, G_c – сжатый граф для G, $G_{\varphi c}$ – сильно связное φ - расширение графа G_c, полученное добавлением дуг $v_1u_1, v_2u_2, \dots, v_ku_k$. Тогда длины всех контуров графа $G_{\varphi c}$ являются линейными комбинациями длин внешнего контура и контуров, образованных дугами $v_1u_1, v_2u_2, \dots, v_ku_k$.

Алгоритм поиска примитивного φ - расширения графа G выглядит следующим образом:

1) граф $H = G$ – граф, который будет являться результатом алгоритма;

2) граф H сжимается. Результатом сжатия является новый граф K, а соответствующее отношение эквивалентности – θ;
3) выбирается сток v в графе H следующим образом: если граф K – контур или петля, то v выбирается произвольно, иначе выбирается такой сток v в H, что в K $\theta(v)$ является стоком. Если в графе H нет стоков, то алгоритм завершен и граф H является минимальным примитивным расширением графа G. Иначе переход на шаг 4;
4) пусть m – число источников в графе H. Источники в графе H нумеруются числами от 1 до m в произвольном порядке. Полагается $k = 1$ и переход на шаг 5;
5) если $k > m$, то у графа G не существует примитивного φ - расширения. В этом случае H строится как произвольное φ - расширение G, содержащее дугу из крайнего стока в крайний источник. В нем ищется контур $v_1 v_2 \dots v_t$, $t \leq 3$ и проводится дуга $v_1 v_3$, граф H является минимальным примитивным расширением графа G и алгоритм завершен. Иначе выбирается источник u_k в соответствии с введенной нумерацией на шаге 4. Переход на шаг 6;
6) в граф H добавляется дуга vu_k и граф H сжимается в новый граф T;
7) в T выполняется подсчет количества примитивных φ - расширений – r;
8) если $r > 0$, то переход на шаг 2. Иначе из H удаляется дуга vu_k, k увеличивается на 1 и переход на шаг 5.

Асимптотическая сложность алгоритма: $O(n^2 k^2 \tau(n))$, где n – количество вершин в графе G, k – количество стоков в графе G, $\tau(x)$ – функция количества делителей числа x.

Написана программа на языке JAVA, реализующая нахождение минимального примитивного расширения линейного графа и неособого.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы для больших классов графов были разработаны алгоритмы, позволяющие за полиномиальное время найти минимальное примитивное расширение.

Была написана программа, позволяющая протестировать найденные алгоритмы и быстро находить минимальное примитивное расширение для графов, принадлежащих определенным классам.

Результаты работы были доложены на международной конференции КНиИТ и опубликованы в [9], [10].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 Фомичев В.М. Оценки экспонентов примитивных графов [Электронный ресурс] // Прикладная дискретная математика, выпуск №2(12). 2011. URL: http://sun.tsu.ru/mminfo/000349342/12/image/12-101.pdf (дата обращения 16.12.2016).

2 Фомичев В.М. Свойства минимальных примитивных орграфов [Элекстронный ресурс] // Прикладная дискретная математика, выпуск №2(28). 2015. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/svoystva-minimalnyh-primitivnyh-orgrafov (дата обращения 16.12.2016).

3 Фомичев В.М. О степенной структуре графов [Электронный ресурс] // Прикладная дискретная математика, выпуск №8. 2015. URL: http://cyberleninka.ru/article/n/o-stepennoy-strukture-grafov (дата обращения 16.12.2016).

4 С. Н. Кяжин, В. М. Фомичев. Теоретические основы прикладной дискретной математики [Электронный ресурс] // Прикладная дискретная математика, выпуск №2(16). 2012. URL: http://www.mathnet.ru/links/1a7b5ae471264fbfa3ba1d7a74fb3b0e/pdm364.pdf (дата обращения 16.12.2016).

5 Р. И. Бар-Гнар, В. М. Фомичев. О минимальных примитивных матрицах [Электронный ресурс] // Прикладная дискретная математика, выпуск 7. 2014. URL: http://www.mathnet.ru/links/7299307237dcc438b3d359f6f741ffcd/pdma133.pdf (дата обращения 16.12.2016).

6 Beasley Le Roy B., Kirkland S. A note on k-primitive directed graphs. // Linear Algebra and Appl. 2003. P. 67-74

7 Салий В.Н. Минимальные примитивные расширения ориентированных графов. // Прикладная дискретная математика. 2008. С. 116-119.

8 Богомолов А.М., Салий В.Н. Алгебраические основы теории дискретных систем. М. : Наука, 1997. 368 с.

9 Рипинен А.А. Минимальные примитивные расширения многоугольных и линейных графов. // Компьютерные науки и информационные технологии : Материалы международной научной конференции. Саратов : Издат. центр «Наука», 2016. 496 с. С. 338-342.

10 Рипинен А.А. Минимальные примитивные расширения многоугольных графов. // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета : материалы итоговой студенческой научной конференции. Саратов : Изд-во Сарат. Ун-та, 2015. 116 с. С. 29-30.