



**Введение.** Современное научно-техническое развитие требует оценки качества объектов, что подразумевает оценку их надежности. Актуальность данной работы обусловлена, прежде всего, значительным прогрессом, который был достигнут в области крупномасштабного производства нано частиц, ("наноконпонентов"), тем не менее, уделяется недостаточное внимание вопросу об оценки надежности нано конпонентов.

В связи с тем, что в настоящее время, высокая надежность, необходима для обеспечения продвижения и использования нано конпонентов, т.к. они составляют значительную долю расходов на вновь проектируемые объекты. Таким образом, в данной работе предлагается рассмотреть общую методологию, основанную на понятии "копула", которая анализирует взаимодействие между атомами нано конпонентов и способна дать оценку надежности или вероятности отказа наноконпонентов.

Основным методом в работе является применение теории копул для оценки надежности. Предлагаемый метод является очень гибким и простым в реализации. В работе будут рассмотрены три вида структур: последовательная, параллельная и последовательно-параллельная.

*Цель работы:* Исследование вероятности выхода из строя смоделированной наноструктуры с помощью теории копул.

В ходе выполнения работы будут решены следующие *задачи:*

1. Рассмотрены современное состояние теории копул;
2. Исследованы подходы и понятия теории «копул»;
3. Разработана методика оценки надежности, основанная на понятии «копула»;
4. Предложены модельные наносистемы наноконпонент;
5. Проведена оценка надежности различных видов наноконпонентов по предложенной методике.

## **Основное содержание работы.**

**В первом разделе работы** представлено современное состояние теории копул.

В настоящее время методы, основанные на многомерном распределении – копула, приобретают большую популярность. Копулы используют для решения разнообразных задач, которыми «озадачивает» нас финансовый рынок, страховое дело, эконометрика и другие области статистических приложений. Это связано с тем, что копула имеет широкий диапазон применения [1].

**Во втором разделе** проводится детальный анализ основных понятий и понятий теории копул.

Копула бывает следующих видов:

- эллиптические (нормальная, Стьюдента, Коши, и др.) [2];
- архимедовы (Клейтона, Гумбеля, Франка и др.) [3];
- эмпирические [4].

Также рассматриваются элементы теории копул:

- 1 Теорема Склера [5];
- 2 Границы Фреше-Хефдинга для копулы [6];
- 3 Коэффициент корреляции Спирмена [7].

**В третьем разделе описывается** общая методология оценки надежности наносистем на основе теории копул.

В нашей работе для оценки надежности наносистем предлагается методология базовое положение которой основаны на работе [8].

Мы рассматривали нанокomпонент, состоящий из  $N$  атомов  $A = \{1, 2, \dots, N\}$  взаимодействующих друг с другом. Предложенный метод оценки надежности или вероятности отказа состоит из нескольких шагов.

Шаг 1: Мы накладываем структурированную сетку над этой областью. Структурированные сетки представлены в нескольких разновидностях, в зависимости от формы их элементов. Мы используем прямоугольную сетку, ее элементы это прямоугольники. Мы обращаемся к каждому элементу -

"нано-подкомпонент". Понятно, что каждый нано-подкомпонент будет состоять из нескольких атомов и число атомов будет отличаться для различных нано-подкомпонентов. Отметим, что другие структурированные сетки также могут быть использованы, мы применяем прямоугольную сетку только для иллюстрации нашего метода. Основная цель - это убедиться, что атомы в нано под-компонентах в большей степени связаны, чем атомов между нано-подкомпонентами. Для каждого нано-подкомпонента, предположим, что существует скрытый фактор, который вызывает объединение среди атомов этого нано-подкомпонента и зависимые от этого фактора, атомы ведут себя независимо друг от друга. Копула используется для моделирования зависимости между каждым атомом нано подкомпонента и его скрытым фактором. Учитывая структуру нано-подкомпонента, например, последовательная, параллельная или  $m1$ –из– $m$  структур и совместного распределения атомов, представляющих этот нано-подкомпонент, вычислим надежность (или вероятность отказа) для нано-подкомпонента. В целом, системы с последовательной структурой функций, если и только если каждый из компонентов функций системы с параллельной структурой, если по крайней мере одна из функции компонента это система с  $m1$ –из– $m$  структурой функции. Следует отметить, что атомы компонентов "функции" означает, что атом не смещается [9].

Для того чтобы смоделировать совместное распределение для атомов, в каждом нано подкомпоненте, предположим, что существует скрытый фактор в каждом нано подкомпоненте и зависимость между каждым распределением атомов и связанным с ним скрытым фактором моделируется двумерная копула.

Шаг 2. Предположим, что начиная с шага 1, мы имеем  $N_1$  нано-подкомпонентов. Мы назовем эти  $N_1$  нано-подкомпоненты как 1-й этап нано-подкомпонентов. Обозначения  $N_i$  используется в качестве количества обозначения его стадии нано подкомпонента ( $i = 1, 2, \dots$ ). Эти нано-подкомпоненты играют роль атомов, снова накладывается прямоугольная

сетка, где элементы прямоугольники. На этом этапе каждый элемент состоит из нескольких нано-подкомпонентов, которые связаны через скрытый фактор. Мы используем копулу снова, моделируем зависимость между каждым нано-подкомпонентом этого элемента и связанного с ним скрытого фактора. После завершения этого шага, получим надежность (или вероятность отказа) каждого элемента. Повторив шаг 2, чтобы получить 2-ую, 3-ю, ..., фазы нано подкомпонентов, пока в конечном итоге с ситуацией, когда есть только один элемент в нашей структурированной сетке. На данном этапе мы вычисляем надежность (вероятность ошибки) этого элемента, которая равна надежности (вероятности ошибки) в нано компоненте. Этот подход называется «увеличение поля зрения».

**В четвертом разделе** мы вычисляем надежность нано компонента, имеющего структуру последовательную, параллельную или последовательно-параллельную [10].

**В пятом разделе** мы изучаем язык программирования R-code [11].

В последние годы в мире он набирает популярность, язык программирования R вошел в группу основных языков, используемых специалистами по статистике.

**В шестом разделе** мы применяем теорию копул для расчета надежности нанокompонента на примере.

Рассмотрим нанокompонент, имеющий 100 атомов в  $6 \times 6$  нм сетке. Мы накладываем структурированную сетку над исследуемой областью нано структуры (элементы сетки прямоугольники).

То есть, исходя из физического расстояния, разобьем нанокompонент на 32 нано-подкомпонента. Таблица 1 показывает число атомов в каждом нано-подкомпоненте (в таблице показано чисто атомов только для 16 нано-подкомпонентов). Для каждого нано-подкомпонента мы используем копулу, чтобы смоделировать зависимость между каждым атомом и связанным с ним скрытым фактором в нано-подкомпоненте. На этом этапе мы присвоили  $\theta_0$ , исследовали зависимости между каждым атомом и его скрытым фактором.

Используя методы, описанные в теоретической части, мы можем вычислить вероятность отказа для каждого нано-подкомпонента.

Мы делим 32 нано-подкомпонента на 8 групп, часть из них иллюстрируются на рисунке 1. Если мы предположим, что 32 нано-подкомпонента это 1-й этап нано-подкомпонента, то 8 нано-подкомпонентов в 3 фигуре рисунка 1 будет 2-ым этапом нано-подкомпонентов. Когда мы имеем дело со 2-м этапом нано-подкомпонентов, мы используем копулу с параметрами  $\theta_1$ , чтобы смоделировать зависимость между каждым атомом из 1-го этапа нано-подкомпонентов и связанных с ним скрытых факторов. Затем мы рассчитываем вероятность отказа для каждого из 8 нано-подкомпонентов 2-го этапа. Наконец, как показано на четвертой фигуре рисунка 1, мы используем копулу с параметрами  $\theta_2$  моделируем зависимость между каждым из 8 нано-подкомпонентов 2-го этапа и соответствующих скрытых факторов.

Таблица 1 — Количество атомов на каждом 1-м этапе нано-подкомпонента

№ под-компонента	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16...
Кол-во атомов	2	3	3	1	3	3	3	3	4	4	0	6	3	3	4	5....

Используя коды R, мы можем рассчитать вероятность выхода из строя какого-либо нано компонента при 3-ух различных структурах, а именно, последовательной и последовательно-параллельной структур, где последовательно-параллельная структура означает, что каждый 1-й этап нано-подкомпонента имеет последовательную структуру и все другие этапы нано-подкомпонента имеют параллельную структуру. Некоторые иллюстративные результаты приведены в Таблице 2.

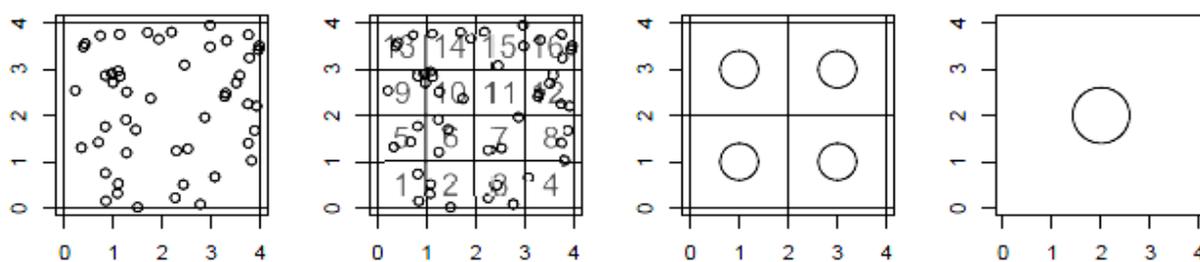


Рисунок 1 — Шаги для системы с 100 атомами (здесь пропущен этап, где мы делим структуру на 32 группы) [8]

Таблица 2 — Пример полученных вероятностей отказа для наших структур.

$\rho_0$	$\theta_0$	$\theta_1$	$\theta_2$	Последовательный	Параллельный	Последовательно-параллельный
0,01	0,3	0,7	0,99	0,3365902	$2,747741 \times 10^{-15}$	$1,747741 \times 10^{-12}$
0,1	0,3	0,7	0,99	0,3197178	$1,747741 \times 10^{-12}$	$1,747741 \times 10^{-12}$
0,3	0,3	0,7	0,99	0,2389942	$3,699601 \times 10^{-13}$	$6,699601 \times 10^{-12}$

**В седьмом разделе** мы проводим исследование надежности наноструктур с различными параметрами.

Используя методику из предыдущего раздела рассчитаем вероятность отказа всей системы при различных вероятностях отказа для каждого атома при параллельной, последовательной и последовательно-параллельной структур, содержащих 50, 75, 100 и 150 атомов с сеткой  $8 \times 8$  нм.

Затем мы меняем «силу взаимосвязности» элементов системы для выяснения влияния этих параметров на вероятность отказа нанокompонента.

Потом рассмотрим нанокompонент, имеющий 100 атомов в  $8 \times 8$  нм сетке. Из исследуемой области мы случайным образом вынимаем некоторое количество атомов. Мы вынимаем атомы из структуры, учитывая данный факт, считаем вероятность отказа с помощью копулы.

**Заключение.** В ходе выполнения бакалаврской работы проведен анализ современного состояния теории копул, исследованы подходы и понятия теории «копул».

В бакалаврской работе была предложена методика оценки надежности, основанная на понятии «копула», а также методология для моделирования

взаимосвязей между атомами нанокompонента. Для моделирования зависимости мы использовали параметры определяющие влияние состояния системы на ее надежность: скрытый фактор, «сила взаимосвязности» элементов системы, вероятность «выпадения» элемента из системы.

В результате выполнения работы были получены следующие результаты:

1. Изучен язык программирования R-code, который является эффективным инструментом статистического программного обеспечения для анализа данных и прогнозирования надежности;

2. Предложен подход позволяющий оценить поведение надежности наносистем, имеющих различную структуру:

- разработана программа в R-code, позволяющая моделировать вероятность выхода из строя наносистемы, зависящая от вероятности отказа каждого атома и заданных параметров модели (количество атомов в наноструктуре, количества удаляемых атомов из нанокompонента и параметров  $\theta_0, \theta_1, \theta_2$  );

- для параллельной структуры, чем больше количество атомов в нанокompоненте, тем меньше вероятность выхода из строя всей системы, она постепенно возрастает от 0 до 1.

- Для последовательной и параллельно-последовательной структур, с увеличением числа атомов увеличивается вероятность выхода из строя всей системы при меньшей вероятности отказа для каждого атома, у последовательной структуры идет резкое возрастание вероятности от 0 до 1, у параллельно-последовательной плавное возрастание от 0 до 0,9. Следовательно самая высокая надежность у нанокompонента с параллельной структурой;

3. Исследовано состояние наносистем на основе предложенной методологии. Оценивалось поведение надежности наносистем в зависимости от количества участвующих атомов в процессе их жизнедеятельности. Исследовано три вида наносистем, состоящих из 100 атомов. В процессе

жизнедеятельности наносистема случайным образом теряет известную часть атомов (от 20 до 80), входящих в структуру и ее предельная работоспособность изменяется, что влияет на общую надежность системы. Для наносистемы, имеющую параллельную структуру, наблюдается незначительное изменение вероятности выхода из строя системы, значения малозначимы (от  $1,70E-14$  до  $1,04E-12$ ). Для наносистемы с последовательной структурой, следующее, при увеличении числа атомов, вынимаемых из системы, вероятность выхода из строя системы постепенно уменьшается в интервале от 0,35 до 0,13. Для наносистемы, имеющую смешанную структуру, при увеличении числа атомов, вынимаемых из системы, вероятность малозначительна, изменяется в диапазоне от  $9,21E-13$  до  $2,6E-12$

#### **Список использованных источников**

- 1 Joe, H. Multivariate Models and Dependence Concepts / H. Joe // Monographs on Statistics and Applied Probability. 1997. Т.73, №1. С. 1-25.
- 2 Фантаццини, Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций / Д. Фантаццини // Прикладная экономика. 2011. Т. 22. № 2. С. 98-134.
- 3 Фантаццини, Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций / Д. Фантаццини // Прикладная экономика. 2011. Т. 23, № 3. С. 98-132.
- 4 Фантаццини, Д. Моделирование многомерных распределений с использованием копула-функций / Д. Фантаццини // Прикладная экономика. 2011. Т, 24. № 4. С. 100-130.
- 5 Sklar, A. Fonctions de repartition an dimensions et leurs marges / A. Sklar. Paris: Publ. Inst. Statist, 1959. 229 с.
- 6 Благовещенский, Ю.Н. Основные элементы теории копул / Ю.Н. Благовещенский // Прикладная экономика. 2012. Т. 26, № 2. С. 98-134.

7 Mai, J-F. Simulating copulas. Stochastic models, sampling algorithms, and applications / J-F. Mai, M. Scherer. London: Series in Quantitative Finance, 2012. 310 с.

8 Patton, A.J. Applications of Copula Theory in Financial Econometrics / A.J. Patton. SanDiego: PhDThesis, 2002. 91 с.

9 Luo, X. The t copula with multiple parameters of degrees of freedom: bivariate characteristics and application to risk management / X. Luo, P.V. Shevchenko // Quantitative Finance. 2010. Т. 9, № 10. С. 1039-1054.

10 Ebrahimi, N. Assessing the reliability of a nanocomponent by using copulas / N. Ebrahimi, L. Hua // J. Appl Probab. 2013. Т. 48, № 1. С. 31-42.

11 Язык R: из учебной лаборатории — в мир больших данных [Электронный ресурс] // Открытые системы СУБД [Электронный ресурс] : [сайт]. URL <http://www.osp.ru/os/2012/04/13015768/> (дата обращения 30.05.2017) Загл. с экрана. Яз.рус.