Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ПРОДУКТА ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЬНОГО ИНВЕСТИРОВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 451 группы
направления 38.03.05 — Бизнес-информатика
механико-математического факультета
Гусак Валерии Михайловны

Научный руководитель
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Заведующий кафедрой
д. ф.-м. н. ______________ С. П. Сидоров

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования. В современном мире фондовый рынок - один из самых популярных вариантов вложения капитала, предоставляющий возможность получать внушительную прибыль, и, что немаловажно, обладающий высокой ликвидностью, которая дает возможность оперативно совершать их покупку и продажу, и это выгодно отличает фондовый рынок от, например, рынка нефти.

Инвестирование и вложения в рынок ценных бумаг зачастую сравнивают с игрой в казино. Существует множество разнообразных финансовых инструментов, с помощью которых инвесторы могут создавать на основе различных активов портфели с целью увеличения эффективности управления активами и снижения риска потери вложенных денег. Во второй половине XX столетия появилась теория диверсификации. Диверсификация портфеля ценных бумаг – это внедрение определенных инвестиционных стратегий в операции с ценными бумагами, где преследуется цель избежать существенных убытков в случае снижения цен одной или нескольких бумаг.

Впервые научное обоснование целесообразности диверсификации инвестиционного портфеля показал Гарри Марковиц более 50 лет назад в своей статье "Выбор портфеля". Он создал математическую модель формирования оптимального инвестиционного портфеля и предложил конкретные методы построения портфелей при наличии определенных условий.

Работа посвящена задаче оптимального портфельного инвестирования. Основная задача портфельного инвестирования [1] состоит в том, что необходимо улучшить условия инвестирования, придав совокупности ценных бумаг такие инвестиционные характеристики, которые недостижимы с позиции отдельно взятой ценной бумаги, и возможны только при их комбинации.

Цель работы. Разработка программного продукта для решения задачи выбора оптимального портфеля.

Объект исследования. Минимизация возможных рисков портфельного инвестирования.

Предмет исследования. Модели, использующие несколько мер риска.

Задачи. Для достижения поставленной цели необходимо решить следующие задачи:

— изучить различные модели портфельной оптимизации;

- изучить язык программирования высокого уровня AMPL;
- реализовать на языке AMPL модели для решения задач портфельной оптимизациии.

Основное содержание работы

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух теоритических и одной практической части, заключения, списка использованных источников.

В введении дается общая характеристика работы: актуальность, цель, задачи.

В первой главе дается определение оптимального инвестиционного портфеля, ставится задача выбора оптимального портфеля, рассматриваются модели Марковица, CVaR и величина VaR.

Во второй главе описываются модели, использующие несколько мер риска, в частности, модель mean-variance-CVaR (MVC), в которой рассматривается многокритериальная задача оптимизации с тремя критериями: среднее значение доходности, дисперсия доходности, значение условного Value-at-Risk (CVaR).

В третьей главе содержится краткое введение в AMPL. Приведены начальные сведения о синтаксисе языка и реализация моделей, описанных в первых двух главах.

В заключении содержатся выводы о проделанной работе.

В первой главе "Модели, основанные на одной мере риска" дается определение оптимального инвестиционного портфеля, ставится задача выбора оптимального портфеля и рассматриваются, модели использующие одну меру риска, а именно:

— **Модель Марковица (Mean–Variance)**

Пусть n есть число активов в портфеле. Портфель x представляется как вектор долей активов $x = (x_1, \ldots, x_n)$, сумма которых равна единице: $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$ (бюджетное ограничение). В модели Марковица [2], которую еще называют моделью Mean–Variance («математического ожидания–дисперсии»), две скалярные величины прикреплены к каждой из случайных величин R_x и R_y: среднее ожидаемое значение доходности портфеля, $E(R_x)$ и $E(R_y)$ и значение меры риска портфеля, $\rho(R_x)$ и $\rho(R_y)$. Выбор делается в пользу компромисса между средней величиной доходности, у которой предпочтительней большее значение, и риском, у которого предпочтительней наименьшее значение.

В данном подходе с мерой риска ρ случайная величина R_x предпочтительнее случайной величины R_y в том случае, если

$$E(R_x) \geq E(R_y), \rho(R_x) \leq \rho(R_y) \tag{1}$$

с хотя бы одним строгим неравенством. При этом будем говорить, что портфель x лучше портфеля y.

В этом случае портфель x (доходностью которого является случайная величина R_x) будет эффективным тогда и только тогда, когда не существует ни одного портфеля y (доходность которого есть случайная величина R_y), такого, что R_y имеет большее математическое ожидаемое значение $E(R_y)$ и меньшее значение меры риска $\rho(R_y)$. Это означает, что для заданного уровня минимальной ожидаемой доходности R_x портфель имеет наименьшее значение возможного риска, а для заданного значения риска мы получаем наивысшую возможную ожидаемую доходность. Чтобы найти эффективный инвестиционный портфель, мы должны решить следующую оптимизационную задачу:

$$\rho(R_x) \to \min, \tag{2}$$

$$E(R_x) \geq d, \tag{3}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in X, \tag{4}$$

где d — желаемый уровень ожидаемой доходности портфеля. Обозначим минимальное и максимальное значения среди величин доходностей активов d_{min} и d_{max} соответственно. Варьируя значение параметра d в промежутке $[d_{min}, d_{max}]$ и решая получающиеся оптимизационные задачи, для каждого значения d находим минимальный риск портфеля и вектор значений $x = (x_1, ..., x_n)$. Совокупность последних составляет набор эффективных портфелей. Отображая соответствующие значения целевой функции ρ и ожидаемой прибыли E на декартовой плоскости, на оси абсцисс которой стоят значения дисперсии доходности портфеля, а на оси ординат — его математическое ожидание, получаем эффективную границу (фронт, efficient frontier). Задача может быть сформулирована в эквивалентном виде:

$$E(R_x) \to \max, \tag{5}$$

$$\rho(R_x) \leq \rho_0, \tag{6}$$

$$x = (x_1, ..., x_n) \in X, \tag{7}$$

где ρ_0 — приемлемый для инвестора уровень риска. В данном случае построение эффективной границы возможно путем варьирования величины риска и нахождения максимальной доходности.

— **Value-at-Risk**

Пусть R_x – случайная переменная, выражающая доходность портфеля x за некоторый временной период, $A = \alpha \in (0, 1)$ – процент «наихудших» случаев получения прибыли R_x (т.е. неприемлемых с точки зрения инвестора). Значения α, близкие к 0, представляют для нас интерес (например, $\alpha = 0.01 = 1\%$ или $\alpha = 0.05 = 5\%$).

Вычисленное значение Value-at-Risk (VaR) при заданном уровне α случайной величины R_x (или портфеля x) показывает, что с вероятностью, по крайней мере $(1\%\alpha)$, потенциальные убытки не превзойдут величину VaR за указанный временной период. В то же время вероятность того, что потенциальные потери превзойдут VaR, строго больше α. Математически величина VaR с уровнем α величины R_x определяется с использованием понятия α-квантиля.

Хотя величина VaR [3] широко используется на финансовых рынках для оценки риска портфеля, она имеет несколько нежелательных свойств. Она не является субаддитивной мерой риска, что означает, что риск портфеля может быть больше суммы отдельных рисков входящих в него активов. Кроме того, величина VaR не является выпуклой по отношению к выбору портфеля x, поэтому ее трудно оптимизировать с использованием стандартных доступных методов. Выпуклость играет важную роль в решении задач оптимизации. Так, для выпуклых функций локальный минимум является глобальным.

— **Модель CVaR**

Пусть R_x, как и в ранее рассмотренном случае, обозначает случайную величину доходности портфеля x за данный временной период, и $A\% == \alpha \in (0, 1)$ — процент «наихудших» случаев значений прибыли R_x (обычно $\alpha = 0.01 = 1\%$ или $\alpha = 0.05 = 5\%$). Определение величины CVaR при заданном уровне α является математическим ожиданием убытков в худших $A\%$ случаев, где под «убытками» понимаются нежелательные с точки зрения инвестора значения доходности R_x, которые выражаются случайной величиной —

R_x. Величина CVaR приблизительно соответствует средним убыткам, которые превосходят или равны величине VaR (при том же уровне α); в некоторых случаях может достигаться равенство этих величин. Если существует единственное число r такое, что $P(R_x \leq r) = \alpha$, задача упрощается: VaR является отрицательным r, а CVaR — возможные убытки — больше VaR. Это всегда так, когда R_x — непрерывная случайная переменная. В случае нескольких возможных значений r, таких что $P(R_x \leq r) = \alpha$, CVaR является условным математическим ожиданием убытков за пределами границы VaR. В случае если не существует числа r такого, что $P(R_x \leq r) = \alpha$, рассматривается α-квантиль $q^\alpha(R_x)$. Тогда $P(R_x \leq q^\alpha(R_x)) > \alpha$ и вероятность $P(R_x \leq q^\alpha(R_x)) - \alpha$, соответствующая квантилю $q^\alpha(R_x)$, получается из условного математического ожидания значения величины R_x, расположенного ниже α-квантиля.

Вторая глава «Модели, основанные на нескольких мер риска»

— Модель Mean-Variance- Skewness

Модель основана на использовании следующих критериев: математического ожидания, дисперсии и асимметрии доходности портфеля. Модель подробно была рассмотрена в работе Х. Конно и К. Сузуки [4]. Пусть, как и ранее, случайная величина R_j есть доходность актива $j, j == 1, ..., n, X = x = (x_1, ...x_n) \in R_n : \sum x_i = 1, x_i \geq 0$.

Доходность $R(x)$ портфеля $x \in X$ определяется как

$$R(x) = \sum_{j=1}^{n} R_j x_j. \tag{8}$$

Математическое ожидание доходности портфеля имеет вид

$$E[u(R(x))] = u(r(x)) + \sum_{k=1}^{\infty} u(k)(r(x))E[(R(x) - r(x))^k/k!] \tag{9}$$

и дисперсия

$$V[R(x)] = E\left[\left(\sum_{j=1}^{n}(R_j - r_j)x_j\right)^2\right] = E\left[\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(R_j - r_j)(R_k - r_k)x_j x_k\right] =$$

$$= \sum_{t=1}^{T} p_t \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(r_{tj} - r_j)(r_{tk} - r_k)x_j x_k = \sum_{t=1}^{T} p_t \left(\sum_{j=1}^{n}(r_{tj} - r_j)x_j\right)^2 \tag{10}$$

— **Модель Mean-Variance-CVaR**

Мы рассматриваем модель выбора, связанную с риском, модель M–V–CVaR, в которой желаемое отношение между случайными величинами определяется следующим образом [5]: в модели M–V–CVaR случайная величина R_x предпочтительней случайной величины R_y (соответственно портфель x предпочтительней портфеля y) тогда и только тогда, когда:

$$E(R_x) \geq E(R_y), \tag{11}$$

т.е. ожидаемое значение доходности портфеля x не менее ожидаемой доходности портфеля y;

$$\sigma^2(R_x) \leq \sigma^2(R_y), \tag{12}$$

т.е. стандартное отклонение доходности портфеля x не более стандартного отклонения доходности портфеля y;

$$CVaR_\alpha(R_x) \leq CVaR_\alpha(R_y), \tag{13}$$

с как минимум одним строгим неравенством. Таким образом, не доминирующие эффективные по Парето решения модели M–V–CVaR есть эффективные решения многокритериальной задачи оптимизации, в которой ожидаемое значение доходности максимизируется, в то время как стандартное отклонение (риск) и CVaR минимизируются:

$$(E(R_x), -\sigma^2(R_x), -CVaR_\alpha(R_x)) \to \max_{x \in X} \tag{14}$$

Для иллюстрации эффективных решений модели в пространстве (среднего значения–отклонения–CVaR) необходимо построить поверхность, так называемую «эффективную границу» модели Mean–Variance–CVaR.

В третьей главе «Выбор оптимального инвестиционного портфеля» представлено краткое введение в AMPL, приведены начальные сведения о синтаксисе языка, приведен принцип реализации моделей, описанных в предыдущих глава. Разработан програмный продукт, представляющий собой библиотеку подпрограмм и функций на языке AMPL, предназначенный для для решения задач оптимального портфельного инвестирования, описанных в предыдущих разделах. Также на основе входных численных значений параметров был осуществлен расчет по нахождению структуры оптимального портфеля, построены графики ожидаемой доходности портфелей ценных бумаг. На основе полученных результатов сделан вывод: большему значению ожидаемой доходности инвестиций соответствует и большее значение риска вложений, значит, чтобы получить высокий доход, инвестор должен принимать и высокий уровень риска, либо получить небольшой доход, и при этом уровень риска будет принимать минимальное значение.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В выпускной квалификационной работе рассмотрены задачи оптимизации инвестиционных портфелей на основе двух и трех статистических величин. Реализованы модели для решения задачи многокритериальной портфельной оптимизации на ЭВМ на языке программирования высокого уровня AMPL.

В процессе выполнения работы на языке программирования высокого уровня AMPL было использовано его достоинство, состоящее в том, что его синтаксис подобен математической записи задач оптимизации, что делает его удобным средством для решения оптимизационных задач, так как дает возможность описать сложные модели оптимизации с различными логическими условиями, с использованием сложных систем индексации переменных и ограничений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1 *Куликов, А.* Деньги, кредит, банки / А. Куликов. — М.: Кнорус, 2009. — 656 pp.

2 *Markowitz, H. M.* Portfolio selection / H. M. Markowitz. — J. Finance. 1952. Vol. 7. — 77-91 pp.

3 *Лобанов, А. А.* Энциклопедия финансового риск-менеджмента / А. А. Лобанов, А. В. Чугунов. — М.: Альпина Паблишер, 2003. — 785 pp.

4 *Konno, H.* A mean-absolute deviation-skewness portfolio optimisation model / H. Konno, H. Shirakawa, H. Yamazaki. — Ann. Oper. Res., 1993. — Vol. 45. — Pp. 173–187.

5 *Сидоров, С. П.* Модели оптимального портфельного инвестирования / С. П. Сидоров, Е. А. Захарова, А. А. Хомченко, Н. П. Гришина. — Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2015. — 76 pp.