

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической экономики

**АВТОМАТИЗАЦИЯ РАСЧЁТА VALUE AT RISK ПОРТФЕЛЯ ЦЕННЫХ  
БУМАГ С ПОМОЩЬЮ КОПУЛА-ФУНКЦИЙ**  
АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 451 группы  
направления 38.03.05 - Бизнес-информатика  
механико-математического факультета  
Малинского Александра Игоревича

Научный руководитель  
д. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

В. А. Балаш

Заведующий кафедрой  
д. ф.-м. н.

\_\_\_\_\_

С. И. Дудов

Саратов 2017

## ВВЕДЕНИЕ

**Актуальность темы исследования.** Данная работа посвящена разработке программного продукта для автоматизации расчета Value at Risk портфеля ценных бумаг на основе модели копула. Копула позволяет рассмотреть совместное вероятностное распределения нескольких случайных величин.

Актуальность данной задачи обуславливается тем, что эксперты базельского комитета рекомендуют использовать метод копул для корректного агрегирования рисков при инвестициях.

Инвестиционная деятельность представляет собой один из наиболее важных аспектов функционирования любой коммерческой организации. Причинами, обуславливающими необходимость инвестиций, являются обновление имеющейся материально-технической базы, наращивание объемов производства, освоение новых видов деятельности.

Значение экономического анализа для планирования и осуществления инвестиционной деятельности трудно переоценить. При этом особую важность имеет предварительный анализ рисков, который проводится на стадии разработки инвестиционных проектов и способствует принятию разумных и обоснованных управленческих решений.

Современный этап развития международного финансового сообщества выдвигает проблему управления рисками в число самых приоритетных. Более того, не без оснований можно утверждать, что в постоянно усложняющемся и взаимозависимом мире финансовых рынков и продуктов шанс на успех имеют только те организации, которые могут контролировать свои риски и эффективно ими управлять.

Однако не менее важной проблемой является изучение зависимостей котировок ценных бумаг и разработка методов прогнозирования их стоимости. Актуальность столь большого числа исследований рынка ценных бумаг вполне обоснована тем, что этот рынок развивается очень динамично. По динамике основных фондовых индексов часто судят об экономической ситуации в стране, так как считается, что фондовые индексы служат показателями текущей хозяйственной конъюнктуры экономики и отражают реакцию деловых кругов на различные экономические и политические события.

Актуальность определила выбор **темы** данной работы: «Автоматизация расчёта Value at Risk портфеля ценных бумаг с использованием копула-

функций».

**Цель работы:** знакомство с копула-функциями, их свойствами, классификацией, а также методика их применения к финансовым данным.

**Объект исследования:** финансовый рынок.

**Предмет исследования:** динамика активов и совокупность процессов, протекающих на финансовом рынке.

Для достижения поставленных целей в работе необходимо решить следующие **задачи**:

- 1) рассмотреть основные семейства копул;
- 2) рассмотреть методы оценки копул и измерения качества копула-моделей;
- 3) сформировать математическую интерпретацию задачи;
- 4) описать программный продукт для расчета Value at Risk портфеля ценных бумаг;
- 5) рассчитать Value at risk портфеля ценных бумаг с использованием разработанного программного продукта.

**Теоретико-методологической основой исследования** явились работы, раскрывающие сущность финансового рынка, и рекомендации по использованию копула-функций (Долматов А. С., Канторович Г. Г., Пеникас Г. И., Фантаццини Д.).

Для решения поставленных задач были использованы следующие теоретические методы исследования: изучение источников, теоретический анализ, обобщение литературных данных, математическая обработка данных.

**Научная новизна исследования** заключается в следующем:

- 1) разработан программный продукт для автоматизации расчета Value at Risk портфеля ценных бумаг;
- 2) выявлено, что копула-функции дают результат по подсчету Value at Risk точнее, чем обыкновенная эконометрическая модель;
- 3) проанализирован выбор копула-функции, предоставляющей наиболее достоверные результаты.

**Практическая значимость** проводимой работы заключается в разработке программного продукта для автоматизации расчета Value at Risk портфеля ценных бумаг.

## **Основное содержание работы.**

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, одной теоретической и одной практической главы, заключения и списка использованных источников.

**Введение** содержит основные положения: статистически подкреплённую актуальность темы исследования; цель, объект, предмет, задачи исследования; практическую значимость исследования.

**Первая глава «Обзор моделей копула»** описывает теоретические основы копулярного моделирования. В первом параграфе даны соответствующие определения, свойства и теоремы.

Копула-функция — это такая функция, которая, с использованием знания об одномерных частных распределениях, позволяет получить многомерную функцию распределения, поскольку функция распределения случайного вектора полностью описывает его вероятностную структуру, куда, в частности, входит структура зависимости его компонент. Копула-функции дают возможность разделить описание распределения случайного вектора на две части: частные распределения компонент и структура их зависимостей.

Во втором параграфе рассмотрена классификация копула-функций.

Все копулы можно отнести к трем семействам: эллипсообразные (гаусовская, или нормальная; Стюдента), архимедовы (Франка, Клейтона) и копулы экстремальных значений (Коши, Гумбеля, Али-Микаэля-Хака). Мы рассмотрим только первые два семейства.

Класс эллиптических распределений включает, главным образом, класс симметричных распределений, который весьма популярен в актуарной математике, страховании и финансах. Этот класс включает интересные примеры многомерных распределений, и многие из них имеют некоторые общие свойства с многомерным нормальным распределением. Они позволяют моделировать многомерные экстремальные события, формируя зависимость, не совпадающую с зависимостью многомерного нормального распределения, и использовать распределение с большим эксцессом, чем эксцесс нормального распределения. Кроме того, с их помощью можно моделировать феномен «тяжелых хвостов», который часто наблюдается для финансовых данных.

Архимедовы копула-функции обеспечивают аналитическую гибкость и широкий спектр различных мер зависимости. По следующим причинам эти

копула-функции могут быть использованы в широком диапазоне приложений:

1) Архимедовы копула-функции могут быть представлены в явном аналитическом виде, в отличие от семейства эллиптических копула-функций, которые определяются в неявной форме.

2) Архимедовы копула-функции допускают относительно простое построение, включая вычислительную реализацию.

3) Многие параметрические семейства копула-функций принадлежат этому классу.

4) Архимедовы копула-функции не ограничены обязательным наличием радиальной симметрии, что свойственно случаю нормальной копула-функции или общему случаю эллиптических копула-функций. Это является преимуществом, т. к. во многих финансовых и страховых приложениях наблюдается более сильная зависимость между большими убытками, чем между большими доходами.

В третьем параграфе описаны методы нахождения параметров копула-функций, а также оценки модели в целом.

Различают три основных класса методов оценки копул: параметрические, полупараметрические и непараметрические.

Параметрический класс методов предполагает параметризацию как частных распределений, так и копулы. Если базовый подход MLE (Maximum Likelihood Estimation) предполагает максимизацию функции правдоподобия одновременно по частным распределениям и по копуле, то метод «от маргиналов» (Inference for Margin – IFM) предполагает два этапа оценки: вначале – параметризация частных функций распределения, затем – копулы.

Полупараметрические методы также предполагают двухэтапную оценку копулы. Но на первом этапе вместо оценки частных функций распределения используется эмпирическое распределение. На втором же этапе происходит параметрическая оценка копулы.

Доказано, что полупараметрический метод дает более состоятельные и устойчивые оценки, чем параметрические методы в случаях, когда вид частного распределения не известен и, как следствие, возникает угроза их неверной спецификации.

Среди непараметрических методов оценки копул можно выделить подходы на основе оценки эмпирической копулы и ядерных оценок. Первый подход

предполагает оценки функции распределения эмпирической копулы, которая отражает количество случаев, когда исходы случайных величин одновременно попали в выбранную ячейку сетки разбиения всего множества вероятностного пространства.

Что касается измерения качества оценки копулы, то наиболее распространенным критерием выбора оптимальной копулы является критерий на основе значения функции максимального правдоподобия – критерии Акаике (AIC) и Шварца (BIC). Эти критерии получили широкое распространение и были использованы во множестве работ по применению копул. Но в силу того, что использование этих критериев предполагает одинаковость функциональной формы моделей, отличающихся числом переменных, данный подход считается методологически некорректным.

Ещё один метод - это метод оценки дистанции до эмпирической копулы. Данный тест позволяет проверить, не состоит ли многомерное распределение из независимых случайных величин. Если нулевая гипотеза подтверждается, то совместное распределение моделируется независимой копулой. Если же гипотеза отклоняется, проводится анализ структуры зависимости пар двумерных наборов данных с помощью теста Крамера-фон-Мизеса. Этот тест основан на сопоставлении значений двух эмпирических копул, что позволяет сравнить их структуру зависимости.

**Во второй главе «Разработка программного продукта для расчета Value at Risk портфеля ценных бумаг»** описывается практическая реализация программного продукта для автоматизации расчета Value at Risk портфеля ценных бумаг.

В первом параграфе дана математическая интерпретация рассматриваемых моделей, написан алгоритм их действия.

Многие копулы могут отражать зависимость не только двух, но сразу нескольких величин. Это широко используется на финансовых рынках при оценке портфеля, состоящего из нескольких активов, имеющих взаимосвязь не всегда линейного вида. Однако при выборе данных копул возникают вычислительные проблемы, т.к. расчеты необходимо проводить на  $n$ -мерном пространстве. Для преодоления этой проблемы был предложен интересный и вполне очевидный способ – мы разбиваем совместную копулу на набор двумерных копул.

Т.о. все многомерные копулы могут быть выражены как произведения парных копул и частных функций плотности распределения.

Тогда в проводимом эксперименте будем рассматривать четыре основные копула-функции двумерного вида:

- 1) копула Клейтона;
- 2) копула Гамбела;
- 3) Гауссова копула;
- 4) копула Стьюдента;

Как только мы определимся с порядком копул, необходимо понять, какие копулы использовать для определения связей. Будем использовать метод оценки графиков распределения совместных величин и сравнивать с известными копулами.

После того как мы решим, какие копулы использовать в парных связях, нам нужно определить их параметры. Это делается численным методом максимального правдоподобия

После того как мы найдем параметры копул, которые максимизируют логарифмическую функцию правдоподобия, мы можем приступить к генерации случайных величин, которые имеют такую же структуру взаимосвязей, как и наши начальные данные (используем параметры, которые получили при помощи алгоритмов оценки модели и генерируем  $n$  переменных, прогоняем данный алгоритм  $T$  раз и получаем матрицу  $T \times n$ , данные в которой имеют такой же паттерн взаимосвязей, как и исходные данные).

Далее в практическом примере нам понадобятся понятия Value at risk и GARCH(1,1)-модель.

Value at risk - это выраженная в данных денежных единицах оценка максимальных ожидаемых, в течение данного периода времени, с данной вероятностью, потерь данного портфеля под воздействием рыночных факторов риска

Однако мы будем рассматривать в качестве данных не цены закрытия ценных бумаг, а их логарифмы доходностей, что влечет за собой отсутствие «ценовой» характеристики Value at Risk, поэтому будем строить максимально ожидаемые потери не в денежном эквиваленте, а в относительном, примененном к модели.

Модель общей авторегрессивной условной гетероскедастичности Бол-

лерслева (GARCH) ограничивает условную переменную временного ряда зависимостью от квадратов остатков предыдущего временного периода.

Во втором параграфе рассматривается описание программно продукта, присутствует техническое задание, приводится программный код.

Затем, в третьем параграфе, приведены результаты тестирования программного продукта и сделаны соответствующие выводы.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе приведено математическое толкование риска, как среднеквадратичное отклонение случайной величины, которая является величиной доходности актива.

Представлено понятие Value at Risk (VaR), как величину, выраженную в данных денежных единицах, оценки максимальных ожидаемых в течение данного периода времени с данной вероятностью потерь данного портфеля под воздействием рыночных факторов риска.

Показано, что это понятие имеет широкое применение среди профессиональных участников рынка ценных бумаг, т.к. подразумевает, что риски переоцениваются ежедневно с высоким доверительным уровнем по выборке, объем которой значительно превышает один день. Это допущение позволяет пренебрегать ошибкой выборки из-за незначительности ее влияния на конечный результат.

Сделан вывод, что активы, находящиеся в инвестиционном портфеле, часто имеют не просто линейную корреляцию, а более сложные типы взаимосвязи. И соответственно методика вычисления VaR меняется. Для подобных ситуаций в данной работе был изучен инструментарий копулярного моделирования, который позволяет рассматривать многомерные распределения нескольких случайных величин. Даны определение копула-функций и их свойства. Были рассмотрены основные семейства копул и изучены методы построения и оценивания копулярных моделей.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Долматов А. С. Математические методы риск-менеджмента, М. – «Эк-замен», 2007. С. 12-45.
2. Дудов С.И. Оптимальное портфельное инвестирование, СГУ – мех-мат, 2008.
3. Канторович Г. Г. Анализ временных рядов // Экономический журнал ВШЭ, 2002. № 1 (с. 85–116); № 2 (с. 251–272); № 3 (с. 379–401); № 4 (с. 498–523).
4. Пеникас Г. И. Модели "копула" в задачах хеджирования ценового риска // Прикладная эконометрика. 2011. № 2. С. 3-21.
5. Пеникас Г. И. Модели «копула» в управлении валютным риском банка // Прикладная эконометрика. 2010. Т. 17. № 1. С. 62-87.
6. Фантаццини Д. Эконометрический анализ финансовых данных в задачах управления риском // Прикладная эконометрика. № 2 (10). 2008, С. 91 – 137; № 3 (11), 2008, С. 87 – 122; № 4 (12), 2008, С. 84 – 138.
7. Бродский Б. Е., Пеникас Г. И., Сафарян И. А. Обнаружение структурных сдвигов в моделях копул // Прикладная эконометрика, 2009. Т. 16. № 4. С. 3–15.
8. Пеникас Г. И., Симакова В. Б. Управление процентным риском на основе копулы-GARCH моделей // Прикладная эконометрика, № 1 (13), 2009, стр. 3 – 36.
9. Алексеев В. В., Шоколов В. В., Соложенцев Е. Д. Логико-вероятностное моделирование портфеля ценных бумаг с использованием копул // Управление финансовыми рисками, №3, 2006, стр. 272 – 283.