Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

Метод математического моделирования в обучении математике учащихся 8-9 классов

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы

направления 44.03.01 – «Педагогическое образование (профиль – математическое образование)» механико-математического факультета

Аюповой Адэль Ринатовны

Научный руководитель
к.п.н., доцент ____________________________ Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент _____________________________ И. К. Кондаурова

Саратов 2017

Введение. Математическое моделирование является неотъемлемой частью математического метода познания действительности. Любая формула, любой график, граф, схема, чертёж – всё это математические модели объектов или процессов. Для любой текстовой задачи можно построить свою информационную модель, позволяющую определить процесс её решения, а в дальнейшем и математическую модель (аналитическую, графическую или геометрическую), позволяющую осуществить решение.

В условиях современного образования, ориентированного в числе прочего на развитие универсальных учебных действий, особое значение в обучении приобретает овладение процессом моделирования, поскольку оно способствует формированию обобщённых знаний.

Анализ действующего Федерального государственного образовательного стандарта основного (общего) образования (далее – ФГОС ООО) показал, что в числе основных результатов освоения школьной программы по математике у выпускников 9 класса должны присутствовать:

– формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления;

– умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

– развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах.

Таким образом, в ФГОС ООО подчеркивается особая роль математики в современной цивилизации и фактически обозначается проблема формирования у школьников представлений о научном методе познания средствами математики и о математическом моделировании как о методе решения задач практико-ориентированного и междисциплинарного характера.

Специальному анализу проблем математического познания, включая и вопросы математического моделирования, посвятили свои работы: И. А. Акчурин, Ю. В. Сачков, М.Ф. Веденов, Б.В. Бирюков и др.

Рассмотрению вопросов моделирования посвящены психолого-педагогические исследования Л. М. Фридмана, А. У. Варданяна, В. В. Давыдова, Б. А. Глинского и других.

В последнее время появились новые работы по теме математического моделирования В.С. Абатуровой, Е.М. Ложкиной, в которых говорится о применении этого метода на уроках математики в основной школе.

Всё выше изложенное обуславливает актуальность темы исследования.

Цель работы: описать теоретические аспекты метода математического моделирования и разработать средства обучения, в том числе с использованием информационно-коммуникационных технологий (ИКТ), для реализации прикладной направленности обучения математике учащихся 8-9 классов.

Задачи работы:

1. Охарактеризовать математическое моделирование как метод познания и как один из основных методов обучения математике.

2. Разработать задания для реализации прикладной направленности обучения математике учащихся 8-9 классов на основе задач-проблем.

3. Описать возможности ИКТ для визуализации математического моделирования на уроках математики в 8-9 классах (программа GeoGebra).

Методы исследования: изучение нормативных документов, анализ психолого-педагогической и методико-математической литературы; разработка методических материалов; компьютерное моделирование.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Метод математического моделирования как метод познания и метод обучения»; «Использование метода математического моделирования при реализации прикладной направленности обучения математике в 8-9 классах»); заключение; список использованных источников; два приложения.

Основное содержание работы. Первая глава «Метод математического моделирования как метод познания и метод обучения» была посвящена решению первой задачи бакалаврской работы. Проанализировав имеющуюся в нашем распоряжении психолого-педагогическую и методико-математическую литературу, мы определили математическое моделирование как опосредованное практическое или теоретическое исследование объекта, при котором непосредственно изучается не сам интересующий нас объект, а некоторая вспомогательная искусственная или естественная система (модель), находящаяся в некотором объективном соответствии с познаваемым объектом, способная замещать его в определенных отношениях и дающая при её исследовании информацию о самом моделируемом объекте. Это мощный метод изучения внешнего мира, а также прогнозирования и управления. Математическая модель – это описание какого-либо класса явлений или объектов реального мира на языке математики. Математические модели относятся к символьным моделям и представляют собой описание объектов в виде математических символов, формул, выражений, графов. Основная цель моделирования – исследовать эти объекты и предсказать результаты будущих наблюдений. Были определены основные функции математического моделирования, классификация математических моделей, а также уровни обучения и этапы обучения (ориентированные на возраст ребенка) методу математического моделирования.

Процесс математического моделирования состоит из трех этапов:

1) формализация, перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, т.е. построение математической модели задачи;

2) решение задачи внутри модели;

3) интерпретация полученного решения, т.е. перевод полученного результата (математического решения) на язык, на котором была сформулирована исходная задача.

Понятие модели можно определить как важную общенаучную категорию, а моделирование – как метод познания, сущность которого заключается в возможности переноса информации по аналогии от модели к прототипу. Математическое моделирование является важнейшим видом знакового моделирования и исследует объект посредством модели, сформированной на языке математики с использованием соответствующих математических методов.

Краткий сравнительный анализ развития философии и математики показывает тесную взаимосвязь уровня общественного мировоззрения и математического моделирования, образующих практически одно целое. Математическое моделирование появилось очень давно, но остается актуальным до сих пор, так как этот метод проникает во всё более широкие сферы человеческой деятельности, что позволяет ему развиваться вместе с человечеством и не терять своей значимости.

Необходимость формирования навыков математического моделирования при обучении математике обосновывается в работах В. В. Давыдова, О. Б. Епишевой, О. А. Ивашовой, В. И. Крупича, А. Г. Мордковича, Н. И. Пака, Г. И. Саранцева, Ю. Г. Тамберга, Т. М. Фридмана и др. Авторы утверждают, что навыки моделирования должны приобретаться учащимися еще со школьной скамьи. Но практически этот подход остается нереализованным. Исключение составляют школьные учебники по математике под редакцией А. Г. Мордковича, которые базируются на «принципиально новой концепции, ключевыми понятиями которой являются математический язык и математическая модель, а приоритетной содержательно-методической линией – функционально-графическая». Эта концепция связывает математику с окружающим миром посредством метода математического моделирования, давая ученикам понять, что данный метод необходим не только в математике и других науках, но и в повседневной жизни. Школьные учебники по математике под редакцией А. Г. Мордковича не просто изучают математическое моделирование, а практически ставят его во главу обучения математике вместе с математическим языком, начиная с 7 и заканчивая 11 классом.

На основе анализа психолого-педагогической и методико-математической литературы в работе были конкретизированы классификация текстовых задач, функции универсальных учебных действий (УУД), а также роль метода математического моделирования в формировании и развитии УУД.

Был разработан план-конспект урока по алгебре в 8 классе по теме «Решение задач с помощью квадратных уравнений», направленный на формирование и развитие конкретных УУД.

Во второй главе «Использование метода математического моделирования при реализации прикладной направленности обучения математике в 8-9 классах» охарактеризована роль прикладной направленности обучения математике, выявлена проблема, связанная с тем, что в школе в основном ведется работа со вторым этапом математического моделирования, а этапы формализации и интерпретации раскрываются недостаточно. Для решения этой проблемы предложен вариант такой организации обучения элементам моделирования, при которой будут затронуты в равной степени все три этапа моделирования. Один из путей для устранения – разработка специальных задач-проблем. Задачи-проблемы – это чаще всего сюжетные задачи, возникающие на практике, но не содержащие достаточных для ее решения числовых данных. Проведенный нами анализ содержания школьных учебников по алгебре и геометрии 8-9 классов показал, что задачный материал учебников почти не содержит таких задач-проблем. Использование таких задач на уроках затруднено, так как на их решение необходимо затратить больше времени, чем это позволяет школьная программа. Поэтому целесообразно использование метода проектов во внеурочное время, что является мощным средством усиления прикладной направленности обучения математике.

С этой целью были разработаны задания для организации проектной деятельности учащихся с использованием задач-проблем, направленной на обучение всем трем этапам метода математического моделирования и на усиление прикладной направленности обучения математике.

Учащимся 9 класса, интересующимся физикой (и знакомым с описанными в задачах проекта физическими явлениями), можно предложить групповой проект, связанный с прикладными задачами-проблемами. Выбор класса обусловлен тем, что от учащихся, участвующих в данном проекте, потребуется иметь представление о решении квадратных уравнений с параметрами.

Первая задача – простая задача из курса физики за 9 класс.

Задача 1. Тело брошено вертикально вверх со скоростью 25 м/сек. Какова скорость тела через 4 сек? Какое перемещение совершит тело и какова длина пути, пройденного телом за это время?

Решение. Так как в данной задаче даны все числовые данные, то первый этап – перевод условий задачи на математический язык – пропускается.

Этап 2. Скорость тела вычисляется по формуле $v = v_0 - g \cdot t$.

К исходу четвертой секунды $v = 25 - 9{,}8 \cdot 4 = -15$ (м/сек.)

Знак «–» означает, что скорость направлена против координатной оси, направленной вверх, то есть в конце четвертой секунды тело уже двигалось вниз, пройдя через высшую точку своего подъема.

Величину перемещения тела найдем по формуле $h = v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$, откуда $h = 25 \cdot 4 - \frac{9{,}8 \cdot 16}{2} \approx 20$ (м).

Это перемещение отсчитывается от того места, откуда тело было брошено. Но в этот момент тело уже двигалось вниз. Поэтому длина пройденного телом пути равна максимальной высоте подъема плюс расстояние, на которое оно успело опуститься вниз: $l = h_{макс} + (h_{макс} - h) = 2h_{макс} - h$.

Значение $h_{макс}$ вычислим по формуле $h_{макс} = \frac{v_0^2}{2g}$.

Отсюда $l = 2\frac{v_0^2}{2g} - h = \frac{v_0^2}{g} - h$.

Подставив значения $v_0 = 25$ м/с, $h = 20$ м, получаем: $l = \frac{625}{9{,}8} - 20 \approx 42{,}5$ м.

Этап 3. В конце четвертой секунды тело уже двигалось вниз, пройдя через высшую точку своего подъема. Длина пути, пройденного телом за 4 с, равна 42,5 м.

Ответ: 42,5 м.

Вторая задача не имеет конкретных числовых данных, в ней даны лишь количественные отношения, тем самым данная задача подводит учеников к главной задаче в этом проекте.

Задача 2. Два тела брошены вертикально вверх с различными начальными скоростями. Одно из них достигло вчетверо большей высоты, чем другое. Во сколько раз его начальная скорость была больше начальной скорости другого тела?

Решение. Этап 1. Переходим к математической задаче. Пусть скорость первого тела будет v_1, время – t_1, а достигнутая высота – h_1. У второго тела соответственно v_2, t_2, h_2. Согласно формуле максимальной высоты можно выразить достигнутую высоту каждого из тел:

$$h_1 = v_1 \cdot t_1 - \frac{gt_1^2}{2}, h_2 = v_2 \cdot t_2 - \frac{gt_2^2}{2}. \quad (1)$$

Условие того, что оба тела долетели до максимальной высоты:

$$v_1 = gt_1^2, v_2 = gt_2^2. \quad (2)$$

Выражаем время: $t_1 = \frac{v_1}{g},\ t_2 = \frac{v_2}{g}$. (3)

Подставляем уравнения из (3) в уравнения из (1) соответственно:

$$h_1 = \frac{v_1^2}{2g}, h_2 = \frac{v_2^2}{2g}. \quad (4)$$

Этап 2. По условию, одно из тел достигло высоты в четыре раза большей, чем другое, то есть $h_1 = 4h_2$. Подставляем это значение в первое равенство формулы (4) и вычтем из него второе равенство (4), умноженное на 4, получим:

$$\frac{v_1^2}{2g} = 4\frac{v_2^2}{2g};\ v_1^2 = 4v_2^2;\ v_1 = 2v_2.$$

Этап 3. Интерпретируя полученное решение математической задачи, получаем ответ на вопрос задачи: начальная скорость одного тела была в два раза больше скорости другого.

Ответ: в 2 раза.

Третья задача не содержит никаких числовых данных, в том числе числовых зависимостей.

Задача 3. Тело брошено вертикально вверх с некоторой начальной скоростью. Через сколько времени оно достигнет заданной высоты?

Решение. Этап 1. Важно помнить, что на рассматриваемое физическое явление существенное влияние оказывает скорость, с которой выполняется бросание: чем выше скорость, тем большей высоты тело достигает.

Переход к математической задаче осуществляется в том же ключе, как и решение любой алгебраической текстовой задачи. Обозначив через v_0 м/с начальную скорость бросания тела, через h м – высоту, которую тело должно достигнуть, а через t с – время, через которое тело окажется на высоте h, и вспомнив, что движение тела, брошенного вертикально вверх является равнозамедленным, высоту h можно найти по формуле $h = v_0 \cdot t - \frac{gt^2}{2}$ (5), где g – ускорение свободного падения тела, м/с^2. Если рассматривать данную формулу (5) как уравнение, то это уравнение будет являться математической моделью рассматриваемой физической задачи.

Этап 2 сводится к решению математической задачи, в данном случае к решению уравнения (5) относительно t.

Запишем уравнение в привычной для учащихся форме: $gt^2 - 2v_0t + 2h = 0$. Дискриминант уравнения: $D = v_0^2 - 2gh$.

Если $v_0^2 - 2gh<0$, т.е. $0<v_0<(2gh)^{1/2}$ (по смыслу задачи $v_0 >0$), то уравнение (5) решений не имеет.

Если $v_0^2 - 2gh=0$, т. е. $v_0=(2gh)^{1/2}$, то уравнение (5) имеет одно решение $\frac{v_0}{g}$.

Если $v_0^2 - 2gh>0$, т.е. $v_0>(2gh)^{1/2}$, то уравнение (5) имеет два различных корня: $\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}, \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$.

Этап 3 заключается в интерпретации математического решения задачи, т.е. в переводе решения уравнения (5) на язык исходной физической задачи.

При $0<v_0<(2gh)^{1/2}$ отсутствие решения уравнения означает, что тело при указанных условиях (при такой начальной скорости) не достигнет высоты h.

При $v_0=(2gh)^{1/2}$ единственность решения уравнения равнозначна тому, что тело достигает высоты h через $\frac{v_0}{g}$ с.

При $v_0>(2gh)^{1/2}$ решение математической задачи получает такое толкование: что тело окажется на высоте *h* дважды – поднимаясь вверх, через $\frac{v_0 - \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$ с, а на обратном пути, опускаясь вниз, через $\frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 - 2gh}}{g}$ с.

Данный проект направлен на процесс формирования у учащихся следующих универсальных действий:

– личностные: осознание учащимися важности метода математического моделирования для решения прикладных задач;

– познавательные: умение искать и выделять необходимую информацию; умение составлять и преобразовывать модели реальных ситуаций; выбор наиболее эффективных способов решения задач в зависимости от конкретных условий;

– коммуникативные: умение определять цели, функции участников, способы взаимодействия.

Далее во второй главе охарактеризовано компьютерное моделирование как средство визуализации математического моделирования на уроках математики. Достоинство компьютерного моделирования – некоторое снижение барьера необходимой математической подготовки. Когда математическая модель сформулирована, выбирается метод ее исследования. Для решения одной и той же задачи есть несколько конкретных методов, различающихся эффективностью, устойчивостью и т.д. В школе чаще всего математическая модель задачи решается с помощью математических средств. Чтобы мотивировать учащихся, можно предложить им использовать компьютерное математическое моделирование.

В работе были рассмотрены некоторые примеры использования компьютерного моделирования в математической программе *GeoGebra* в процессе решения задач методом математического моделирования.

Заключение. Основные результаты бакалаврской работы.

1. Понятие модели можно определить как важную общенаучную категорию, а моделирование – как метод познания, сущность которого заключается в возможности переноса информации по аналогии от модели к

прототипу. Математическое моделирование является важнейшим видом знакового моделирования и исследует объект посредством модели, сформированной на языке математики с использованием соответствующих математических методов.

Математическое моделирование является одним из средств формирования и развития УУД, а также открывает возможности для удовлетворения многообразных интересов, самовыражения и самоутверждения учащихся при работе с информацией, если использовать его не просто в процессе обучения наряду с другими методами, а в отдельных видах деятельности, направленных именно на построение математических моделей (например, проектная деятельность, исследовательская деятельность).

2. Процесс математического моделирования состоит из трех этапов:

1) формализация, перевод предложенной задачи с естественного языка на язык математических терминов, т.е. построение математической модели задачи;

2) решение задачи внутри модели;

3) интерпретация полученного решения, т.е. перевод полученного результата (математического решения) на язык, на котором была сформулирована исходная задача.

В школьном курсе алгебры в основном работа ведется со вторым этапом математического моделирования, а этапы формализации и интерпретации раскрываются недостаточно.

Разработанные нами задания с использованием задач-проблем направлены на обучение всем трем этапам метода математического моделирования и на усиление прикладной направленности обучения математике.

3. Использование задач-проблем непосредственно на уроках математики требует больших временных затрат. Поэтому целесообразно их использование во внеурочное время в рамках проектной деятельности.

Включение обучающихся в проектную деятельность является одним из путей формирования УУД в основной школе.

4. Применение компьютерного моделирования как средства

визуализации математического моделирования на уроках математики способствует реализации прикладной направленности обучения математике учащихся 8-9 классов.

Рассмотрены некоторые примеры использования компьютерного моделирования в математической программе *GeoGebra* в процессе решения задач методом математического моделирования.

Результаты исследования доложены и обсуждены на конференции преподавателей и студентов механико-математического факультета СГУ «Математика. Механика» (апрель, 2017).

По материалам бакалаврской работы опубликованы три статьи в сборниках «Учитель – ученик: проблемы, поиски, находки». Выпуски 14-15: «Один из вариантов обучения школьников решению сюжетных задач», «Использование метода математического моделирования при реализации прикладной направленности обучения математике в 8-9 классах» и «Компьютерное моделирование на уроке математики».