

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математики и методики ее преподавания

**Методические аспекты изучения обратных функций
в школьном курсе математики**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 461 группы
направления 44.03.01 – Педагогическое образование (профиль –
математическое образование) механико-математического факультета

Удаловой Марии Юрьевны

Научный руководитель
к.п.н., доцент

Т. А. Капитонова

Зав. кафедрой
к.п.н., доцент

И. К. Кондаурова

Саратов 2017

Введение. В Федеральном государственном образовательном стандарте среднего (полного) общего образования и разработанных на его основе типовых документах предусмотрено «формирование представлений об основных понятиях математического анализа (базовый уровень) и их свойствах (углубленный уровень)».

Одна из целей курса алгебры и начал анализа в старших классах общеобразовательной школы – систематическое изучение функций как важнейшего математического объекта средствами алгебры и математического анализа, с последующей подготовкой необходимого математического инструментария для изучения геометрии, физики и других дисциплин.

Понятие функции является одним из основных в науке и имеет мировоззренческое и общекультурное значение. Благодаря ему можно изучать физические величины в их взаимосвязи, а с помощью свойств функций решать математические задачи.

«С понятием функции связана система функциональных понятий, используемых для изучения (исследования) различных свойств функции. В общем случае примерная схема исследования функции (изучение ее свойств) предусматривает решение ряда задач, – одна из которых, – установление существования обратной функции».

В Примерной основной образовательной программе среднего общего образования в качестве требования к результатам освоения предмета «Алгебра и начала анализа» в разделе «Функции» указано, что выпускник на углубленном уровне научится: «владеть понятием обратная функция; применять это понятие при решении задач».

Все выше названное обуславливает актуальность темы исследования.

Изучением обратных функций занимались многие математики и методисты (В. Г. Болтянский, Ш. А. Алимов, О. Б. Епишева, А.Г. Мордкович, С. М. Никольский, И.Ф. Шарыгин, М. С. Мацкин и Р.Ю. Мацкина, В. С. Крамор и др.).

До последнего времени до конца не определено отношение учителей и методистов к теме «Обратная функция», что, безусловно, наносит ущерб формированию у учащихся правильного представления о понятии и свойствах функции. Учителя стараются либо совсем обойтись без понятия обратной функции, либо излагать ее при изучении темы «Логарифмическая функция». По мнению А. Г. Мордковича, можно было бы ввести понятие обратной функции раньше, при изучении обратных тригонометрических функций, но этому мешало отсутствие адекватного варианта введения понятия обратной функции.

Цель бакалаврской работы: на основе обобщения и систематизации материала разработать методические рекомендации по теме «Обратные функции».

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие задачи:

1. Проанализировать изложение темы «Обратные функции» в школьных учебниках.
2. Разработать методические рекомендации для изучения темы «Обратные функции».

Методы исследования: анализ методико-математической литературы; изучение нормативных документов; разработка методических материалов.

Структура работы: титульный лист; введение; две главы («Изучение темы «Обратная функция» в школьном курсе математики»; «Методические рекомендации к изучению темы «Обратные тригонометрические функции»»); заключение; список использованных источников; приложение.

Основное содержание работы. Первая глава «Изучение темы «Обратная функция» в школьном курсе математики» посвящена решению первой задачи бакалаврской работы. Для анализа были использованы учебники: Ш.А. Алимов и др. Алгебра и начала математического анализа. 10 – 11 классы; С. М. Никольский и др. Алгебра и начала анализа, 10 класс, Алгебра и начала анализа, 11 класс.

В учебнике Ш.А. Алимова теме «Обратные функции» в главе 2. «Степенные функции» посвящен параграф 7 «Взаимно обратные функции».

Понятие «обратная функция» иллюстрируется на примере взаимно обратных функциональных зависимостей: формуле зависимости скорости от времени при движении тела, брошенного вверх с начальной скоростью $v = v_0 - gt$ и обратной зависимости – времени от скорости $t = \frac{v_0 - v}{g}$.

Учащимся сообщают, что такие функции называют обратимыми.

Далее в тексте выделяется информация (текст, отмеченный специальным значком, означающим, что его важно знать и полезно помнить).

«Если функция $y = f(x)$ принимает каждое свое значение только при одном значении x , то эту функцию называют обратимой».

В качестве примера рассмотрены две функции: $y = 2x - 2$ – обратимая, $y = x^2$ – не является обратимой и формулируется определение:

Пусть $y = f(x)$ – обратимая функция. Тогда каждому y из множества значений функции соответствует одно определенное число x из области ее определения, такое, что $f(x) = y$. Это соответствие определяет функцию x от y , которую обозначим $x = g(y)$. В этой записи в соответствии с принятыми обозначениями меняем местами x и y . Получим $y = g(x)$.

Функцию $y = g(x)$ называют обратной к функции $y = f(x)$.

Далее рассматривается и решается задача, на примере которой указывается способ нахождения обратной функции к данной:

Если функция $y = f(x)$ задана формулой, то для нахождения обратной функции нужно решить уравнение $f(x) = y$ относительно x и затем поменять местами x и y .

Сообщается, что рассмотренная в задаче функция $y = 3x + 5$ является обратной к найденной для неё обратной функции $y = \frac{x - 5}{3}$. Поэтому эти функции называют взаимно обратными.

Приводятся свойства взаимно обратных функций, первое из которых дается без доказательства (иллюстрируется на примере).

Второе свойство сформулировано в виде теоремы и доказано.

Далее учащимся сообщается, что возрастающие и убывающие функции иногда называют одним словом – монотонные и формулируется и доказывается теорема.

Теорема 1. Монотонная функция является обратимой.

В заключении параграфа отмечено, что степенная функция $y = x^p$ при $x > 0$ и $p \neq 0$ обратима, так как она монотонна.

Обратной к степенной функции $y = x^p$ при $x > 0$ и $p \neq 0$ является степенная функция $y = x^{\frac{1}{p}}$.

К данной теме даются следующие задания (упражнения):

1. Найти функцию, обратную к данной.
2. Найти область определения и множество значений функции, обратной к данной функции.
3. В одной координатной плоскости построить график данной функции и функции, обратной к данной.

Глава 3. Показательная функция.

§ 11. Показательная функция, ее свойства и график.

Перед введением показательной функции рассматриваются свойства степени и уже известные ученикам степенные функции $y = x^2$, $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$, $y = x^{\frac{1}{3}}$, то есть функции $y = x^r$, где r – заданное число, а x – переменная.

Определение. Показательной функцией называется функция $y = a^x$, где a – заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$.

Перечисляются основные свойства и строятся графики показательной функции. Далее рассматривается решение показательных уравнений, которые часто сводятся к решению уравнения

$$a^x = a^b,$$

где $a > 0$, $a \neq 1$, x – неизвестное. Это уравнение имеет единственный корень $x = b$, так как справедлива следующая теорема:

Теорема 2. Если $a > 0$, $a \neq 1$ и $a^{x_1} = a^{x_2}$, то $x_1 = x_2$.

В ходе решения следующей задачи, учащиеся приходят к необходимости введения понятия логарифма числа.

Задача. Решить уравнение $3^x = 80$.

Формулируется проблема: чтобы уметь решать такие уравнения, необходимо ввести понятие логарифма числа.

Определение. Логарифмом положительного числа b по основанию a , где $a > 0$, $a \neq 1$, называется показатель степени, в которую надо возвести число a , чтобы получить b .

На основании данного определения в §18 «Логарифмическая функция, ее свойства и график» (глава 4 «Логарифмическая функция») вводится понятие логарифмической функции:

«В математике и ее приложениях часто встречается логарифмическая функция $y = \log_a x$, где a – заданное число, $a > 0$, $a \neq 1$ ».

После этого приводятся свойства логарифмической функции, свойства доказываются. На основании свойств представлены графики логарифмической функции при $a > 1$ и при $0 < a < 1$.

Завершается параграф 18 следующим утверждением.

«Логарифмическая функция $y = \log_a x$ и показательная функция $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$, взаимно обратны».

В главе 7 «Тригонометрические функции» есть §43 «Обратные тригонометрические функции», который идет как дополнительный и содержит наиболее сложный материал.

В этом параграфе рассматриваются графики и свойства обратных тригонометрических функций. Представлен график и перечислены основные свойства функции $y = \arcsin x$. По аналогичной схеме (но без доказательств)

вводятся функции $y = \arccos x$ и $y = \arctg x$. Заканчивается параграф тем, что вводится название новых функций.

«Функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = \arctg x$ называются обратными тригонометрическими функциями».

В учебнике С.М. Никольского «Алгебра и начала анализа» для 10 класса тема «Обратные функции» впервые встречается в параграфе 5 «Логарифмы». При изучении логарифмической функции автор определяет её через показательную функцию, однако определение и понятие обратной функции не приводится.

В учебнике С.М. Никольского «Алгебра и начала анализа» для 11 класса тема «Обратные функции» рассматриваются в параграфе 3, который содержит 4 пункта: «Понятие обратной функции», «Взаимно обратные функции», «Обратные тригонометрические функции», «Примеры использования обратных тригонометрических функций». Первый пункт содержит материал для базового уровня, пункты 2-4 – для профильного уровня.

На основании анализа задачного материала учебников делаем выводы:

1. Задачный материал по теме «Обратные функции, представленный в учебнике Ш. А. Алимова, требует дополнения, так как количество задач, содержащих обратные тригонометрические функции, от общего количества тригонометрических задач в учебнике составляет примерно 9%.

2. Задачный материал по теме «Обратные функции, представленный в учебниках С.М. Никольского, требует дополнения, так как уделено недостаточно внимания построению графиков сложных функций и решению уравнений и неравенств.

Во второй главе работы «Методические рекомендации к изучению темы «Обратные функции» в пункте 2.1 представлены методические рекомендации к изучению темы «Обратные тригонометрические функции»

В общеобразовательных классах на изучение темы «Обратные тригонометрические функции» отводится меньше времени, чем в классах с углубленным изучением математики, поэтому в зависимости от успеваемости

учащихся некоторые утверждения можно давать без доказательства (но в этом случае надо обосновать эти утверждения), заменить строгость изложения на наглядность. Если при решении уравнений и неравенств у учащихся возникают трудности, то целесообразно обращаться к графическим образам, а не только к справочным таблицам с готовыми результатами.

Из рассмотренных учебников, предназначенных для общеобразовательных классов, тема обратных тригонометрических функций наиболее удачно, с точки зрения доступности, представлена в учебнике Ш. А. Алимова. Но в этом учебнике многое дается без доказательства.

Анализ упражнений и задач, представленных в учебниках Ш. А. Алимова и С.М. Никольского приводит к необходимости разработки дополнительных упражнений: (1) на построение графиков; (2) на нахождение области определения и множества значений обратных функций; (3) на применение свойств взаимно обратных функций. Упражнения такого типа позволяют учащимся лучше усвоить и запомнить области определения и множества значений обратных тригонометрических функций, основные свойства взаимно обратных функций, прояснить именно обратную функциональную зависимость.

Задачи, связанные с обратными тригонометрическими функциями, часто вызывают у школьников значительные трудности. Связано это, прежде всего с тем, что в учебниках подобным задачам уделяется мало внимания.

Учителю можно рекомендовать следующее:

- 1) использовать такие задания не только во время изучения данной темы, но и после, при повторении, периодически обращаться к таким заданиям;
- 2) познакомить учащихся с решением уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции;
- 3) рассматривать графические способы решения уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции;
- 4) давать учащимся задание на выведение соотношений для аркфункций, или на доказательство этих соотношений как тождеств.

Также во второй главе указана роль задач в изучении темы «Обратные функции». «Понятие обратной функции является сложным для учащихся, усваивается с трудом, требует большого искусства учителя при объяснении материала, достаточно продолжительной тренировки учащихся на разнообразных упражнениях, которых явно мало в учебниках (некоторых авторов) для общеобразовательных школ.

Тема «Обратная функция» до последнего времени отсутствовала в школьном курсе математики. Такое положение дел не способствовало формированию у учащихся целостного представления о понятии функции вообще. Сталкиваясь с новым понятием – арксинус, арккосинус, арктангенс или арккотангенс – при решении тригонометрических уравнений, школьники испытывали трудности».

Общеизвестно, что лучше всего усваивается не тот материал, который изучается непосредственно «в лоб», а тот материал, который является средством решения других задач. Поэтому целесообразно подобрать и сконструировать специальные типы учебных заданий, для решения которых учащимся необходимо использовать свойства взаимно обратных функций.

Подобранные нами задания по теме «Обратные функции» дополняют задачный материал тем «Обратные тригонометрические функции», «Показательная и логарифмическая функция», представленный в рассмотренных учебниках.

Задачи представлены по трем разделам. I раздел содержит задачи по теме «Обратные тригонометрические функции» (задачи 1-20), II – по теме «Показательная и логарифмическая функции» (задачи 21-27). В III раздел включены задачи, при выполнении которых обязательно применяются основные свойства взаимно обратных функций (задачи 28-34).

В качестве примера опишем подробнее упражнения, представленные в первом разделе:

1) нахождение области определения и множества значений обратных функций;

2) на вычисление значений выражений, связывающих тригонометрические функции и аркфункции (сначала предлагаются задания, которые решаются с использованием табличных значений тригонометрических функций и формул приведения, далее – задания, решаемые с использованием соотношений между тригонометрическими функциями и с помощью геометрических интерпретаций, и примеры, решаемые с помощью замены переменной);

3) на решение уравнений, содержащих обратные тригонометрические функции.

4) на построение графиков сложных функций.

Заключение. По результатам бакалаврской работы сформулированы следующие выводы:

1. Анализ теоретического материала учебников для общеобразовательных классов по теме «Обратные функции» показал, что в курсе алгебры и начал анализа 10-11 определение обратной функции строго не вводится, а рассматривается на примерах. Анализ задачного материала учебников, приводит к необходимости разработки дополнительных упражнений: (1) на нахождение области определения и множества значений обратных функций; (2) на применение свойств взаимно обратных функций; (3) на построение графиков сложных функций (композиции взаимно обратных функций). Упражнения такого типа позволяют учащимся лучше усвоить и запомнить области определения и множества значений обратных функций, основные свойства взаимно обратных функций, прояснить именно обратную функциональную зависимость.

2. Закрепление основных свойств взаимно обратных функций целесообразно осуществлять в ходе решения специально отобранных и /или сконструированных задач.

Подобранные нами задания по теме «Обратные функции» дополняют задачный материал тем «Обратные тригонометрические функции», «Показательная и логарифмическая функция», представленный в

рассмотренных нами учебниках. Задачи представлены по трем разделам: первый раздел содержит задания по теме «Обратные тригонометрические функции»; второй – по теме «Показательная и логарифмическая функции»; в третий раздел включены задания, при выполнении которых обязательно применяются основные свойства взаимно обратных функций.

3. Выполнение заданий по теме «Обратные функции» способствует формированию целостного представления о функциях вообще и о взаимно обратных функциях в частности.

Практическая значимость проведенного исследования заключается в получении следующих результатов: (1) подобраны и решены задачи по теме «Обратные функции», дополняющие задачный материал учебников; (2) составлены методические рекомендации к решению задач по теме «Обратные функции».

Материалы бакалаврской работы могут быть использованы учителями и учащимися общеобразовательных школ различных типов, а также студентами – будущими учителями математики.