

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций
и стохастического анализа

АКРУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ ПЕРЕСТРАХОВАНИЯ

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 412 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика и информатика
Теребенковой Анастасии Алексеевны

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент _____ Е.В. Гудошникова

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., доцент _____ С.П. Сидоров

Саратов, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Бурное развитие страховой отрасли требует соответствующего развития математического фундамента для успешной работы страхового бизнеса. Ведь именно статистические и актуарные исследования позволяют страховой компании правильно сформировать свою тарифную политику, обеспечив, с одной стороны, свою платежеспособность и финансовую устойчивость, с другой стороны, сохранив конкурентоспособность.

Страхование заключается в следующем: страховщик предлагает клиентам заключить договор, по условиям которого клиент платит компании небольшой взнос, тогда при возникновении страховой ситуации, оговоренной в договоре, страховщик выплатит клиенту сумму, которая значительно превышает взнос клиента. Может случиться так, что у каждого клиента компании произойдет страховой случай, тогда страховщик получит огромный долг, возможно разорится. Так же может не произойти ни одного ни одного страхового случая, тогда компания получит большую прибыль. Теоретически такие крайние ситуации возможны. Весомое значение имеет вероятность страхового случая, так как страховые компании изучают при какой цене на страховые договора можно иметь приемлемую вероятность разорения, при этом получать прибыль. Вероятность страхового случая определяется специалистами-статистиками. Риск компании, вероятность ее разорения определяется специалистами в одной из областей математики - актуарной математики.

Целью бакалаврской работы являются актуарные расчеты величин перестрахования.

В работе рассматриваются и решаются следующие **задачи** перестрахования:

1. Нахождение оптимального интервала для рисковой надбавки квотного перестраховочного договора и доли передаваемого риска.
2. Нахождение оптимального интервала для рисковой надбавки эксцедентного перестраховочного договора и величины передаваемого риска.
3. Нахождение оптимальной доли передаваемого риска при взаимном перестраховании.

Практическая значимость работы состоит в том, что расчеты таких величин, как рисковая премия, рисковая надбавка, нагрузка, резерв, относительная рисковая надбавка, величина передаваемого риска можно применять на практике для определения более подходящего типа перестрахования.

Структура и содержание работы. Работа состоит из введения, пяти разделов, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований, и приложения.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновывается актуальность темы работы, формулируется цель работы и решаемые задачи, отмечается практическая значимость полученных результатов.

В **первом** разделе приводятся такие основные понятия, как основные составляющие страхового взноса, относительная рисковая надбавка, нетто-премия, брутто-премия.

Составляющие страхового взноса:

Рисковая премия – минимально возможная сумма, обеспечивающая эквивалентность обязательств сторон – задача статиста.

Рисковая надбавка – надбавка за безопасность, которая создается для выплат возмещений, незначительно превышающее среднее ожидаемое количество страховых случаев – задача актуариев. В работе получена формула:

$$PH = RP \sqrt{\frac{1-p}{np}} \phi^{-1}\left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right),$$

где РП – рисковая премия;

р – вероятность страхового случая;

п – одинаковые договора с нераспределённым ущербом;

ϕ – функция Лапласа;

ε – допустимая вероятность разорения.

Нагрузка – величина предназначенная для покрытия расходов на ведение дела, проведение мероприятий, снижающих риск разорения, получение прибыли – задача экономистов.

Нетто-премия — часть страховой премии, предназначенной непосредственно для покрытия ущерба. Нетто-премия является главной составной ча-

стью брутто-премии. Нетто-премия состоит из чистой нетто-премии по риску и рискованной надбавки.

Если определена РП и ОРН δ_0 , то

$$\text{НП} = \text{РП} + \text{РН} = \text{РП}(1 + \delta_0).$$

Прибыль компании складывается из НП. Если собрано суммарно НП на сумму S_1 , а уплачено возмещений на сумму S_2 , то разность $S_1 - S_2$ это и есть прибыль (потери) компании.

Брутто-премия, или страховой взнос, представляет собой размер страховых платежей по договору страхования, уплачиваемый страхователем страховщику (страховой организации) за определенный период со всей страховой суммы.

Общая формула для определения страхового взноса:

$$\begin{aligned} \text{БП} &= \text{НП}(1 + \frac{R}{100}) = \text{РП}(1 + \delta_0)(1 + 0,01R) = \\ &= px_0(1 + \sqrt{\frac{1-p}{np}}\phi^{-1}(0,5 - \varepsilon))(1 + 0,01R) \end{aligned}$$

Во **втором** разделе изучаются актуарные задачи первого способа повышения надежности – объединения портфелей.

Объединение портфелей. Страховые договора могут значительно различаться по величине возможного риска и возмещении, по вероятности страхового случая.

Когда у компании составлено значительное количество договоров, среди них могут быть и идентичные, либо «почти» идентичные. Субпортфель – пакет однородных рисков. Каждый субпортфель – один общий риск с распределением суммарного ущерба, которое строится по известному распределению отдельного риска. Общие риски по субпортфелям объединяются и образуют портфель компании.

Самостоятельно решена **актуарная задача объединения портфелей А и В.**

Рассмотрим объединение двух портфелей.

Пусть к объединению предлагаются портфели A и B :

A состоит из n_1 договоров с суммами по S_1 и вероятностями p_1 ;

B состоит из n_2 договоров с суммами по S_2 и вероятностями p_2 ;

K - коэффициент риска.

$$K_A = \sqrt{\frac{1-p_1}{n_1 p_1}},$$

$$K_B = \sqrt{\frac{1-p_2}{n_2 p_2}}.$$

Считается, что если $K_A \ll 0,33$ ($K_B \ll 0,33$), то портфель имеет низкий коэффициент риска, уверенно чувствует себя на рынке.

Если K_A (K_B) превышает 0,33, то положение портфеля на рынке не устойчивое.

Подсчитаем коэффициент риска при объединении портфелей (K_{A+B}):

$$M_A(Y) = n_1 p_1 S_1,$$

$$M_B(Y) = n_2 p_2 S_2,$$

$$M_{A+B}(Y) = M_A(Y) + M_B(Y),$$

$$D_A(Y) = n_1 p_1 (1-p_1) S_1^2,$$

$$D_B(Y) = n_2 p_2 (1-p_2) S_2^2,$$

$$D_{A+B}(Y) = D_A(Y) + D_B(Y),$$

$$K_{A+B} = \frac{\sqrt{D_{A+B}}}{M_{A+B}(Y)}.$$

Если $K_A < K_{A+B}$ ($K_B < K_{A+B}$), то портфелю A (B) это объединение невыгодно, если исходить только из актуарных соображений. Если же ухудшение коэффициента риска будет не слишком большое, то на решение объединять или нет могут влиять другие факторы.

Если $K_A > K_{A+B}$ ($K_B > K_{A+B}$), то для портфеля A (B) объединение будет выгодным.

В **третьем** разделе рассматриваются актуарные задачи второго способа повышения надёжности компании – создания резерва.

Резерв. Пусть число возможных исков находится в доверительном интервале $[n_1; n_2]$, с вероятностью, соответствующей необходимому уровню надёжности. Компанией собраны взносы, достаточных на оплату m исков и $m < n_2$. Для возможности оплаты $m+1, m+2, \dots, n_2$ -го исков, компании необходи-

мо обладать дополнительными средствами, созданных либо из собственных средств учредителей компании, либо взятых в кредит.

Резерв объединения портфелей. Необходимая величина резерва для обеспечения надежности:

$$U = a\sqrt{D(Y)} + M(Y),$$

где U – величина резерва;

Y – суммарная величина риска;

$a = \phi^{-1}(0,5 - \varepsilon)$;

ε – вероятность разорения;

ϕ^{-1} – обратная функция Лапласа.

Рассмотрим два субпортфеля с резервами:

$$U_1 = a\sqrt{D(Y_1)} + M(Y_1),$$

$$U_2 = a\sqrt{D(Y_2)} + M(Y_2).$$

Тогда резерв их объединения:

$$U_{1+2} = a\sqrt{D(Y_1 + Y_2)} + M(Y_1 + Y_2) = a\sqrt{D(Y_1) + D(Y_2)} + M(Y_1) + M(Y_2).$$

Отметим, что:

$$U_1 + U_2 = a(\sqrt{D(Y_1)} + \sqrt{D(Y_2)}) + M(Y_1) + M(Y_2),$$

а так как

$$\sqrt{D(Y_1 + Y_2)} < \sqrt{D(Y_1)} + \sqrt{D(Y_2)},$$

в чем легко убедиться возведя в квадрат обе части неравенства, то

$$U_{1+2} < U_1 + U_2.$$

То есть, резерв объединенного портфеля меньше суммы резервов субпортфелей.

Основным содержанием работы является **четвертый** раздел, в котором рассмотрены актуарные задачи третьего способа повышения надежности – перестрахование.

Основные виды перестраховочных договоров. Перестрахование – процедура, во время которой страховая компания-перестрахователь (цедент) выступает в роли клиента у другой страховой компании-перестраховщика. Происходит это, когда компании приходится установить рисковую надбавку ниже, чем того требует заданная надежность, а резерва для обеспечения необходимого уровня неразорения недостаточно. У компании есть риск, что объем предъявленных ей исков превзойдет сумму собранных взносов и имеющегося резерва. Данный риск может быть застрахован в другой страховой компании.

Выделим следующие типы перестраховочных программ *по типу передаваемых на перестрахование рисков*:

- Облигаторное страхование, при котором на перестрахование передаются риска по всему портфелю или субпортфелю;
- Факультативное страхование, при котором на перестрахование передаются конкретные риски;
- Перестрахование наибольших убытков, при котором на перестрахование передается определенное число наибольших возмещений на год.

Выделим два типа перестрахования договоров *по виду передаваемой ответственности*:

- Квотные договора, в которых на перестрахование передается определенный процент с каждого риска;
- Эксцедентные договора, в которых на перестрахование передаются риски из определенного интервала от G_1 (приоритет или первый риск) до G_2 (второй риск).

Так же возможны комбинированные договора – договора, в которых одна часть риска передается на эксцедентной основе, а вторая часть на квотной основе (возможны и более сложные варианты).

Принципы расчета составляющих страхового взноса перестраховочного договора ничем не отличаются от обыкновенно страхования, так как перестраховочный договор – договор о страховании компании от ущерба, который может произойти с некоторой вероятностью.

За перестрахование цеденту нужно платить из средств, которые можно было бы присоединить к резерву, причем, чем больший риск передается на перестрахование, тем больше должна быть плата за перестрахование.

Квотный договор – передача фиксированного процента от каждого риска портфеля на перестрахование.

$\bar{P}\Pi$ – суммарная рисковая премия по всему портфелю;

\bar{Z} – суммарный предъявленный риск;

a – объявленный в квотном договоре процент передаваемого риска.

Тогда РП перестраховочного договора

$$\bar{P}\Pi^* = \frac{a}{100} \bar{P}\Pi,$$

а уплачиваемое перестраховщику цеденту возмещение

$$\bar{V} = \frac{a}{100} \bar{Z}.$$

Цедент передает перестраховщику $a\%$ с собранных взносов. Перестраховщик оплачивает указанный процент предъявленных рисков.

Относительная рисковая надбавка перестраховщика в эксцедентном договоре для простейшей модели. Возьмем простейшую модель:

Страховая компания имеет n договоров, по которым может наступить либо частичный ущерб x_1 , с вероятностью p_1 , либо полный ущерб x_2 , с вероятностью p_2 . Относительная рисковая надбавка, установленная компанией, δ_1 . Тогда суммарная нетто премия, собранная этой компанией

$$\bar{N}\Pi = n(x_1 p_1 + x_2 p_2)(1 + \delta_1).$$

Для повышения надежности компания обратилась к перестраховщику для заключения эксцедентного договора о перестраховании иска, превышающего $t(x_1 < t < x_2)$.

Страховщику может быть предъявлен иск x_1 с вероятностью p_1 , или иск t , с вероятностью p_2 после заключения перестраховочного договора. Из это-

го следует, что ожидаемый суммарный иск основного страховщика Y , для которого

$$M(Y) = n(x_1p_1 + tp_2),$$

$$D(Y) = (x_1^2p_1 + t^2p_2 - (x_1p_1 + tp_2)^2).$$

Перестраховщику может быть предъявлен иск $x_2 - t$ с вероятностью p_2 . Следовательно, ожидаемый суммарный иск перестраховщика Z , для которого

$$M(Y) = n(x_2 - t)p_2.$$

Если перестраховщик установил для себя $ORN = \delta^*$ и нагрузку R , то взнос, уплаченный цедентом за перестрахование составит

$$\bar{\Pi} = (Z)(1 + \delta^*)(1 + 0,01R) = (Z)(1 + \delta_2),$$

где $\delta_2 \approx \text{ОРН}$.

Таким образом, основной страховщик получит доход

$$H(t) = \bar{\Pi} - \bar{P}\Pi^* = n[(x_1p_1 + x_2p_2)(1 + \delta_1) - (x_2 - t)p_2(1 + \delta_2)].$$

Вероятность разорения страховщика ε – вероятность того, что полученный доход окажется меньше суммарного иска, то есть

$$\varepsilon = P(H < Y) = 1 - (Y \leq H) \rightarrow \frac{1}{2} - \phi \frac{H - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}}.$$

Так как ϕ возрастающая функция, то для того, чтобы уменьшить ε , необходимо увеличить

$$\frac{H - M(Y)}{\sqrt{D(Y)}} = \frac{n[(x_1p_1 + x_2p_2)(1 + \delta_1) - (x_2 - t)p_2(1 + \delta_2) - (x_1p_1 + tp_2)]}{\sqrt{n(x_1^2p_1 + t^2p_2 - (x_1p_1 + tp_2)^2)}},$$

где $h(t) = \frac{at+b}{\sqrt{ct^2-dt+e}}$;

$$\begin{aligned}
a &= p_2\delta_2; \\
b &= x_1p_1\delta_1 + x_2p_2(\delta_1 - \delta_2); \\
c &= p_2(1 - p_2); \\
d &= 2x_1p_1p_2; \\
e &= x_1^2p_1(1 - p_1).
\end{aligned}$$

Так как

$$h'(t) = \frac{(2ae + bd) - t(ad + 2bc)}{2(ct^2 - dt + e)^{\frac{3}{2}}},$$

то очевидно, $h(t)$ имеет максимум (а ε минимум) в точке

$$t_{max} = \frac{(2ae + bd)}{(ad + 2bc)} \approx \frac{ae}{bc},$$

так как по смыслу обозначений p_1 и p_2 малы и $d \approx 0$.

Таким образом, оптимальная величина удержания в эксцедентном договоре, при которой достигается максимальная надежность

$$t_{max} = \frac{x_1^2p_1(1 - p_1\delta_2)}{[x_1p_1\delta_1 + x_2p_2(\delta_1 - \delta_2)](1 - p_2)}.$$

Самостоятельно было рассмотрено **взаимное перестрахование n компаний**. Рассмотрим n страховых компаний, которые объединяются в страховое сообщество, называемое пулом. Первая, вторая, и тд. n -ая компания имеет портфель с общим убытком X_1, X_2, \dots, X_n и с суммарной рисковой премией $РП_1, РП_2, \dots, РП_n$ соответственно. Так как компании ищут в перестраховании не дополнительный доход, а средство повышения надежности, то должны выполняться два основных условия:

1. ожидаемый доход от обмена перестраховочными договорами должен равняться нулю, следовательно, рисковые премии договоров должны быть равными: $РП_1^* = РП_2^* = \dots = РП_n^*$;
2. "правильные" ОРН обоих договоров должны быть минимально возможными, следовательно, дисперсия риска для n компаний должна быть минимальной: $D_1^* \rightarrow \min, D_2^* \rightarrow \min, \dots, D_n^* \rightarrow \min$.

$D_{\text{квотн.}} < D_{\text{эксцедентн.}}$, следовательно, договора должны быть квотными. Пусть c_1, c_2, \dots, c_n - доли риска, передаваемые первой, второй, \dots , n -ой компанией соответственно. Тогда

$$1. \Leftrightarrow c_1 \text{РП}_1 = c_2 \text{РП}_2 = \dots = c_n \text{РП}_n,$$

$$2. \Leftrightarrow D((1 - c_1)X_1 + c_2X_2 + \dots + c_nX_n) = (1 - c_1)^2D(X_1) + c_2^2D(X_2) + \dots + c_n^2D(X_n) = D_1(c_1, c_2, \dots, c_n) \rightarrow \min,$$

$$D(c_1X_1 + (1 - c_2)X_2 + \dots + c_nX_n) = c_1^2D(X_1) + (1 - c_2)^2D(X_2) + \dots + c_n^2D(X_n) = D_2(c_1, c_2, \dots, c_n) \rightarrow \min,$$

...

$$D(c_1X_1 + c_2X_2 + \dots + (1 - c_n)X_n) = c_1^2D(X_1) + c_2^2D(X_2) + \dots + (1 - c_n)^2D(X_n) = D_n(c_1, c_2, \dots, c_n) \rightarrow \min.$$

c_1, c_2, \dots, c_n должны удовлетворять системе:

$$\begin{cases} c_1 \text{РП}_1 = c_2 \text{РП}_2 = \dots = c_n \text{РП}_n, \\ c_1 + c_2 + \dots + c_n = 1; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 \text{РП}_1 = (1 - c_1) \text{РП}_2, \\ (1 - c_2) \text{РП}_1 = c_2 \text{РП}_2, \\ \dots \\ c_{n-1} \text{РП}_{n-1} = (1 - c_{n-1}) \text{РП}_n, \\ (1 - c_n) \text{РП}_{n-1} = c_n \text{РП}_n; \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = \frac{\text{РП}_2}{\text{РП}_1 + \text{РП}_2}, \\ c_2 = \frac{\text{РП}_1}{\text{РП}_1 + \text{РП}_2}, \\ \dots \\ c_{n-1} = \frac{\text{РП}_n}{\text{РП}_{n-1} + \text{РП}_n}, \\ c_n = \frac{\text{РП}_{n-1}}{\text{РП}_{n-1} + \text{РП}_n}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} c_k \text{РП}_k = a, \quad k = \overline{1, n}, \\ \sum_{k=1}^n \frac{a}{\text{РП}_k} = 1. \end{cases} \Rightarrow$$

$a = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{РП}_k}}$, $c_k = \frac{\text{РП}_k}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\text{РП}_k}}$ – доли передаваемого риска при взаимном перестраховании. В соответствии с этой долей риска определяется доля ответственности каждого участника в возмещении по всем договорам, переданным в пул.

В **пятом** разделе описывается программный код, показаны результаты его работы.

В **заключении** приведены результаты бакалаврской работы.

Основные результаты

1. Рассмотрены первичные концепции страхования, основные величины страхового взноса.
2. Изучены основные пути повышения надёжности компании, такие как: объединение портфелей, создание резерва, перестрахование.
3. Решена актуарная задача оценки риска объединения портфелей А и В.
4. Подробно разобраны квотные и эксцедентные виды перестраховочных договоров.
5. Решена актуарная задача взаимного перестрахования n компаний.
6. Разработана программа, которая на основании введенных параметров помогает определить какой тип перестрахования подходит больше, квотный или эксцедентный.