Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и
прикладной математики

О кратной полноте корневых функций пучка дифференциального оператора пятого порядка с постоянными коэффициентами

название темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 411 группы

направления 01.03.02 – Прикладная математика и информатика
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Карпова Кирилла Алексеевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель
д.ф-м.н., профессор ____________________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой
д.ф-м.н., профессор ____________________ А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание — дата, подпись — инициалы, фамилия

Саратов, 2018 год

Введение

Многие проблемы современного естествознания приводят к необходимости спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов, а так же пучков таких операторов. Спектральный анализ включает в себя вопросы полноты и базисности систем корневых функций, вопросы о разложения в биортогональные ряды Фурье по корневым функциям (к.ф.), вопросы асимптотики спектра и т.д.

В данной работе рассматривается и анализируется полнота к.ф. пучка $L(\lambda)$, порождённого на конечном интервале [0,1] дифференциальным выражением (д.в.)

$$\ell(y,\lambda) := p_0(x,\lambda)y^{(n)} + p_1(x,\lambda)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x,\lambda)y = \\ = \sum_{0\le j+s\le n} p_{js}(x)\lambda^s y^{(j)}, \quad (1)$$

и линейно независимыми двухточечными краевыми условиями

$$U_i(y,\lambda) := \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}(\lambda)y^{(j)}(0) + b_{ij}(\lambda)y^{(j)}(1) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \quad (2)$$

где $\lambda \in \mathbb{C}$ обозначает спектральный параметр,

$$p_j(x,\lambda) = \sum_{s=0}^{j} p_{n-j,s}(x)\lambda^s, \quad j = \overline{0,n}, \quad p_{js}(x) \in L_1[0,1],$$

а $a_{ij}(\lambda)$, $b_{ij}(\lambda)$ есть произвольные полиномы по λ.

Наряду с краевыми условиями (2), будут рассматриваться краевые условия

$$\sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}y^{(j)}(0) + b_{ij}y^{(j)}(1) = 0, \qquad i = \overline{1,n}, \quad (3)$$

не содержащие параметра λ.

Важной задачей является исследование n-кратной полноты системы к.ф. пучка $L(\lambda)$ в пространстве $L_2[0,1]$. Если n-кратной полноты нет, то естественно возникает вопрос об условиях m-кратной полноты при $0 < m < n$.

Вплоть до настоящего времени вопрос об n- и m-кратной полноте к.ф. до конца не решен даже в случае более простого пучка $L(\lambda)$, порождённого дифференциальным выражением

$$\ell_0(y,\lambda) := \sum_{j+s=n} p_{js}\lambda^s y^{(j)} \tag{4}$$

и краевыми условиями

$$\sum_{0\le j+s\le n-1} \lambda^s(a_{ijs}y^{(j)}(0) + b_{ijs}y^{(j)}(1)) = 0, \quad i=\overline{0,n-1}, \tag{5}$$

где $p_{js}, a_{ijs}, b_{ijs} \in \mathbb{C}$.

Бакалаврская работа состоит из двух частей: теоретическая и практическая часть. Теоретическая часть носит реферативный характер и опирается на статьи [1,2] научного руководителя бакалаврской работы, а практическая часть – является самостоятельной частью работы.

Работа состоит из 5-ти разделов, списка литературы и приложения. В частности содержит следующие разделы:

1. Постановка задачи и краткая история вопроса.
2. Вспомогательные обозначения и определения.
3. Определение и свойства одного специального решения основного дифференциального уравнения.
4. Достаточные условия полноты.
5. Пример исследования кратной полноты пучка 5-го порядка

[1]Рыхлов В.С. О кратной полноте корневых функций полиномиальных пучков // Таврический вестник информатики и математики. 2015. № 1 (26). С. 69-86.

[2]Рыхлов В.С Кратная полнота корневых функций некоторых нерегулярных пучков дифференциальных операторов третьего порядка // Таврический вестник информатики и математики. 2016. № 2 (31). С. 87-103.

Основная часть

Основополагающей по этой проблеме является работа М.В. Келдыша 1951 г., в которой он сформулировал теорему об n-кратной полноте к.ф. пучка $L(\lambda)$, порождённого дифференциальным выражением (1) со специальной главной частью.

$$\ell(y,\lambda) := y^{(n)} + \lambda^n y + \{\text{возмущение}\},$$

и распадающимися краевыми условиями (3). Эта теорема в случае аналитических коэффициентов д.в. была доказана в 1973 г. А.П. Хромовым и в 1976 г., независимо, W. Eberhard'ом . В 1976 г. А.А. Шкаликов доказал эту теорему в случае суммируемых коэффициентов. Случай произвольной главной части д.в. был рассмотрен G. Freiling'ом и С.А. Тихомировым в конце 80-х годов прошлого века.

Исследование вопроса об n- и m-кратной полноте и неполноте к.ф. пучка $L(\lambda)$ вида (1), (3), д.в. которого имеет постоянные коэффициенты, а краевые условия - полураспадающиеся, провел А.И. Вагабов в работах 1981-1987 гг.

Далее будут использоваться известные определения собственных значений пучка, собственных и присоединённых функций или, кратко, корневых функций, призводных m-цепочек, которые построены по системе к.ф., которые можно найти в работах[3,4]

Определение 1. Система Y к. ф. пучка $L(\lambda)$ называется *m-кратно полной в пространстве* $L_2[0,1]$ $(0 < m \leq n)$, если из условия ортогональности вектор-функции $h \in L_2^m[0,1]$: $=\underbrace{L_2[0,1] \oplus ... \oplus L_2[0,1]}_{m\ \text{раз}}$ всем производным m-цепочкам, соответствующим системе Y, следует равенство $h = 0$.

Будем считать далее, что краевые условия (5) нормированы и порядок i-го краевого условия есть $\varkappa_i (0 \leq \varkappa_i \leq n-1)$, то есть будем рассматривать

[3] Келдыш, М.В. *О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений* // Докл. А Н СССР.–1951. – т. 77.–С. 11-14.

[4] Наймарк, М.А. *Линейные дифференциальные операторы.*–М.:Наука, 1969.–528 с.

краевые условия вида

$$U_i^0(y,\lambda) \equiv U_{i0}^0(y,\lambda) + U_{i1}^0(y,\lambda) := \sum_{j+s\le\varkappa_i} \lambda^s(\alpha_{ijs}y^{(j)}(0) + \beta_{ijs}y^{(j)}(1)) = 0, \quad (6)$$

где $i = \overline{1,n}$. Суммарный порядок краевых условий (6) обозначим буквой $\varkappa$, то есть по определению $\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + ... + \varkappa_n$.

Пучок (4), (6) будем обозначать $L_0(\lambda)$.

Рассмотрим уравнение $\ell_0(y,\lambda) = 0$. Предположим, что корни $\{\omega_k\}_{k=1}^n$ его характеристического уравнения $\sum\limits_{j+s=n} p_{js}\omega^j = 0$ попарно различны и отличны от нуля. Система функций $y_j(x,\lambda) = \exp(\lambda\omega_j x)$, $j = \overline{1,n}$. Введем в рассмотрение следующие вектор-столбцы при $j = \overline{1,n}$

$$H_j(\lambda) \equiv (h_{1j}, h_{2j}, ..., h_{nj}(\lambda))^T := \left(U_1^0(y_j,\lambda), U_2^0(y_j,\lambda), ..., U_n^0(y_j,\lambda)\right)^T,$$

$$V_j(\lambda) \equiv (v_{1j}, v_{2j}, ..., v_{nj}(\lambda))^T := \left(U_{10}^0(y_j,\lambda), U_{20}^0(y_j,\lambda), ..., U_{n0}^0(y_j,\lambda)\right)^T,$$

$$W_j(\lambda) \equiv (\omega_{1j}, \omega_{2j}, ..., \omega_{nj}(\lambda))^T := e^{-\lambda\omega_j}\left(U_{11}^0(y_j,\lambda), U_{21}^0(y_j,\lambda), ..., U_{n1}^0(y_j,\lambda)\right)^T.$$

С использованием этих обозначений характеристический определитель пучка $L_0(\lambda)$ будет иметь вид

$$\Delta(\lambda) = det\left(U_i^0(y_j,\lambda)\right)_{i,j=1}^n = |H_1(\lambda)H_2(\lambda)...H_n(\lambda)| =$$
$$= \left|V_1(\lambda) + e^{\lambda\omega_1}W_1(\lambda), V_2(\lambda) + e^{\lambda\omega_2}W_2(\lambda), ..., V_n(\lambda) + e^{\lambda\omega_n}W_n(\lambda)\right|. \quad (7)$$

Обозначим через Ω множество, состоящее из 0 и всевозможных сумм различных чисел ω_j, $j = \overline{1,n}$ по одному, по два и так далее до n слагаемых. Далее совпадающие точки $\omega \in \Omega$, полученные разными способами (разные слагаемые в сумме), считаем разными точками Ω. Тогда, раскладывая определитель (7) на сумму определителей, получим

$$\Delta(\lambda) = \lambda^\varkappa \sum_{\omega\in\Omega} F^\omega(\lambda)e^{\lambda\omega},$$

где

$$F^\omega(\lambda) = F_0^\omega + \frac{1}{\lambda}F_1^\omega + ... + \frac{1}{\lambda^\varkappa}F_\varkappa^\omega.$$

Векторы с крышками имеют следующий вид при $j = \overline{1, n}$

$$\hat{V}_j(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} v_{1j}(\lambda), ..., \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} v_{nj}(\lambda) \right)^T, \hat{W}_j(\lambda) = \left(\frac{1}{\lambda^{\varkappa_1}} \omega_{1j}(\lambda), ..., \frac{1}{\lambda^{\varkappa_n}} \omega_{nj}(\lambda) \right)^T.$$

Для $r \in \{0, 1, ..., \varkappa\}$ через $(M_\Delta)_r$ обозначим выпуклую оболочку тех точек ω, для которых $[F^\omega(\lambda)]_r \not\equiv 0$. Ясно, что

$$(M_\Delta)_0 \subset (M_\Delta)_1 \subset ... \subset (M_\Delta)_\varkappa \subset M.$$

Определение 2. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *регулярным*, если $(M_\Delta)_0 = M$.

Определение 3. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *почти регулярным*, если $(M_\Delta)_\varkappa = M$.

Определение 4. Пучок $L_0(\lambda)$ назовем *слабо нерегулярным*, если многоугольник $(M_\Delta)_\varkappa$ имеет не менее двух точек касания с M, причем перпендикуляры, проеденные из некоторой фиксированной внутренней точкой к сторонам M, на которых лежат точки касания (если точка касания - вершина, то таких перпендикуляров два), разбивают комплексную плоскость на секторы раствора $< \pi$. Если M есть отрезок, то пучок $L_0(\lambda)$ называем *слабо нерегулярным*, когда $(M_\Delta)_\varkappa = M$..

Из определений следует, что регулярный и почти регулярный пучок является в то же время слабо нерегулярным.

Определение 5. Пучок $L_0(\lambda)$, который не удовлетворяет предыдущему определению, назовем *сильно нерегулярным.*

Из результатов статьи [5] следует, что если пучок $L_0(\lambda)$ слабо нерегулярен (или, по другому, нормален), то система его к.ф. n-кратно полна в $L_2[0, 1]$.

Многоугольник $(M_\Delta)_\varkappa$ будем кратко обозначать M_Δ и называть характеристическим многоугольником (х.м.) функции $\Delta(\lambda)$.

Введем в рассмотрение следующее решение уравнения $\ell_0(y, \lambda) = 0$ при

[5] Шкаликов, А.А. *Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях*// Тр. семин. им. И.Г.Петровского.–м.:Изд-во Моск. ун-та.–1983.–№9.–С. 190-229.

$\lambda \neq 0$

$$g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) := \left| \begin{array}{cccc} 0 & \vdots & y_1(x,\lambda) & \ldots & y_n(x,\lambda) \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ -\Gamma(\lambda) & \vdots & H_1(\lambda) & \ldots & H_n(\lambda) \end{array} \right| \qquad (8)$$

зависящее от вектор-столбца $\Gamma(\lambda) = (\gamma_1(\lambda), \gamma_2(\lambda), ..., \gamma_n(\lambda))^T$, который является параметром. Функция вида (8) играет важную роль при доказательстве полноты системы к.ф. пучка $L_0(\lambda)$.

Лемма 1. *При $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\Lambda_0$ функции $g(x,\lambda,\Gamma_j(\lambda)), j = \overline{1,n}$, линейно независимы по $x \in [0,1]$ тогда и только тогда, когда линейно-независимы в.-ф. $\Gamma_j(\lambda), j = \overline{1,n}$.*

Лемма 2. *Для фиксированного индекса $j(1 \leq j \leq n)$ имеет место включение $M(V_j) \subset conv\{M_\Delta, \Omega_j\}$.*

Лемма 3. *Для фиксированного индекса $j(1 \leq j \leq n)$имеет место включение $M(W_j) \subset conv\{M_\Delta, \Omega^j\}$.*

Введем

$$H(\lambda,\Gamma(\lambda)) := \int_0^1 g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)) h_m(x,\lambda) dx,$$

По-прежнему считаем, что в.-ф. $\Gamma(\lambda)$ есть полином по λ указанного выше типа. Непосредственно можно убедиться, что векторы

$$\left(\frac{\partial^k g(x,\lambda,\Gamma(\lambda))}{\partial\lambda^k}, \frac{\partial^k(\lambda g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)))}{\partial\lambda^k}, ..., \frac{\partial^k(\lambda^{m-1} g(x,\lambda,\Gamma(\lambda)))}{\partial\lambda^k} \right)^T \Bigg|_{\lambda=\lambda_v}, \qquad (9)$$

где $k \in \overline{0, s_v}$ и $\lambda_v \in \Lambda$, являются производными m-цепочками для к.ф. пучка $L_0(\lambda)$, соответствующих с.з. λ_v кратности $s_v + 1$.

Предположим, что система $Y = \{g_k\}$ всех к.ф. пучка $L_0(\lambda)$ m-кратно $(0 < m \leq n)$ не полна в $L_2[0,1]$. Тогда найдется в.-ф. $h(x) = \left(\overline{h_1}(x), \overline{h_2}(x), ...\right.$ $\left. ..., \overline{h_m}(x)\right)^T \in L_2^m[0,1], h \neq 0$, которая ортогональна в пространстве $L_2^m[0,1]$ всем производным m-цепочкам $\widetilde{g}_k$, построенным по системе к.ф. пучка $L_0(\lambda)$. В частности, h ортогональна векторам (11). Из этой ортогональности следует, что с.з. λ_v, имеющие кратность $s_v + 1$, является нулем кратности не меньше

$s_v + 1$ функции

$$H(\lambda, \Gamma(\lambda)) := \int_0^1 g(x, \lambda, \Gamma(\lambda)) h_m(x, \lambda) dx,$$

где обозначено $h_m(x, \lambda) := h_1(x) + \lambda h_2(x) + ... + \lambda^{m-1} h_m(x)$. Ясно, что функция $H(\lambda, \Gamma(\lambda))$ есть целая функция экспоненциального типа (ц.ф.э.т.) по λ.

Рассмотрим мероморфную функцию

$$\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda)) := \frac{H(\lambda, \Gamma(\lambda))}{\Delta(\lambda)},$$

которая формально имеет полюса в точках $\lambda \in \Lambda$, но, как это было отмечено выше, все эти полюса компенсируются числителем, за исключением случая, когда $\lambda = 0$ является нулем $\Delta(\lambda)$, но не является с.з. или является с.з. меньшей кратности. Такая ситуация может быть, так как используемая ф.с.р. не является такой при $\lambda = 0$. В таком случае дополнительное предположение об ортогональности в.-ф. $h(x)$ в пространстве $L_2^m[0, 1]$ конечному набору в.-ф. из $L_2^m[0, 1]$, позволяет сделать вывод о том, что $\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda))$ есть целой функцией экспоненциального типа

Определение 6. Будем говорить, что вектор-функция $\Gamma(\lambda)$ удовлетворяет условию (α) (обозначим $\Gamma(\lambda) \in (\alpha)$), если в λ-плоскости существуют по крайней мере три луча, исходящие из начала, каждые два соседних из которых имеют между собой угол меньше π и на которых функция $\mathscr{H}(\lambda, \Gamma(\lambda))$ имеет не более чем степенной рост.

Лемма 4. *Либо система к.ф. пучка $\ell_0(\lambda)$ n-кратно полна в $L_2[0, 1]$, либо соответствующая система производных $n-$цепочек $\widetilde{g}_k$, построенная по системе к.ф. пучка $L_0(\lambda)$, имеет бесконечный дефект в $L_2[0, 1]$.*

Теорема 1. *Если существуют $n-$линейно независимых вектор-функций $\Gamma_1(\lambda), \Gamma_2(\lambda), \ldots \Gamma_n(\lambda) \in (\alpha)$, то система к.ф. пучка $L_0(\lambda))$ n-кратно полна в $L_2[0, 1]$.*

С учетом Лемм 2 и 3 очень удобно в качестве $\Gamma_j(\lambda)$ брать векторы $V_i(\lambda)$ и $W_i(\lambda)$.

Следствие 1. *Если* $V_{i_s}(\lambda) \in (\alpha), s = \overline{1,k}, W_{j_t}(\lambda) \in (\alpha), t = \overline{1,l}, k + l \geq n$ *и* $rank(V_{i_1}(\lambda), V_{i_2}(\lambda), ..., V_{i_k}(\lambda), W_{j_1}(\lambda), W_{j_2}(\lambda), ..., W_{j_l}(\lambda)) = n$, *то система к.ф. пучка* $L_0(\lambda)$ n*-кратно полна в* $L_2[0,1]$.

Теорема 2. *Если существуют* m *пар векторов* $\{V_{j_s},(\lambda), W_{j_s}(\lambda)\}, s = \overline{1,m}$ *таких, что* $V_{j_s}(\lambda) \in (\alpha), W_{j_s}(\lambda) \in (\alpha)$, *то имеет место* m*-кратная полнота в* $L_2[0,1]$ *системы к.ф. пучка* $L_0(\lambda)$ *с возможным конечным дефектом.*

В работе был исследован пример пучка 5-го порядка с следующими условиями

$$y'(0) = y''(0) = y(1) = y'(1) = y''(1) + \lambda^2 y(1) = 0$$

с корнями характеристического многочлена $\omega_1 = 1$, $\omega_2 = 2$, $\omega_3 = 5$, $\omega_4 = 9$, $\omega_5 = 3i$.

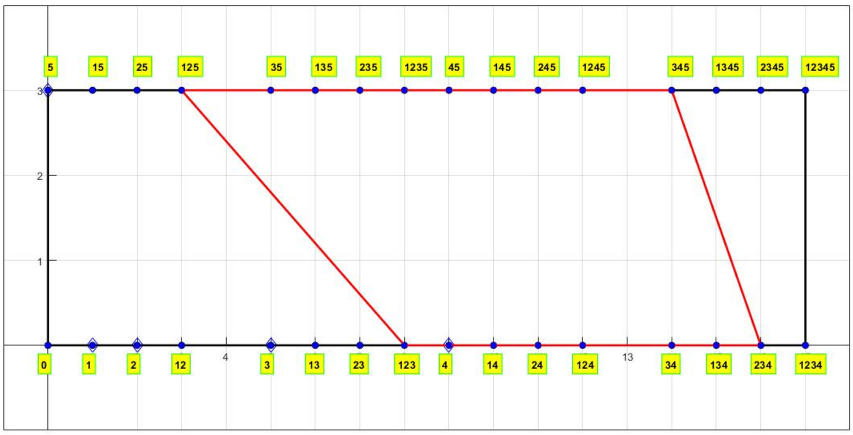

Рис. 1: Характеристический многоугольник M_Δ

На рис. 1 построен характеристический многоугольник M_Δ выделенное красным цветом. Черным цветом выделен многоугольник M.

На рис. 2-3 построены характеристические многоугольники для $M(V_5)$ и $M(W_5)$ соответственно для которого удовлетворяет условие (α) и выполняется теорема 2.

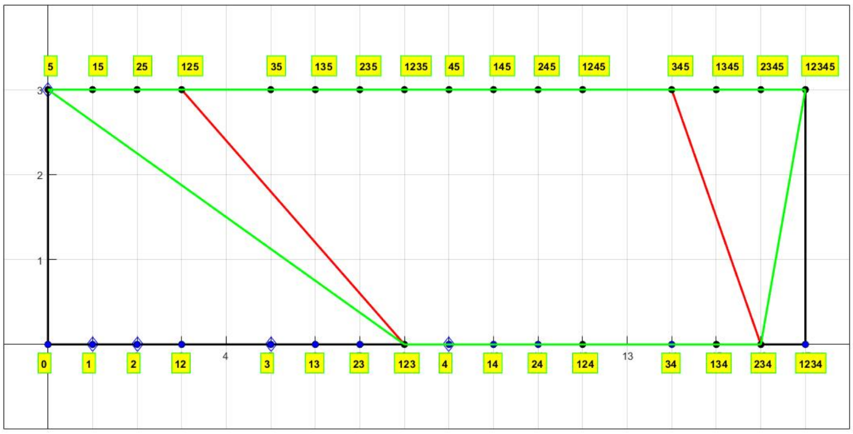

Рис.2 Характеристический многоугольник $M(V_5)$ при $j = 5$

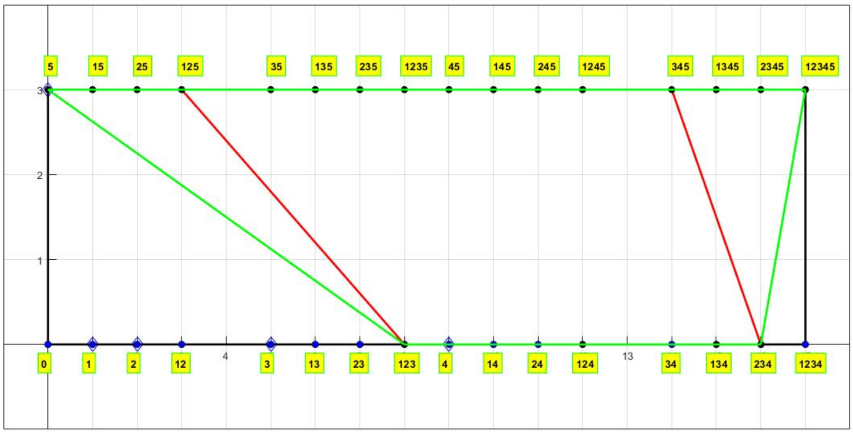

Рис.3 Характеристический многоугольник $M(W_5)$ при $j = 5$

Для данного примера была установлена однократная и двукратная полнота с помощью

Заключение

В представленной работе исследован вопрос об m-кратной полноте ($1 \leq m \leq n$) в $L_2[0,1]$ корневых функций пучка $L(\lambda)$ вида (1)-(3) с постоянными коэффициентами. Работа носит реферативный характер на основе статьи научного руководителя. Более подробно описанная теория была применена к конкретному сильно нерегулярному пучку пятого порядка с распадающимся краевыми условиями. Были построены характеристический многоугольник M_Δ и многоугольник M с помощью пакета прикладных программ MATLAB и MuPAD. В результате рассмотрения данного пучка была показана его однократная и двукратная полнота.