Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и
прикладной математики

Теорема равносходимости для интегрального оператора с инвлолюцией имеющей разрывы

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 411 группы
направления 01.03.02 Прикладная математика
и информатика
Механико-математического факультета
Наумова Артема Александровича

Научный руководитель
Ст.преподаватель _______________ А.В.Голубь

подпись, дата

Зав. кафедрой
Д.ф. – м.н.., профессор _______________ А.П.Хромов

подпись, дата

Саратов 2018

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Многие вопросы современной математики, механики, физики приводят к спектарльному анализу несамосопряженных дифференциальных, интегральных и интегро-дифференциальных операторов. Одна из принципиальных задач спектральной теории это равносходимость разложений по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) оператора и по известным системам функций.
Впервые теорема равносходимости спектральных разложений по с.п.ф. и разложений в обычные тригонометрические ряды Фурье была установлена в работах В.А. Стеклова, Е. Гобсона, А. Хаара для случая дифференциального оператора Штурма-Леувилля.
Многочисленные научные исследования,в том числе и работы современных математиков В.А. Ильина, А.М. Седлецкого, А.А. Шкаликова были посвящены задачам равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям.
А.П. Хромовым впервые были рассмотрены интегральные операторы, ядра которых имеют скачки на линиях *t=i* и *t=1-x*, точнее

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t)f(t)dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t)f(t)dt +$$

$$+\alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t)f(t)dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t)f(t)dt$$

были получены формулы обращения для операторов. Теорема равносходимости для операторов, показанных сверху, была доказана для оператора

$$Af(x) = \int_0^{1-x} A(1-x,t)f(t)dt.$$

В полученной нами теореме равносходимости получилось освободиться от требований довольно трудно проверяемого условия регулярности по Биркгофу граничных условий обратного оператора. Это нам упростило формулировку результата. Результаты явились первыми в исследовании спектральных свойств интегральных операторов вида

$$Af(x) = \alpha_1 \int_0^x A_1(x,t)f(t)dt + \alpha_2 \int_x^1 A_2(x,t)f(t)dt +$$

$$+\alpha_3 \int_0^{1-x} A_3(1-x,t)f(t)dt + \alpha_4 \int_{1-x}^1 A_4(1-x,t)f(t)dt$$

Сейчас существует целый ряд интересных работ и по другим задачам спектрального анализа операторов, которые мы получили выше, при некоторых

ограничениях на $A_i(x,t)$.
$,[5],[21].Af(x) = \int_0^{\Theta(x)} A(\Theta(x),t)\cdot f(t)dt,$где $\Theta(x) = \frac{1}{2}-x$ при $x\in[0,\frac{1}{2}]$ и $\Theta(x)=\frac{3}{2}-x$ при $x\in[\frac{1}{2},1]$.

$$A_0 f(x) = \int_0^{\Theta(x)} f(t)dt,$$

действующий в $L_2[0,1]$. $\Theta(x) = \frac{2k-1}{n}$ при $x\in[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}], k=\overline{1,n}$
Функция $\Theta(x)$ является инволюцией, т.е. $\Theta(\Theta(x)) = x$, причем $\Theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x=\frac{1}{2}$.

Рассмотрим оператор

$$Af(x) = \int_0^{\Theta(x)} A(\Theta(x),t)\cdot f(t)dt, \tag{1}$$

где $\Theta(x)=\frac{1}{2}-x$ при $x\in[0,\frac{1}{2}]$ и $\Theta(x)=\frac{3}{2}-x$ при $x\in[\frac{1}{2},1]$.
Функция $\Theta(x)$ есть инволюция, т.е. $\Theta(\Theta(x)) = x$, причем $\Theta(x)$ терпит разрыв первого рода при $x=\frac{1}{2}$.
Требования на ядро оператора(2):
Функция $A(x,t) = 0$ при tx, $A(x,x-0)\equiv 1$ и $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l}A(x,t)$ непрерывны при $t<x$ и $k+l\le 2$.
Положим $\tilde{A}(x,t) = A(\Theta(x),t)$ при $t<\Theta(x)$ и $\tilde{A}(x,t)=0$ при $t\ge\Theta(x)$. Обозначим компоненты матрицы $B(x,t)$ через

$$B_{ij}(x,t) = \tilde{A}\left(\frac{i-1}{2}+x,\frac{j-1}{2}+t\right), x,t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$$

Приводим вспомогательные леммы и теоремы для доказательства нашей основной в этой работе теоремы.

Лемма 1

Функция

$$\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l}B_{i,j}(x,t)$$

$(i,j=1,2)$, $k+l\le 2$

непрерывна всюду,кроме быть может, $t+x=\frac{1}{2}$ и

$$\left.\frac{\partial}{\partial x}B_{ij}(x,t)\right|_{t=\frac{1}{2}-x\pm 0,}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}B_{i,j}(x,\gamma)(\gamma=0,\frac{1}{2})$$

непрерывно дифференцируемы.

Лемма 2 Если $y(x) = Af(x)$, то $z(x) = Bg(x)$, $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ (12)
где $z(x) = (z_1(x), z_2(x))^{\mathrm{T}}$ (Т-знак транспонирования),
$z_1(x) = y(x)$, $z_2(x) = y\left(\frac{1}{2} + x\right)$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x))^{\mathrm{T}}$, $g_1(x) = y(x)$, $g_2(x) = f\left(\frac{1}{2} + x\right)$, $Bg(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t)g(t)dt$

Лемма 3
Оператор B^{-1} существует тогда и только тогда,когда $rangM = m$, где $M = \binom{E+(\tilde{\varphi},\psi)^{\mathrm{T}}}{\int_0^{\frac{1}{2}} B(0,t)\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}}(t)dt}$, Е-единичная матрица $m \times n$

$(\tilde{\varphi}, \psi) = \{\tilde{\varphi}_j, \psi_k\}_{j,k=1}^{m}$, $\tilde{\varphi}^{\mathrm{T}} = (\tilde{\varphi}_1, ...\tilde{\varphi_m})$.

Лемма 4 Неособой матрицей Г, диагонализирующей матрицу Q^{-1}, то есть $\Gamma^{-1} \cdot Q^{-1} \cdot \Gamma = D = diag(i, -i, i, -i)$, является

$$\Gamma = \begin{pmatrix} i & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & i & 1 \\ i & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{pmatrix}$$

Лемма 5 Существует матрица-функция

$$H(x, \lambda) = H_0(x) + \lambda_{-1} H_1(x)$$

с непрерывно дифференцируемыми компонентами матриц $H_0(x)$, $H_1(x)$, причем $H_0(x)$ невырожден при всех x и диагональна, что преобразование

$$h(x) = H(x, \lambda) \cdot W(x)$$

приводит систему к виду

$$W'(x) + P_1(x, \lambda)W(0) + P_2(x, \lambda)W\left(\frac{1}{2}\right) +$$

$$+P_3(x, \lambda)\omega(x) + NW - \lambda DW(x) = m(x, \lambda)U(W) =$$

$$= M_{0\lambda}W(0) + M_{1\lambda}W\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

где

$$P_1(x, \lambda) = H^{-1}(x, \lambda)P_1(x)H(0, \lambda),$$

$$P_2(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)P_2(x)H\left(\frac{1}{2},\lambda\right),$$

$$P_3(x,\lambda) = \lambda^{-1}H^{-1}(x,\lambda)\left[{H_1}'(x) + P_3(x)H_1(x)\right],$$

$$N_\lambda = H^{-1}(x,\lambda)NH(x,\lambda),$$

$$M_{0\lambda} = M_0H(0,\lambda), M_{1\lambda} = M_1H\left(\frac{1}{2},\lambda\right), m(x,\lambda) = H^{-1}(x,\lambda)m(x)$$

Рассмотрим оператор вида

$$A_0f(x) = \int_0^{\Theta(x)} f(t)dt,$$

,действующий в $L_2[0,1]$.

$$\Theta(x) = \frac{2k-1}{n} - x$$

при $x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], k = \overline{1,n}$
Функция $\Theta(x)$ является инволюцией,т.е.

$$\Theta(\Theta(x)) \equiv x$$

и $\Theta(x)$ имеет разрывы первого рода в точках $x = \frac{k}{n}$ и $k = \overline{1,n}$

Теорема
Если

$$y = R_\lambda A_0 f(x) = (E - \lambda A_0)^{-1}A_0f(x),$$

то

$$v'(x) = \lambda Bu(x) + B\Phi(x),$$

$$P_0v(0) + P_1v(\frac{1}{n}) = 0,$$

где

$$v(x) = (v_1(x), ..., v_{2n}(x))^T,$$

$$v_{2k-1}(x) = y\left(\frac{k-1}{n} + x\right),$$

$$v_{2k}(x) = y\left(\frac{k}{n} + x\right), k = \overline{1, n};$$

$$\Phi(x) = (f_1(x), ..., f_{2n}(x))^T,$$

$$f_{2k-1}(x) = f\left(\frac{k-1}{n} + x\right),$$

$$f_{2k}(x) = f\left(\frac{k}{n} + x\right), k = \overline{1, n}, x \in \left[0, \frac{1}{n}\right].$$

Матрица $B = (2n \times 2n)$ имеет на главной диагонали блоки

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Остальные элементы -нули.

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix};$$

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Теорема

Если $v(x)$ удовлетворяет системе (28),(29) и соответствующая однородная система имеет только нулевое решение,то $R_\lambda(A_0)$ существует и

$$R_\lambda(A_0)f() = \left\{v_{2k-1}\left(x - \frac{k-1}{n}\right), x \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right], k = \overline{1, n}\right\}$$

Лемма 7. Собственными значениями матрицы B являются

$$\lambda_{2k+1} = i$$

$$\lambda_{2k} = -i, k = \overline{1,n}$$

Лемма 8 неособой матрицей Г,диагонализирующей матрицу В,т.е.

$$\Gamma^{-1} \cdot B \cdot \Gamma = D = diag(i, -i, ..., i, -i)$$

является матрица, у которой на главной диагонали стоят блоки

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ i & i \end{pmatrix}$$

,остальные элементы равны нулю. Γ^{-1} имеет ту же структуру,только на главной диагонали блоки

$$\begin{pmatrix} -1 & -i \\ 1 & -i \end{pmatrix}$$

Теорема.Если $v(x)$ удовлетворяет предыдущей теореме , то

$$h(x) = \Gamma^{-1} \cdot v(x)$$

удовлетворяет системе

$$h(x) = \lambda D h(x) + \Gamma^{-1} \cdot B \cdot \Phi(x),$$

$$U(h) = P_0 \Gamma h(0) + P_1 h \left(\frac{1}{n}\right) = 0$$

где матрица $\Gamma^{-1}B$ имеет на главной диагонали блоки

$$\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -i & -1 \end{pmatrix}$$

,остальные элементы равны нулю.

$$P_0 \cdot \Gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ i & i & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & i & i & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & i & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & . & . & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & i & i \end{pmatrix}$$

$$P_1 \cdot \Gamma = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & i & i & 0 & 0 & ... & 0 \\ -i & -i & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & -1 & ... & 0 \\ . & . & . & . & . & . & ... & . \\ 0 & 0 & . & . & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & . & . & -i & -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Очевидны следующие леммы

Лемма 9 Вектор-функция

$$g_\lambda Q(x) = \int_0^{\frac{1}{n}} g(x,t,\lambda)Q(t)dt$$

является решением системы

$$h(x) = \lambda Dh(x) + \Gamma^{-1} \cdot B \cdot \Phi(x),$$

Лемма 10Имеет место оценка

$$||g_\lambda Q(x)||_\infty = O(||f||_1)$$

Лемма 11Справедлива оценка

$$||g_\lambda \chi(x)||_\infty = O\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

компоненты вектор-функции $\chi(x)$ являются характеристическими функциями отрезка $[0, \frac{1}{n}]$.

Теорема Теорема равносходимости. Для любой функции $f(x) \in L[0,1]$ и любого $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2n})$ имеет место соотношение

$$\lim_{r\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n} max|S_r(x,f) - \sigma_2(x, f_k)| \right\} = 0$$

где $S_r(x,f)$ частная сумма ряда Фурье , функция $g(x)$ на отрезке $x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$;

$$f_k(x) = f\left(\frac{k-1}{n} + x\right), k = \overline{1,n}, x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной бакалаврской работе рассматривался интегральный оператор с инволюцией,имеющей разрывы. В первой и во второй главе была получена интегро-дифференциальная система для резольвенты интегрального оператора с инволюцией,имеющей разрывы. Основным результатом работы является теорема о равносходимости для простейшего оператора с инволюцией, имющей конечное число разрывов,полученная в третьей главе.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1.Хромов А.П. Интегральные операторы с ядрами,разрывными на ломаных линиях // Матем. Сб.,2006,197:11, с.115-142.

2. Хромов А.П. Об обращении интегральных операторов с ядрами, разрывными на диагоналях // Матем. зам., 64:6 (1998), с.932-942

3.Корнев В.В., Хромов А.П. О равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с ядрами, допускающими разрывы производных на диагоналях // Матем. Сб., 192:10(2001)б с. 33-50

4.Хромов А.П. Теорема равносходимости для интегрального оператора с переменным верхним пределом интегрирования / А.П.Хромов. Метрическая теория функций и смежные вопросы анализа: Сб. статей - С. 255-266

5.Голубь А.В., Хромов А.П. Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с инволюцией,допускающей разрывы // Серия математика,2007

6. В.В.Корнев, А.П.Хромов Оператор интегрирования с инволюцией, имеющей степенную особенность. Математика. Механика. Информатика, 8:4(2008), 459-78:2(2008),733-736.

7.В.В.Корнев, Оператор интегрирования с инволюцией в верхнем пределе интегрирования. Докл. РАН, 422:4(2008).

8.В.В.Корнев, "О сходимости разложений по собственным функциям интегральных операторов с разрывным ядром".Нов.сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:1(2) (2013), 59-62

9.М.Ш.Бурлуцкая, А.П.Хромов, Об одной теореме равносходимости на всем отрезке для функционально-дифференциальных операторов. Нов. Сер. Математика. Механика. Информатика, 13:1(2)

10.О.А.Королева, А.п.Хромов, "Интегральный оператор с ядром,имеющим скачки на ломанных линиях Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 12:2(2012),6-13.

11.В.А. Ильин, "О равносходимости разложений в тригонометрический ряд Фурье и по собственным функциям пучка Келдыша обыкновенных несамосопряженных дифференциальных операторов ДАН СССР, 225:3(1975).

12. Ильин В.А., "О равномерной равносходимости разложений по собственным и присоединенным функциям несамосопряженного обыкновенного дифференциального оператора и в тригонометрический ряд Фурье ДАН СССР, 223:3(1975)

13.Ильин В.А., "Необходимые и достаточные условия базисности пождсистемы собственных уравнений ДАН СССР, 223:3(1975)

14. Ильин В.А., "О приближении функций биортогональным рядом по собственным и присоединенным функциям дифференциальных операторов 1977,206-213

15. Купцов Н.П., "Теория равносходимости для разложений Фурье в пространствах Банаха Матем. заметки , 1:4 (1967),469-474.

16. Курдюмов В.Л., "Интегральные операторы с разрывным ядром Исследования по дифференциальным уравнениям и теории функций. Саратов, 1974, 104-110.

17.Курдюмов В.Л., "О базисности по Риссу корневых векторов интегрального оператора с ядром типа функции Грина Дифференциальные уравнения и вычислительная математика,вып.6

18.Назаров Л.Г., Разложение по собственным функциям одного класса интегральных операторов, Деп. № 1239-76б 1976

19. Хромов А.П., Интегральные операторы с ядрами типа функций Грина, Деп. №4841-72,1972

20.Голубь А.В. Теорема равносходимости разложений по собственным функциям интегрального оператора специального вида//Сб.науч.тр. Механика. Математика, Саратов:Изд-во Сарат. ун-та,2008. С.15-18