Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и
прикладной математики

Разложение по собственным функциям дифференциального оператора седьмого порядка с нерегулярными краевыми условиями

наименование темы выпускной квалификационной работы полужирным шрифтом

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 411 группы
направления (специальности) 01.03.02 Прикладная математика и информатика
код и наименование направления (специальности)

Механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

Трякиной Вероники Андреевны
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

Ст. преподаватель		О.Ю.Дмитриев
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Зав. кафедрой

д.ф.- м.н., профессор		А.П. Хромов
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2018

Введение

Актуальность темы. Многие вопросы современной математики, механики, физики, естествознания приводят к спектральному анализу дифференциальных, интегральных, интегро-дифференциальных операторов. Возникает необходимость исследования спектральных свойств несамосопряженных операторов таких, как определение собственных значений, асимптотика собственных значений, асимптотика собственных функций, разложение произвольной функции в ряд по системе собственных и присоединенных функций, вопросы полноты и базисности системы собственных и присоединенных функций и так далее.

Важным вопросом в спектральной теории дифференциальных операторов являются вопросы разложения в ряды Фурье по собственным функциям краевой задачи. В отличии от классического случая регулярных краевых условий, случай с нерегулярными условиями полностью не изучен.

Впервые Хромов А.П. рассмотрел нерегулярную задачу на собственные значения третьего порядка (то есть при $n = 3$) с нераспадающимися краевыми условиями вида

$$y^{(3)} + \lambda y = 0,$$

$$\alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0,\ \nu = 1, 2, 3.$$

Было показано, что условие $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$ в случае $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$ является необходимым и достаточным для обращения в нуль коэффициентов при растущих экспонентах, в характеристическом определителе. Исследовался вопрос о разложении функций в биортогональные ряды по собственным функциям задачи при выполнении этого условия. Решение этого вопроса имело принципиальное значение, так как функция Грина рассмотренной задачи в данном случае имеет экспоненциальный рост по λ как при $t \le x$, так и при $t \ge x$, в отличие от случая распадающихся граничных условий, когда функция Грина имеет экспоненциальный рост или при $t \le x$, или при $t \ge x$.

Развивая идеи Хромова А.П., операторы нечетного порядка изучал Дмитриев О.Ю.

В бакалаврской работе рассмотрен пример оператора нечетного седьмого порядка с нерегулярными краевыми условиями. Функция Грина $G(x,t,\lambda)$ в данном случае имеет экспоненциальный рост при больших $|\lambda|$. Как это обычно бывает в случае нераспадающихся нерегулярных краевых условий экспоненциальный рост функции Грина наблюдается как при $t \leq x$, так и при $t \geq x$. Основные трудности связаны с преодолением такого роста, и их удается ликвидировать за счет использования специального функционального уравнения, которому должна удовлетворять разлагаемая функция.

В работе использована схема доказательства, предложенная А.П.Хромовым.

Цель работы: целью моей выпускной бакалаврской работы является исследовать методами, предложенными А.П.Хромовым, краевую задачу седьмого порядка с нерегулярными краевыми условиями специального вида, при этом предполагалось получение асимптотических оценок собственных значений и собственных функций, а также необходимых условий разложения функции в ряды по собственным функциям дифференциального оператора седьмого порядка.

Структура работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех глав, заключения, списка использованных источников и двух приложений. В первой главе дипломной работы приводятся постановка задачи и вводятся основные понятия и определения. Во второй главе дипломной работы изучаются характеристический определитель задачи, получены различные виды и представления характеристического определителя. При этом для упрощения вычислений и получения оценок написана программа подсчета определителей. В результате получена оценка характеристического определителя.

В третьей главе выводятся асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций исследуемой краевой задачи. Этом исследования основываются на изучении миноров характеристического определителя. В четвёртой главе получены необходимые условия разложения функции в ряды по собственным функциям дифференциального оператора седьмого порядка. Часть из этих определителей была посчитана аналитически. И все определители подсчитаны в Среде компьюторной алгебры MuPAD, которая запускается из Матлаб. На первом этапе были найдены коэффициенты краевых условий из дополнительных условий, обеспечивающих нерегулярность задачи. А затем подсчитаны все необходимые определители, показано что значительная их часть равна нулю. Программа из MuPAD, запускается из Матлаб. В Приложении приведены результаты вычисления (Приложение Б) и код программы (Приложение А).

Основное содержание работы.

В первой главе работы формулируется постановка задачи и вводятся основные понятия и определения.

На отрезке [0,1] рассмотривается следующая краевая задача, определенная дифференциальным уравнением 7-го порядка

$$y^{(7)} - \lambda y = 0, \tag{1}$$

и двухточечными двучленными краевыми условиями

$$U_i(y) = a_i y^{(i-1)}(0) + y^{(i-1)}(1) = 0, \quad i = 1, ..., 7, \tag{2}$$

где λ— спектральный параметр, a_i - константы.

Пусть $\lambda = -\rho^7$. Тогда, если ρ пробегает сектор S с вершиной в начале координат, определяемый следующими условиями:

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{7} \leq arg\rho \leq \frac{\pi}{7}; \;\; 0 \leq |\rho| \; < \infty \right\},$$

то λ пробегает комплексную плоскость. Далее мы будем предполагать, что $\rho \in S$. Обозначим через S_1 и S_2 следующие части сектора S,

$$S_1 = \left\{ -\frac{\pi}{7} \leq arg\rho \leq 0; \;\; 0 \leq |\rho| \; < \infty \right\},$$

и

$$S_2 = \left\{ 0 \leq arg\rho \leq \frac{\pi}{7};\ \ 0 \leq |\rho|\ < \infty \right\}.$$

Уравнение (1) или, что то же самое, уравнение $y^{(7)} + \rho^7 y = 0$, где $\lambda = -\rho^7$, в каждом из секторов S_1 и S_2 имеет фундаментальную систему решений:

$$y_j(x) = y_j(x, \rho) = exp(\rho\omega_j x),\ \ \omega_j = \exp\frac{(2j-1)\pi i}{7},\ \ j = 1, ..., 7.$$

Обозначим

$$b_j = \sum_{i=1}^{7} a_i(-\omega_j)^{i-1}, \quad j = \overline{1,7}.$$

Будем рассматривать такие краевые условия (2), для которых выполняется

$$b_1 = b_2 = b_3 = 7,$$
$$b_4 = b_5 = b_6 = b_7 = 0.$$

В этом случае краевые условия (2) нерегулярны по Бирккгофу.

Для рассматриваемой задачи характеристический определитель это

$$\Delta(\rho) = det\ \|U_i(y_j)\|_1^7,$$

где U_i $(i = \overline{1,7})$ – это линейные формы из краевых условий (2), y_j $(j = \overline{1,7})$ – фундаментальная система решений уравнения (1).

Как известно, $\Delta(\rho)$ – целая аналитическая функция переменного ρ. Собственные значения нашей краевой задачи являются нулями функции $\Delta(\rho)$. Если функция $\Delta(\rho)$ тождественно не равна нулю, то задача имеет не более счетного числа собственных значений, которые при этом не могут иметь конечной предельной точки.

Для моей задачи характеристический определитель имеет следующий вид

$$\Delta(\rho) = \begin{vmatrix} a_1 + e^{\rho\omega_1} & a_1 + e^{\rho\omega_2} & \cdots & a_1 + e^{\rho\omega_7} \\ a_2\rho\omega_1 + \rho\omega_1 e^{\rho\omega_1} & a_2\rho\omega_2 + \rho\omega_2 e^{\rho\omega_2} & \cdots & a_2\rho\omega_7 + \rho\omega_7 e^{\rho\omega_7} \\ a_3\rho\omega_1^2 + \rho\omega_1^2 e^{\rho\omega_1} & a_3\rho\omega_2^2 + \rho\omega_2^2 e^{\rho\omega_2} & \cdots & a_3\rho\omega_7^2 + \rho\omega_7^2 e^{\rho\omega_7} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_7\rho\omega_1^6 + \rho\omega_1^6 e^{\rho\omega_1} & a_7\rho\omega_2^6 + \rho\omega_2^6 e^{\rho\omega_2} & \cdots & a_7\rho\omega_7^6 + \rho\omega_7^6 e^{\rho\omega_7} \end{vmatrix}.$$

Для преобразования $\Delta(\rho)$ я избавилась от сумм в элементах определителя, для этого разложила определитель по столбцам на сумму определителей. Заметим, что все определители разбиваются на несколько типов в зависимости от наличия столбцов, содержащих множители $e^{\rho\omega_i}$, и их расположения. Из каждого такого столбца выносится общий множитель $e^{\rho\omega_i}$ и после преобразуется.

Обозначим

$$V_j = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2\omega_j \\ \vdots \\ a_7\omega_j^6 \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} 1 \\ \omega_j \\ \vdots \\ \omega_j^6 \end{pmatrix}, \quad i, j = \overline{1,7}.$$

Введены в рассмотрение ряд определителей, которые выражены через определители через V_j и W_j. А именно,

$$\Delta_0 = |V_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5\ V_6\ V_7|,\ \Delta_1 = |W_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5\ V_6\ V_7|,$$

$$\Delta_2 = |V_1\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5\ V_6\ V_7|,\ \ldots, \Delta_7 = |V_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5\ V_6\ W_7|,$$

$$\Delta_{12} = |W_1\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5\ V_6\ V_7|, \ldots, \Delta_{1234567} = |W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5\ W_6\ W_7|.$$

Часть из этих определителей была посчитана аналитически. И все определители подсчитаны в среде компьюторной алгебры MuPAD, которая запускается из Матлаб. На первом этапе подсчитываем a_j из краевых условий (2) учитывая условия на b_j . В результате получаем значения a_j (приложение Б). На втором этапе полученные a_j подставляем в определители (приложение

Б). Программа из MuPAD, реализующая решение системы и подсчет этих определителей приведена в приложении А.

В моей работе получены различные виды и представления характеристического определителя. В результате получена оценка характеристического определителя.

Теорема 3. *Имеют место следующие оценки*

$$\Delta(\rho) = \rho^{21}\Big[e^{\rho(\omega_1+\omega_7)}\Big(1 + e^{\rho(\omega_3+\omega_4-\omega_1-\omega_7)} + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)\Big]\Delta_{12}, \quad \rho \in S_2;$$

$$\Delta(\rho) = \rho^{21}\Big[e^{\rho(\omega_1+\omega_7)}\Big(1 + e^{\rho(\omega_3+\omega_6-\omega_1-\omega_7)} + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)\Big]\Delta_{12}, \quad \rho \in S_1;$$

где $\omega_j = \exp\frac{(2j-1)\pi i}{7}, \quad j = 1, ..., 7.$

В третьей главе получены асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций исследуемой краевой задачи.

Собственные значения нашей краевой задачи являются нулями характеристического определителя $\Delta(\rho)$. Зная оценки характеристического определителя, находим асимптотику собственных значений.

Теорема 4. *Для собственных чисел λ_k справедливы асимптотические формулы :*

$$\lambda_k = -\rho_k^7, \quad \rho_{k+h} = \rho_k^0 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big), \quad k = 1, 2, 3, ...$$

где h – некоторое целое число, которое не зависит от k и

$$\rho_k^0 = \frac{(2k+1)\,\pi i}{4\,sin\frac{3\pi}{7}sin\frac{\pi}{7}}, \quad \rho \in S_2.$$

$$\rho_k^0 = \frac{(2k-1)\,\pi i}{4\,sin\frac{3\pi}{7}sin\frac{\pi}{7}}, \quad \rho \in S_1.$$

Получение асимптотических формул для собственных функций исследуемой краевой задачи основывается на изучении миноров характеристического определителя.

Теорема 6. *Если $\rho = \rho_k$ – собственное значение, то функция $\varphi(x, \rho_k)$ является собственной функцией задачи. Справедлива следующая оценка*

$$\varphi(x,\rho) = \rho^{21}\Big(e^{\rho(\omega_1+\omega_6+\omega_7)}\Big(e^{\rho\omega_1(x-1)}\Big(\widehat{\Delta}_1 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big) + e^{\rho\omega_2(x+1)}\Big(\widehat{\Delta}_2 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)+$$

$$+e^{\rho\omega_3 x+\rho\omega_4}\Big(\widehat{\Delta}_3 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big) + e^{\rho\omega_4 x}\Big(\widehat{\Delta}_4 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big) + e^{\rho\omega_5 x}\Big(\widehat{\Delta}_5 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)+$$

$$+e^{\rho\omega_6(x-1)}\Big(\widehat{\Delta}_6 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big) + e^{\rho\omega_7(x-1)}\Big(\widehat{\Delta}_7 + O\Big(\frac{1}{\rho}\Big)\Big)\Big)\Big).$$

Основной результат работы содержится в четвертой главе работы.

Теорема 9. *Если ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(x, \rho_k). \tag{3}$$

сходится в точке $x = \alpha$, где $\alpha \in [0, d]$, то он сходится абсолютно и равномерно внутри $T_{1-\alpha}$ к аналитической функции. Если он сходится равномерно на $[\alpha, \beta]$, где $d < \alpha < \beta \leqslant 1$, то он сходится абсолютно и равномерно внутри T_α к аналитической функции.

Теорема 10. *Сумма $f(x)$ ряда*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi(x, \rho_k) \tag{4}$$

удовлетворяет следующему функциональному уравнению:

$$\Phi(x, f) = b_1 f(\omega_2 x) + b_2 f(\omega_6 x) + b_3 f(\omega_1 x) + 7f(1 + xe^{\frac{\pi i}{7}}),$$

где b_j имеет вид

$$b_1 = \sum_{i=1}^{7} a_i(-\omega_1)^{i-1}, \quad b_2 = \sum_{i=1}^{7} a_i(-\omega_2)^{i-1}, \quad b_3 = \sum_{i=1}^{7} a_i(-\omega_3)^{i-1}.$$

Для всех тех x, для которых $\omega_2 x$, $\omega_6 x$, $\omega_1 x$ принадлежат к $T_{1-\alpha}$ в первом случае и T_α во втором случае.

Теорема 11. *Пусть ряд по собственным функциям данного оператора сходится на $[0,1]$ и $f(x)$ его сумма. Пусть μ не является собственным значением нашей краевой задачи. Функция*

$$g(x) = R_\mu f(x) = \int_0^1 g(x,\xi,\mu)\, f(\xi) d\xi,$$

где $R_\mu = (A - \mu E)^{-1}$ – резольвента. Тогда функция $g(x)$ удовлетворяет следующим условиям:

1. Регулярно продолжима в область T_1,

2. Ограничена в угле

$$\left\{ \left| arg z + \frac{\pi}{7} \right| \leq \frac{\pi}{14}; \;\; |z| \;\leq |z_0| \;\right\},$$

3.Удовлетворяет функциональному уравнению $\Phi(g,x) = 0$ при $x \in (0, Re\omega_1)$.

Заключение

В представленной работе исследовалась методами, предложенными А.П.Хромовым, краевая задача седьмого порядка с нерегулярными краевыми условиями специального вида. При этом был изучен характеристический определитель задачи, получены различные виды и представления характеристического определителя. Для упрощения вычислений и получения оценок написана программа подсчета определителей. Получена оценка характеристического определителя. Были получены асимптотические оценки собственных значений и собственных функций, а также необходимые условия разложения функции в ряды по собственным функциям дифференциального оператора седьмого порядка.

Основным результатом работы являются необходимые условия разложения функции в ряды по собственным функциям дифференциального оператора седьмого порядка. Для упрощения выкладок была написана программа в среде компьютерной алгебры MuPAD, которая запускается из Матлаб. В Приложении приведены результаты вычисления (Приложение Б) и код программы (Приложение А).