

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н. Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

**ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ ХААРА К ЧИСЛЕННОМУ
АНАЛИЗУ ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ
ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 218 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Василюка Василия Васильевича

Научный руководитель

д. ф.-м. н., профессор

П. А. Терехин

Заведующий кафедрой

д. ф.-м. н., доцент

С. П. Сидоров

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Цели и задачи работы. В магистерской работе рассматривается экономическая модель Кейнса, описывающая динамику национального дохода на относительно небольшом промежутке времени. Численный анализ данной динамической модели основан на новом методе приближенного решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с использованием функций Хаара. Основная цель магистерской работы — построение алгоритма приближенного решения дифференциального уравнения, его численная реализация и применение к анализу модели Кейнса.

Актуальность темы. Использование нового метода приближенного решения задачи Коши, основанного на использовании функций Хаара, а также приложения метода к численному анализу динамической модели Кейнса делает магистерскую работу несомненно актуальной как в теоретическом, так и практическом аспекте.

Основные результаты. В магистерской работе получены следующие результаты:

- построен алгоритм приближенного решения задачи Коши для линейного дифференциального уравнения первого порядка с использованием функций Хаара;
- осуществлена программная реализация построенного алгоритма решения задачи Коши;
- проведен численный анализ динамической модели Кейнса.

Методы исследования. В магистерской работе использованы методы вычисленной математики, дифференциальных уравнений и теории функций.

Апробация результатов. Результаты работы были представлены на студенческой научной конференции механико–математического факультета, апрель 2018, Саратов, Саратовский государственный университет

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Работа состоит из введения, трех разделов, заключения, списка литературы и двух приложений.

В разделе 1 представлен основной теоретический материал об экономике и моделировании. Подраздел 1.1 дает общее описание модели и моделирования в общем смысле, приводит описательное сравнение экспериментов, моделей и процессов протекающих на самом деле, а не в рамках эксперимента либо моделирования. Простой способ понять модели и принципы построения – это ассимиляции, призванные показать, как работают определенные механизмы, изолируя их от других, мешающих эффектов. Модель фокусируется на конкретных причинах и стремится показать, как они работают с их эффектами через систему. Модель образует искусственный мир, который показывает определенные типы связей между частями целых соединений, которые могут быть трудно различимы, если в исследовании смотреть на реальный мир. Например модель рабочей лошади экономики – это модель спроса и предложения, знакомая всем, кто когда-либо занимался вводным курсом экономики. Это график, состоящий из кривой наклона вниз и наклоненной вверх кривой снабжения, а также цен и величин на осях. Искусственный мир здесь – это тот, который экономисты называют совершенно конкурентным рынком, с большим количеством потребителей и производителей. Подраздел 1.2 описывает такие понятия как система, подсистема, надсистема и экономическая система. Например, экономическая система, понимаемая как национальная, – это совокупность национальных хозяйственных единиц (предприятий, организаций), объединенных производственно-технологическими и организационно-хозяйственными связями. В свою очередь хозяйственная единица может иметь сложную структуру. Экономическая система состоит из двух главных подсистем: производственной и финансово-кредитной. Подраздел 1.3 содержит основное описание динамической модели Кейнса, в этой модели предполагается, что ВВП в следующем году равен совокупному спросу предыдущего года, а совокупный спрос, состоящий из спроса на потребительские и инвестиционные товары, зависит только от ВВП текущего года, при этом период который рассматривается в модели составляет 1 год. В подразделе 1.4 представлена теоретическая информация о классической и Кейнсианской экономике, основных

их составляющих и описание экономики с одной и другой модели. Основные моменты классической и Кейнсианской экономик:

- Классическая экономика подчеркивает тот факт, что свободные рынки приводят к эффективному результату и являются саморегулирующимися.
- В макроэкономике классическая экономика предполагает, что долгосрочная кривая совокупного предложения неэластична; поэтому любое отклонение от полной занятости будет только временным.
- Классическая модель подчеркивает важность ограничения государственного вмешательства и стремления сохранить рынки свободными от потенциальных барьеров для их эффективной работы.
- Кейнсианцы утверждают, что экономика может быть ниже полной мощности в течение значительного времени из-за несовершенства рынков.
- Кейнсианцы отводят большую роль экспансионистской фискальной политике (правительственному вмешательству) для преодоления рецессии.

Заключительный подраздел 1.5 более подробно освещает принципы Кейнсианской экономики, существует три основных принципа, как работает экономика в рамках Кейнсианского представления:

- На совокупный спрос влияют многие экономические, государственные и частные решения. Решения частного сектора иногда могут привести к неблагоприятным макроэкономическим результатам, таким как сокращение потребительских расходов во время рецессии. Эти сбои рынка иногда требуют активной политики со стороны правительства, такой как пакет финансовых стимулов (поясняется ниже). Поэтому Кейнсианская экономика поддерживает смешанную экономику, ориентированную главным образом на частный сектор, но частично управляемую правительством.
- Цены и особенно заработная плата медленно реагируют на изменения спроса и предложения, что приводит к периодическим дефицитам и излишкам, особенно рабочей силы.
- Изменения совокупного спроса, будь то ожидаемые или непредвиденные, оказывают наибольшее краткосрочное воздействие на реальный объем производства и занятость, а не на цены. Кейнсианцы считают,

что, поскольку цены несколько жесткие, колебания в любом компоненте расходов: потреблении, инвестициях или государственных расходах, – приводят к изменению выпуска продукции. Если, например, государственные расходы увеличатся, а все остальные компоненты расходов останутся неизменными, то объем производства увеличится. Кейнсианские модели экономической деятельности также включают мультипликативный эффект; то есть, выпуск изменяется на некоторое кратное увеличение или уменьшение расходов, что вызвало изменение. Если бюджетный мультипликатор больше единицы, то увеличение государственных расходов на один доллар приведет к увеличению выпуска продукции более чем на один доллар.

Кейнсианство – это теория совокупных расходов в экономике (так называемый совокупный спрос) и ее влияния на объем производства и инфляцию. Хотя этот термин использовался (и злоупотреблялся) для описания многих вещей на протяжении многих лет, шесть основных принципов кажутся центральными для Кейнсианства.

Раздел 2 содержит формулировку и основное соотношение динамической модели Кейнса которая является основным предметом исследования в работе. Существует достаточно сложная формула общего решения этого уравнения модели, но мы проанализируем более простой случай, полагая основные параметры задачи a , b и k постоянными числами. Тогда уравнение (0.3) упрощается до линейного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y' = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \quad (0.1)$$

В качестве частного решения уравнения (0.1) возьмем так называемое равновесное решение, когда $Y' = 0$, т. е.

$$Y_p = \frac{b+E}{1-a}.$$

Можно заметить, что эта величина положительна, а общее решение однородного уравнения дается формулой:

$$\tilde{y} = C \exp\left(\frac{1-a}{k}t\right),$$

так что общее решение уравнения имеет вид:

$$Y_p = \frac{b + E}{1 - a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t}.$$

После получения общего решения в подразделе 2.2 описывается система Хаара и ортогональные ряды, а в последующем подразделе 2.3 доказывается абсолютная сходимость рядов по системе Хаара. Далее в подразделе 2.4 описывается возможность различных преобразований системы ортогональных рядов Хаара и применение различных утверждений для ортогональных рядов.

В подразделе 2.5 описывается построение решения для задачи Коши модели Кейнса. Опишем процесс получения решения. Рассмотрим упрощенную балансовую модель Кейса, включающую в себя главные компоненты динамики расходной и доходной частей экономики. Пусть $Y(t)$, $E(t)$, $S(t)$, $I(t)$ – соответственно национальный доход, государственные расходы, потребление и инвестиции. Эти величины рассматриваются как функции от времени. Тогда справедливы следующие соотношения:

$$\begin{cases} Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \\ I(t) = k(t)Y'(t), \end{cases} \quad (0.2)$$

где $a(t)$ – коэффициент склонности к потреблению ($0 < a(t) < 1$), $b(t)$ – автономное (конечное) потребление, $k(t)$ – норма акселерации. Все функции, входящие в уравнения (0.2), положительны. Поясним смысл уравнений (0.2). Сумма всех расходов должна быть равной национальному доходу – этот баланс отражен в первом уравнении. Общее потребление состоит из внутреннего и конечного потребления – эти составляющие показаны во втором уравнении. Наконец, размер инвестиций не может быть произвольным: он определяется произведением нормы акселерации, величина которой характеризуется уровнем технологии и инфраструктуры данного государства, на предельный национальный доход. Будем полагать, что функции $a(t)$, $b(t)$, $k(t)$ и $E(t)$ заданы – они являются характеристиками функционирования и эволюции данного государства. Необходимо найти динамику национального дохода, или Y как функцию от времени t . Подставим выражения для $S(t)$ из второго уравне-

ния и для $I(t)$ из третьего уравнения в первое уравнение. После приведения подобных слагаемых получаем дифференциальное неоднородное линейное уравнение первого порядка для функции $Y(t)$:

$$Y' = \frac{1 - a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t) + E(t)}{k(t)}. \quad (0.3)$$

Первоначально возьмем задачу Коши (0.4) для линейного дифференциального уравнения первого порядка для выведения основных формул решения:

$$\begin{cases} y' + a(x)y = b(x), \\ y(0) = y_0. \end{cases} \quad (0.4)$$

Предполагаем, что $a(x), b(x) \in C[0, 1]$ – непрерывные функции. Будем искать приближенное решение $y_n(x)$ задачи (0.4), представляя его производную в виде полинома по системе Хаара порядка не выше:

$$y' = \sum_{k=0}^{2^n-1} \hat{y}_{n,k} \chi_k(x).$$

Такой полином является ступенчатой функцией:

$$y'(x) = y_{k,x}, k2^{-n} < x < (k+1)2^{-n}, k = 0, \dots, 2^n - 1,$$

которая во внутренних точках разрыва равна полусумме своих односторонних пределов, а в граничных точках 0 и 1 – своему пределу изнутри отрезка $[0, 1]$, т. е. $y'_n(0) = y_{n,0}$, $y'_n(k2^{-n}) = (y_{n,k-1} + y_{n,k})/2$ при $k = 1 \dots 2^n - 1$, $y'(1) = y_{n,2^n-1}$

Восстановим функцию $y_n(x)$ по ее производной:

$$y'_n = y_0 + 2^{-n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{n,j} + y_{n,k}(x - k2^{-n}), k2^{-n} \leq x \leq (k+1)2^{-n}.$$

Потребуем, чтобы функция $y_n(x)$ удовлетворяла дифференциальному

уравнению (0.4) на множестве точек $\{x_{n,k}\}_{k=0}^{2^n-1}$. Получим систему уравнений.

$$y'_n(x_{n,k}) + a(x_{n,k})y_n(x_{n,k}) = b(x_{n,k}), 0 \leq k \leq 2^n - 1,$$

Обозначим за $a_{n,k} = a(x_{n,k})$, $b_{n,k} = b(x_{n,k})$;

$$y_{n,k} + a_{n,k} \left(y_0 + \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{k-1} y_{k,j} + \frac{1}{2^{n+1}y_{n,k}} \right) = b_{n,k}.$$

Решение уравнения (0.4) получим по формуле:

$$y_n(x) = y_n(0) + \int_0^x y'_n(t) dt.$$

Решение $y_n(x)$ сходится к точному $y(x)$: $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n(x) = y(x)$ – сходимость решения обоснована сходимостью рядов по системе Хаара.

Опираясь на полученные до этого формулы и уравнение 0.1 выведем и переобозначим формулы решения нашей задачи:

$$z_{n,k} + a_{n,k} \left(y_0 + \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{k,j} \right) = b_{n,k}, \quad (0.5)$$

(0.5) - рекуррентные соотношения для всех n , а функции:

$$a_{n,k} = \left(\frac{1 - a(x_{n,k})}{k(x_n, k)} \right), b(x_{n,k}) = \left(\frac{E(x_{n,k}) + b(x_{n,k})}{k(x_n, k)} \right), \quad (0.6)$$

были изменены.

В результате получили формулы для численного решения модели:

$$z_{n,k} = b_{n,k} - a_{n,k} \left(y_0 + \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{k-1} z_{k,j} \right),$$

$$z'_n(x) = \sum_{k=0}^{2^n-1} z_{n,k} x_{\left(\frac{i}{2^k}, \frac{i+1}{2^k}\right)}(x),$$

$$z_n(x) = z_n(0) + \int_0^x z'_n(t) dt,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z_n(x) = z(x).$$

Таким образом, получили численное решение задачи Коши модели Кейнса в форме однородного дифференциального уравнения первого порядка.

В разделе 3 размещены основные результаты вычислительных экспериментов в виде таблиц, отражающих динамику экономики. Проведено краткое описание полученных результатов и представлены результаты по проверке построенного нами решения на основе задачи Коши, решенной с использованием метода Хаара, так как нам необходимо было проверить корректность нашего решения для проведения дальнейших численных экспериментов.

Численные эксперименты с моделью Кейнса проводились с использованием следующих параметров и ограничений:

- $Y_0 = 1$ – отражение начального состояния экономики,
- $e \in [-0.8, 0.8]$ – коэффициент колебаний значений в заданных нами функциях, отражающих количество средств, которое затрачивается в обязательном порядке и произвольном,
- $k \in [0.4, 1.0]$ – коэффициент акселерации (акселератор), равный отношению прироста инвестиций к вызвавшему их приросту дохода, потребительского спроса или объема готовой продукции в предшествующем периоде.

Процесс эксперимента заключался в подборе функции a и b , при которых наше численное решение для задачи Коши модели Кейнса давало на выходе правдоподобные результаты. Правдоподобность результатов оценивалась нами на основе изученного экономического материала и наших рассуждений.

В ходе уже практических исследований с применением численных методов и вычислительной техники мы получали различные результаты в виде табличных данных и проводили анализ динамики экономики в зависимости от параметров, заданных в рамках практических исследований и функций в вычислительном алгоритме. Сами результаты же необходимо было еще оценить с точки зрения правдоподобности и возможности таких изменений не в рамках эксперимента, а в рамках какой-то действующей экономической системы; такую оценку мы давали на основе имеющихся знаний полученных при изучении теоретического материала.

Для практических исследований была использована реализация решения нашей задачи на языке C++, на которой проводились начальные исследования и проверка корректности нашего алгоритма решения. Позже программное решение было переписано на языке программирования Go, что позволило упростить практические эксперименты за счет синтаксических и семантических особенностей языка и внесения доработок программного решения которые дали возможность сохранять каждое корректное состояние кода программы и соответствующий результат работы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Работа была посвящена практической работе с моделью Кейнса, но также в ходе были проанализированы теоретические материалы связанные с экономикой, ее динамикой, построению модели экономики. Рассмотрены основные моменты классической и Кейнсианской экономики, какими отличиями они обладают и какие основные факторы выделяют. Изучение экономической теории позволило получить более широкое представление об экономических процессах и моделировании этих процессов и дало возможность проводить некоторую самостоятельную оценку правдоподобности результатов, которые получались в ходе различных практических экспериментов.

В результате практических исследований было получено множество различных результатов, но не все из них могли быть рассмотрены и включены в работу, так как многие из них были далеки от реально возможных показателей. Также были получены и результаты, содержавшие ошибочные либо некорректные данные вычислений. Для включения в работу отобрано не большое количество результатов, которые показались нам наиболее корректными, правдоподобными и ценными. Такие результаты были включены в работу, и был проведен краткий анализ полученных результатов. Дополнительно в работу включены результаты проверки корректности нашего решения и краткое описание процесса проверки решения.