Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и стохастического анализа

Применение генетических алгоритмов к решению задач актуарной математики

АВТОРЕФЕРАТ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 218 группы
направления (специальности) 01.03.02 - Прикладная математика и информатика

Механико – математического факультета

Князевой Марии Алексеевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н. ____________________ Л. В. Борисова

Заведующий кафедрой
доцент, д.ф.-м.н. ____________________ С. П. Сидоров

Саратов 2018

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы исследования. В условиях рыночных отношений представляют особый интерес принципиально новые возможности экономического анализа, в котором проблема оценки и учета экономического риска приобретает самостоятельное теоретическое и, главное, прикладное значение как важная часть менеджмента, теории и практики управления.

Рассмотрение вопросов финансовых рисков потребовало привлечения аппарата финансовой математики. В науке о финансах, являющейся лишь частью всей экономики, как в никакой другой, важна оценка действующим лицом (инвестором, участником рынка и т.п.) дохода и риска финансовой операции. Финансовые риски – это спекулятивные риски, для которых возможен как положительный, так и отрицательный результат. Их особенность проведения таких операций, которые по своей природе являются рискованными.

Под портфелем понимается набор инвестиций в ценные бумаги, обращающиеся на финансовом рынке. Подход Марковица к инвестициям с точки зрения современной теории формирования портфеля начинается с предположения, что инвестор в настоящий момент времени имеет конкретную сумму денег для инвестирования. Эти деньги будут инвестированы на определенный промежуток времени, который называется периодом владения. В конце периода владения инвестор продает ценные бумаги, которые были куплены в начале периода, после чего-либо использует полученный доход (либо делает то и другое одновременно). Поскольку портфель представляет собой набор различных ценных бумаг, это эквивалентно поиску эффективных из набора достижимых портфелей. Поэтому подобную проблему часто называют проблемой выбора инвестиционного портфеля.

Принимая решение инвестор должен иметь в виду, что доходность ценных бумаг (и, таким образом, доходность портфеля) в предстоящей период владения неизвестна. Однако инвестор может оценить ожидаемую (или среднюю) доходность различных ценных бумаг, основываясь на некоторых предположениях, а затем инвестировать средства в бумагу с наибольшей ожидаемой доходностью. Марковиц отмечает, что это будет в общем неразумным решением, так как типичный инвестор хотя и желает, чтобы «доходность была высокой», но одновременно хочет, чтобы «доходность была бы настолько определенной, насколько это возможно». Это означает, что инвестор, стремясь одновременно максимизировать ожидаемую доходность и минимизировать неопределенность, имеет две противоречащие друг другу цели, которые должны быть сбалансированы при принятии решения о покупке. Подход Марковица к принятию решения дает возможность адекватно учесть обе эти цели.

Существует три основных модели формирования оптимального портфеля: модель Марковица, модель Тобина и модель Шарпа, которая также известна под названием рыночная модель. Решение для этих моделей может быть получено с помощью методов квадратичного программирования.

Обычно на рынке предлагается огромное количество активов, а на число активов портфеля накладывается ограничение – кардинальность числа активов. Введение ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования. Поскольку для данной задачи трудно найти оптимальное решение, многие исследователи и трейдеры используют эвристики, т.е. неточные методы решения задач в этой области. Один из таких методов – это генетический алгоритм. Число активов на рынке может быть очень большим и для эффективного решения задачи отыскания оптимального портфеля генетический алгоритм целесообразно сделать параллельным.

Результаты работы были предоставлены на студенческой научной конференции механико – математического факультета, апрель 2018, Саратов, Саратовский государственный университет. Кроме того, результаты опубликованы в статье [7].

Цели и задачи исследования. Целью выпускной квалификационной работы является разработка программы для нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с ограничением на кардинальность числа активов с помощью параллельного генетического алгоритма, проведение вычислительных экспериментов и анализ полученных результатов.

Для достижения поставленной в выпускной квалификационной работе цели нами поставлены и решены следующие задачи:

- Изучены основные портфельные теории;
- Рассмотрены методы оценки привлекательности инвестированных процессов;
- Проанализирован поиск компромисса между доходностью и риском для рационального выбора инвестиционного портфеля;
- Рассмотрены модели оптимального портфельного инвестирования, дополненные ограничениями на кардинальность;
- Определена пошаговая работа генетического алгоритма;
- Разработана программа для нахождения оптимального портфеля ценных бумаг с ограничением на кардинальность числа активов с помощью параллельного генетического алгоритма;
- Выполнены вычислительные эксперименты.

Объект и предмет исследования. Объектом выпускного квалификационного исследования является финансовая деятельность инвестора, пытающегося приумножить собственный капитал. Предметом исследования выступает методология количественного анализа процессов инвестирования и решение задачи средствами ЭВМ.

Методы исследования. В работе применены методы математического анализа, методы количественного анализа финансового риска. Программа написана на языке Java, в качестве среды разработки использовалась IntelliJIDEA 14.

Теоретическая база исследования. Выпускная работа написана при использовании фундаментальной литературы по финансовым инвестициям, монографий и учебно-практических пособий по финансовой математике, классических трудов по основным понятиям и методологиям объектно-ориентированного программирования на языке Java.

Библиографический список представлен в конце работы.

Структура работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, восьми разделов, заключения, списка литературы и приложений.

В первом разделе даны основные понятия портфельного инвестирования. Приведены значимые характеристики ценных бумаг и их совокупность.

Рассматривается портфель из *n* активов. Пусть x_i - доля общих вложений, инвестированных в *i-ю* ценную бумагу. Все доли являются неслучайными величинами, удовлетворяющие условию

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

Доходность портфеля определяется как средневзвешенное значение доходностей ценных бумаг, включенных в портфель. В качестве весов используются доли x_i

$$r_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i$$

С учетом правил вычисления математического ожидания, ожидаемая доходность портфеля равна:

$$\overline{m}_p = E[r_p] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i] = \sum_{i=1}^{n} E[x_i \cdot r_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E[r_i] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{m}_i$$

Отклонение доходности портфеля от ожидаемого значения запишется в виде следующей формулы:

$$r_p - \overline{m}_p = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_i - \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \overline{m}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - \overline{m}_i)$$

Математическое ожидание квадрата этого отклонения определяет дисперсию портфеля:

$$V_p = E[(r_p - \overline{m}_p)^2] = E[\sum_{i=1}^{n} x_i (r_i - \overline{m}_i) \cdot \sum_{j=1}^{n} x_j (r_j - \overline{m}_j)] =$$

$$= E[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j E[(r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)] = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j V_{ij}$$

где $V_{ij} = E[(r_i - \overline{m}_i)(r_j - \overline{m}_j)]$ - ковариация доходностей *i*-го и *j*-го активов, показывающая линейность связи доходностей ценных бумаг между собой. В случае если *i* = *j*, то ковариация превращается в дисперсию доходности *i*-той ценной бумаги.

Второй раздел посвящен моделям оптимального портфельного инвестирования. В этом разделе приведена постановка задачи оптимизации структуры портфелей Г. Марковица, Дж. Тобина и У. Шарпа.

Оптимальную структуру портфеля, полученную из решения задачи Марковица, можно представить и в аналитическом виде:

$$X = V^{-1} \cdot \frac{\overline{m}_p (I \cdot J_{12} - m \cdot J_1) + m \cdot J_{12} - I \cdot J_2}{J_{12}^2 - J_1 J_2},$$

где $J_1 = I^T VI$, $J_2 = m^T V^{-1} m$, $J_{12} = I^T V^{-1} m$,

$V = (V_{ij})$ – ковариационная матрица размерностью $n \times n$;

m – вектор-столбец ожидаемых доходностей размерностью $n \times 1$;

I – единичный вектор-столбец размерностью $n \times 1$;

X – вектор-столбец неизвестных долей размерностью $n \times 1$.

Модель Тобина включает как рисковые, так и безрисковые ценные бумаги. Обозначим через x_0 долю безрисковых вложений с гарантированной доходностью r_0, через $X = (x_1, ..., x_n)^T$ – вектор долей вложений в рисковые активы, тогда задача выбора оптимальной структуры комбинированного портфеля, состоящего из безрискового актива и *n* рисковых активов, формулируется следующим образом: найти вектор *X*, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$V_p = X^T VX,$$

и удовлетворяет ограничениям

$m^T X + r_0 x_0 = \overline{m}_p$, $I^T X + x_0 = 1$.

$$X = \frac{V^{-1}(m - r_0 I)}{g^2} (\overline{m}_p - r_0).$$

Модель Шарпа (рыночная модель) предполагает, что с ростом рыночного индекса, вероятно, будет расти и цена акции, а с падением рыночного индекса, соответственно падать.

Линейная регрессионная модель позволяет представить взаимосвязь между доходностями в следующем виде:

$$r_j = \alpha_j + \beta_j \cdot r_I + \varepsilon_j,$$

где r_j - доходность ценной бумаги jза некоторый период,

r_I - доходность на рыночный индекс за этот же период (определяется, так же как и доходность любой ценной бумаги), α_j - коэффициент смещения,

β_j - коэффициент наклона,

ε_j - случайная погрешность.

В третьем разделе рассматривается задача оптимального портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность.

Рассмотрим модели портфельного инвестирования, дополненные ограничениями на кардинальность, т.е. на максимальное количество активов в портфеле.

Подход Марковица стал базовым механизмом для многих систем портфельной аналитики и планирования в построении эффективных границ, которые можно рассматривать как набор оптимальных комбинаций в условиях неопределенности. Решение задачи Марковица предполагает, что портфель может содержать любое количество активов из предложенного набора в сколь угодно малых или больших долях. Однако это не соответствует реальности. Обычно на рынке предлагается огромное количество активов, а на число активов портфеля накладывается ограничение – кардинальность числа активов.

Введение единственного ограничения на кардинальность числа активов, присутствующих в портфеле, меняет классическую модель квадратичной оптимизации на смешанно-целочисленную задачу квадратичного программирования, которая является NP-сложной.

Введем обозначения:

n – общее число доступных активов;

K – необходимое количество активов в выбранном портфеле;

$\overline{m}_i$ – ожидаемая доходность актива i, $i = 1,...,n$;

V_{ij} – ковариация между доходностью активов i и j, $i = 1,...,n$, $j = 1,...,n$;

$\overline{m}_p$ – необходимый уровень ожидаемой доходности;

Переменными модели являются:

x_i – доля от общего объема инвестиций, вложенных в актив i;

δ_i –переменная, показывающая включается ли актив в портфель. Принимает значения: 1, если актив в портфеле, и 0 в противном случае (доля x_i также равна нулю).

Задача выбора оптимальной структуры портфеля с ограничениями на кардинальность формулируется следующим образом: найти вектор долей *X*, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \ ,$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i x_i = \overline{m}_p \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_i = K \ .$$

Для модели Тобина задача выбора портфеля с ограничением на кардинальность формируется следующим образом: найти вектор долей *X*, который минимизирует дисперсию портфеля:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} V_{ij} x_i x_j \ ,$$

при ограничениях:

$$\sum_{i=1}^{n} \overline{m}_i x_i + r_0 x_0 = \overline{m}_p \ , \qquad \sum_{i=1}^{n} x_i + x_0 = 1 , \qquad \sum_{i=1}^{n} \delta_i = K \ ,$$

В этом портфеле присутствует *K* рисковых активов и один безрисковый.

Для модели Шарпа задача выбора портфеля с ограничением на кардинальность формируется следующим образом: найти вектор долей *X*, который минимизирует портфельный риск:

$$V_p = \left[\sum_{j=1}^{n} x_j \beta_j\right]^2 \sigma_I^2 + \sum_{j=1}^{n} x_j^2 \sigma_{\varepsilon j}^2$$

при ограничениях:

$$\sum_{j=1}^{n} x_j \overline{m}_j = m_p, \qquad \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} \delta_j = K$$

В четвертом разделе дано понятие генетического алгоритма, а также приведены три основных принципа, которые составляют ядро эволюционных вычислений.

Первый принцип основан на концепции выживания сильнейших особей и естественного отбора по Дарвину.

Второй принцип обусловлен тем фактом, что хромосома потомка состоит из частей, полученных из хромосом родителей.

Третий принцип основан на концепции мутации.

Для нетривиальных задач выполнение одного репродуктивного цикла в генетическом алгоритме требует значительных вычислительных ресурсов Вычисление значения фитнесс-функции для каждой особи часто является самой трудоемкой операцией в генетическом алгоритме. Для повышения эффективности разрабатываются новые методы кодирования особей, генетические операторы кроссинговера и мутации, гибридные и параллельные алгоритмы.

В параллельном генетическом алгоритме на основе модели «рабочий-хозяин» затраты по вычислению значений фитнесс-функций равномерно распределяются по всем процессорам, для которых используется одна и та же фитнесс-функция. Поэтому для n особей и P (одинаковых) процессоров каждому процессору относится n/P особей. Значения фитнесс-функции вычисляются соответствующими (рабочими) процессорами и посылаются в один процессор (хозяин), который собирает всю информацию, обрабатывает и передает ее снова рабочим процессорам. Процессор «хозяин» имеет информацию о значениях фитнесс-функции для всех особей и может генерировать следующее поколение на этой основе.

В пятом разделе приведен классический генетический алгоритм, который состоит из следующих шагов:

1) инициализация, или выбор исходной популяции хромосом;
2) оценка приспособленности хромосом в популяции;
3) проверка условия остановки алгоритма;
4) селекция хромосом;
5) применение генетических операторов;
6) формирование новой популяции;
7) выбор «наилучшей» хромосомы.

Здесь же введено понятие схемы: будем называть схемой множество хромосом, содержащих нули и единицы на некоторых, заранее определенных позициях.

Приведены примеры построения схем.

В шестом разделе рассматривается генетический алгоритм для решения задачи оптимального портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность. Работа генетического алгоритма состоит в выполнении следующих шагов:

1. Кодирование. Используется *двоичное кодирование*. Популяция имеет фиксированный размер $P = s^2$ портфелей, s есть некоторое натуральное число. Элементами популяции (особями) являются наборы $\delta = (\delta_1,...,\delta_n) \in \Delta_n(K)$, т.е. портфель состоит из n генов, каждый из которых представим битом. Если он равен единице, то актив, соответствующий номеру бита, присутствует в портфеле, в противном случае - отсутствует. В портфеле ровно K рисковых активов.

2. Генерация начальной популяции. Она происходит путем генерации P элементов случайным образом. Для гарантированного решения задачи $P(\delta)$ необходимо, чтобы портфель включал в себя часть активов, имеющих доходность, более высокую, чем $\overline{m}_p$, так и часть активов с доходностью меньшей, чем $\overline{m}_p$.

3. Отбор. Используется *отбор на основе усечения*. Для каждого элемента δ текущей *i*-ой популяции решается оптимизационная задача $P(\delta)$ и находится соответствующее значение $P_{\min}(\delta)$. Портфели сортируются в порядке увеличения риска (дисперсии) и берутся первые *2s* элементов этого упорядоченного списка, чтобы на их основе составить новую популяцию для следующего поколения, т.е. выбираются $2s << P$ элементов текущей *i*-й популяции с наименьшим значением $P_{\min}(\delta)$. Через A_i обозначается множество особей, полученных в результате отбора на шаге *i*. После чего с помощью *панмиксии* (случайным образом) отбираются *s* элементов множества A_i. Полученное множество обозначается через $A_{1,i}$. Множество остальных элементов обозначается через $A_{2,i}$.

4. *Скрещивание*. Используется особый оператор скрещивания, при котором каждой паре элементов (ε, δ), $\varepsilon \in A_{1,i}$, $\delta \in A_{2,i}$, ставится в соответствие элемент (потомок) γ по следующим правилам:

✓ если $\varepsilon_j = 1$ и $\delta_j = 1$, то $\gamma_j = 1$, $(1 \le j \le n)$. То есть, если актив присутствует в обоих родительских портфелях, то он присутствует и в потомке;

✓ если $\varepsilon_j = 0$ и $\delta_j = 0$, то $\gamma_j = 0$, $(1 \le j \le n)$. То есть, если актив отсутствует в обоих родительских портфелях, то он отсутствует и в потомке;

✓ если $\varepsilon_j + \delta_j = 1$, $(1 \le j \le n)$, т.е актив присутствует только в одном из родительских портфелей, то его присутствие или отсутствие в потомке будет решено на основе случайного выбора так, чтобы $\sum_{j=1}^{n} \gamma_j = K$.

5. *Мутация*. Данный оператор является стандартным для генетического алгоритма и представляет собой степень случайного изменения элементов с низкой вероятностью. В данном генетическом алгоритме потомок подвергается мутации с вероятностью α посредством случайного выбора одного актива в портфеле-потомке и замены его случайным активом, не представленным в портфеле-потомке, а также в родительских портфелях.

Седьмой и восьмой разделы включают в себя практическую часть. В практической части представлена реализация параллельного генетического алгоритма для нахождения оптимальной структуры портфеля с ограничением на кардинальность. Генетический алгоритм для оценки значения целевой функции использует модели, которые были реализованы ранее.

С помощью написанной программы был проведен ряд вычислительных экспериментов. В качестве исходных данных брались данные о доходностях акций России и США за период с 2012 по 2017 год.

Первый эксперимент предназначался для сравнительного анализа трех моделей, с помощью параллельного генетического алгоритма. Для этого были построены эффективные портфельные границы для всех моделей. Набор активов не фиксирован, а фиксировано только число ценных бумаг в портфеле. Поэтому различным значениям доходности, соответствует различный риск и различная структура портфеля.

Целью второго эксперимента была проверка эффекта диверсификации с помощью параллельного генетического алгоритма.

Третий эксперимент был проведен для оценки производительности работы параллельного генетического алгоритма. Для этого несколько раз запускалась программа при определенном количестве потоков, после чего фиксировалось время работы. Для эксперимента использовались исходные данные очищенных акций. В качестве модели портфельного инвестирования была выбрана модель Марковица.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

За время работы над выпускным проектом были изучены модели формирования оптимального портфеля ценных бумаг, а именно модель Марковица, модель Тобина и модель Шарпа. Указанные модели были программно реализованы и использовались для решения задачи нахождения оптимальной комбинации активов в портфеле. В работе также была рассмотрена задача выбора оптимального портфеля ценных бумаг с ограничением на кардинальность числа активов. Решение этой задачи потребовало изучения генетического алгоритма и необходимых средств параллельного проектирования программ в языке Java. Генетический алгоритм был реализован в параллельном варианте. Его работа базируется на реализациях моделей портфельного инвестирования.

В выпускной квалификационной работе был описан ряд вычислительных экспериментов. В результате экспериментов можно сделать вывод, что все три модели портфельного инвестирования дают примерно одинаковый результат. Исключение составляет модель Тобина, которая предполагает включение в портфель безрискового актива. На практике модель Шарпа или рыночная модель более предпочтительна, т.к. учитывает влияние рынка на доходность активов.

С помощью эксперимента был наглядно продемонстрирован эффект диверсификации. Суть данного эффекта заключается в уменьшении собственного риска портфеля ценных бумаг, путем добавления в него определенных активов. Для этого строилась эффективная портфельная граница, после чего изменялось количество ценных бумаг в портфеле, а потом построение повторялось. Эксперимент проводился как над случайными наборами активов, так и над теми наборами, которые формировались генетическим алгоритмом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Сидоров, С.П. Модели оптимального портфельного инвестирования : учеб.-метод. пособие для студентов механико-математического факультета. / С.П.Сидоров, Е.А.Захарова, А.А.Хомченко, Н.П.Гришина. Саратов: Издательство Сарат. ун-та, 2015. 77 с. ил.

2. Рутковская, Д. Нейронные сети, генетические алгоритмы и нечеткие системы. / Д. Рутковская, М. Пилиньский, Л. Рутковский: Пер. с польск. И. Д. Рудинского. - М.: Горячая линия -Телеком, 2006. - 452 с.

3. Goldberg, D. E., Algorytmy genetyczne i ich zastosowania / D. E. Goldberg, WNT, Warszawa, 1995.

4. Бабешко, Л.О. Математическое моделирование финансовой деятельности: Учебное пособие. М.: Финакадемия, 2008. 192 с.

5. Хомченко, А. А. Решение задачи оптимального портфельного инвестирования с ограничением на кардинальность методами эвристического поиска / А. А. Хомченко, К. Лукас, С. В. Миронов, С. П. Сидоров// Журн. Известия Саратовского университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, вып. 2, ч. 2

6. Борисова, Л. В. Моделирование оптимального инвестиционного портфеля ценных бумаг / Л. В. Борисова, И. Д. Сагаева. Издательство: ИЦ «Наука» (Саратов), 2014. 61-63 с.

7. Борисова, Л.В. Реализация генетического алгоритма для решения задачи оптимального портфельного инвестирования с ограничениями на кардинальность / Л.В. Борисова, М.А. Князева // Сборник материалов VI Международной молодежной научно-практической конференции

"Математическое и компьютерное моделирование в экономике, страховании и управлении рисками" (Саратов 8-11 ноября 2017г.) Саратов ООО Издательство "Научная книга", 2017. 14-18с.