Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теории функций и
стохастического анализа

Производящие ядра функциональных пространств и их приложения к теории обучения

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса 219 группы

направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика»
код и наименование направления

механико-математического факультета
наименование факультета

Сперанского Константина Сергеевича
фамилия, имя, отчество

Научный руководитель:

д.ф.-м.н., профессор		П.А.Терехин
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой:

д.ф.-м.н., доцент		С.П.Сидоров
должность, уч. степень, уч. звание	подпись, дата	инициалы, фамилия

Саратов 2018 г.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы

Задача представления функций рядами по элементам заданной последовательности $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ заключается в нахождении для произвольной функции f из некоторого класса F последовательности коэффициентов $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$ такой, что верно представление

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n.$$

Системой представления называется последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ для которой задача представления разрешима.

С задачей представления тесно связана задача интерполяции. Пусть даны последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. При решении задачи интерполяции требуется найти функцию f из класса F такую, что $f(z_n) = y_n$ для всех n. Задачу восстановления можно назвать задачей точной интерполяции. При решении задачи восстановления требуется *точно* восстановить функцию из определенного класса F по заданной последовательности ее значений $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ в точках $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$.

В банаховых пространствах существуют различные системы представления. В данной работе мы будем использовать теорию фреймов. Фреймы, в отличие от базисов, не требуют единственности коэффициентов в представляющем ряде.

Постановка и решение задач представления и восстановления зависит от пространства которому принадлежит искомая функция. В данной работе мы рассматриваем пространство Харди $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ на открытом диске $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости. Данное пространство является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром K которое называется ядром Сеге. Ядро является функцией двух аргументов - точек единичного диска. Фиксируя один из аргументов $K(\cdot, z_n) \in H^2$ мы дискретизируем ядро в точках $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$.

Мы ответим на вопрос о существовании системы представления в пространстве Харди H^2 на основе последовательности дискретизированных ядер Сеге. Для этого нам потребуется найти, в частности, соответствующую последовательность точек дискретизации ядер $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$. Если система представления существует, то мы сможем говорить о том, что произвольную функцию f из пространства H^2 можно представить в виде ряда по последовательности дискретизировнных ядер

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n K(z, z_n),$$

где $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ - фиксированная последовательность.

Вопрос. Существует ли последовательность точек $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ в открытом единичном диске $\mathbb{D}$ такая, что последовательность дискретизированных ядер Сеге $\{K(\cdot, z_n)\}_{n=1}^{\infty}$ является системой представления в пространстве $H^2(\mathbb{D})$?

В работе Фрикейна, Хоя и Лефевра этот вопрос был сформулирован как открытый.

Актуальность темы

Существует значительное количество исследований, связывающих теорию воспроизводящих ядер и фреймов. Прежде всего стоит упомянуть монографию Партингтона, в которой в том числе рассматривается взаимосвязь между всплесковым преобразованием и воспроизводящим ядром подходящего гильбертова пространства.

Вопрос о существовании фрейма на основе воспроизводящих ядер существенным образом зависит от рассматриваемого пространства. Дюреном приведено построение фрейма Даффина-Шеффера на основе воспроизводящего ядра в пространстве Бергмана и сказано о невозможности построения аналогичного фрейма для пространства Харди H^2.

Джангом и Джангом исследовались воспроизводящие ядра и фреймы в ситуации банахова пространства с внутренним произведением, которое является обобщением скалярного произведения. Фюром, Грохенигом, Хаими, Клотцем и Ромеро изучались вопросы плотности сэмплинга и интерполяции на основе воспроизводящих ядер. Сонг и Йоргенсен решали обратную задачу, заключающуюся в построении ядра по заданному фрейму. Гао, Харрис и Ган изучали прикладные вопросы взаимосвязи фреймов и воспроизводящих ядер.

Следует отметить важный результат из области точного восстановления функций в пространстве Харди, полученный Тотиком. Теорема Тотика утверждает, что если дана последовательность точек единичного диска $\mathbb{D}$, для которой не соблюдается условие Бляшке, то существуют полиномы такие, что любая функция из пространства Харди может быть в пределе представлена как сумма этих полиномов. Однако, приближение полиномами не гарантирует представление функции в виде ряда.

Теория воспроизводящих ядер имеет большое количество приложений в теории машинного обучения. В последние годы растет количество публикаций касательно применения теории фреймов для решения задач оптимизации и машинного обучения.

Исходя из вышесказанного, данная работа сочетает теоретические и прикладные аспекты теории воспроизводящих ядер и фреймов, а также отвечает на открытый вопрос о существовании системы представления в пространстве Харди H^2 на основе воспроизводящих ядер Сеге.

Методы исследования

В работе используются методы и понятия теории функций, функционального анализа, комплексного анализа, гармонического анализа, теории ортогональных рядов, теории приближений и теории линейных операторов в банаховых пространствах. Используются методы численных расчетов в программном пакете Matlab.

Основные результаты

1. Показано, что не существует базиса и фрейма Даффина-Шеффера на основе дискретизированных ядер Сеге в пространстве Харди H^2
2. Построен банахов фрейм на основе дискретизированных ядер Сеге в пространстве Харди H^2
3. Найдено модельное пространство для банахова фрейма и последовательность точек дискретизации воспроизводящего ядра
4. Реализован алгоритм Брегмана для восстановления размытых изображений используя теорию фреймов

Апробация работы

Результаты работы докладывались на следующих научных конференциях и семинарах:

1. XIX Международная Саратовская зимняя школа "Современные проблемы теории функций и их приложения" (2018 г.)
2. XIII Международная Казанская летняя школа-конференция "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (2017 г.)
3. Семинар "Ортогональные ряды" под руководством профессора С.Ф.Лукомского (2018 г.)
4. Ежегодная апрельская конференция сотрудников и аспирантов механико-математического факультета саратовского университета (2017, 2018 г.)

Результаты работы приняты к печати в 1 научном журнале, входящем в Перечень ВАК и опубликованы в 2 изданиях, размещенных в РИНЦ.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Глава 1 является вводной и начинается с формулировки классической *теоремы Рисса* о представлении каждого ограниченного линейного функционала над гильбертовым пространством H в виде скалярного произведения элементов этого пространства.

По определению, *оценочным функционалом* $\delta_x : f \to f(x)$ пространства H над множеством X называется отображение из H в $\mathbb{C}$. Оценочный функционал всегда линеен, но может быть неограничен. В свою очередь, *воспроизводящее ядро* пространства H – это функция двух аргументов $K : X \times X \to \mathbb{C}$, удовлетворяющая свойствам

$$\begin{aligned}
&\forall z_0 \in X, \quad K(\cdot, z_0) \in H,\\
&\forall z_0 \in X, \quad \forall f \in H, \quad f(z_0) = \langle f, K(\cdot, z_0)\rangle.
\end{aligned}$$

Гильбертово пространство H имеет воспроизводящее ядро тогда и только тогда, когда его оценочный функционал является ограниченным.

Возможность построения системы представления существенным образом зависит от свойств функционального пространства, поэтому в дальнейшем будет рассматриваться *пространство Харди* H^2 на единичном диске $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ комплексной плоскости. Это пространство состоит из аналитических функций для которых при $r \to 1$ ограничен интеграл

$$\|f\|_{H^2} = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(re^{it}) \right|^2 \mathrm{d}t \right)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Пространство H^2 имеет ограниченный оценочный функционал и поэтому является гильбертовым пространством с воспроизводящим ядром

$$|f(z)| \leq \|f\|_{H^2} \frac{1}{\sqrt{1 - |z|^2}}, \quad \forall z \in \mathbb{D}, \ \forall f \in H^2.$$

Воспроизводящее ядро пространства H^2 называется *ядром Сеге*

$$K(z, \zeta) = K_\zeta(z) = \frac{1}{1 - \overline{\zeta} z} = \sum_{n=0}^{\infty} \overline{\zeta^n} z^n, \quad z, \zeta \in \mathbb{D}.$$

Ключевым неравенством в пространстве H^2 является *условие Бляшке*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|a_n|)<\infty, \quad a_n\in\mathbb{D}.$$

Нули каждой аналитической и ограниченной на диске $\mathbb{D}$ функции $f \in H^2$ должны удовлетворять этому неравенству. В частности, при выполнении условия Бляшке можно построить аналитическую функцию из H^2 с нулями в предопределенных точках $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$, которая называется *произведением Бляшке*.

Хорошо известно, что последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ *полна* в пространстве F, если замыкание её линейной оболочки совпадает со всем пространством F. Последовательность $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F$ *минимальна* в F, если каждый элемент последовательности не принадлежит замыканию линейной оболочки остальных элементов.

Мы приводим доказательства широко известных фактов о том, что система $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ не может быть одновременно полной и минимальной.

Предложение 1. Система $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ полна тогда и только тогда, когда точки $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ не удовлетворяют условию, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\zeta_n|)=\infty.$$

Предложение 2. Система $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ минимальна тогда и только тогда, когда точки $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяют условию Бляшке, то есть

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-|\zeta_n|)<\infty.$$

Поскольку базис является полной и минимальной системой, то можно сделать вывод о невозможности построения базиса пространства H^2 на основе дискретизированных ядер Сеге $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$.

В главе 2 мы переходим к системам представления более общего вида. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset H$ ненулевых элементов сепарабельного гильбертова пространства H называется *фреймом Даффина-Шеффера*, если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любого вектора $f \in H$

$$A\|f\|_H^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\langle f, \varphi_n \rangle|^2 \leq B\|f\|_H^2.$$

Фрейм Даффина-Шеффера автоматически является системой представления в H. Однако, система из нормированных ядер Сеге $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, дискретизированных в попарно различных точках $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$

$$e_n = (1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{2}} K_{z_n},$$

не может быть фреймом Даффина-Шеффера, поскольку верхнее фреймовое неравенство противоречит полноте системы.

Предложение 3. В пространстве Харди H^2 не существует фрейма Даффина-Шеффера на основе дискретизированных ядер Сеге $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Для построения системы представления перейдем к более общему определению фрейма. Система $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ называется *банаховым фреймом* в банаховом пространстве F относительно модельного пространства X с сопряженным пространством $Y = X^*$ если существуют постоянные $0 < A \leq B < \infty$ такие, что для любого непрерывного линейного функционала $g \in G = F^*$ последовательность его коэффициентов Фурье удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \leq \|\{\langle \varphi_n, g \rangle\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \leq B\|g\|_G.$$

Банахово пространство X, элементами которого являются числовые последовательности $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется модельным если система канонических ортов $\{\epsilon_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в X.

Для банахова фрейма справедлива теорема о представлении. Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ является банаховым фреймом в пространстве F относительно модельного пространства X, то для любой функции $f \in F$ существует числовая последовательность $\{c_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что $f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n$.

В главе 3 представлены основные результаты. В качестве точек дискретизации ядра Сеге рассмотрим точки $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$, расположенные на окружностях с радиусами $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. На каждом радиусе r_k размещается n_k точек

$$z_n = z_{k,j} = r_k e^{\frac{2\pi i j}{n_k}}, \quad j = 0, \ldots, n_{k-1}, \quad k = 1, 2 \ldots,$$

а также примем, что

$$n_k = 2^k, \quad r_k = 1 - \frac{1}{2^k}, \quad k = 1, 2 \ldots.$$

В теореме A докажем вспомогательный результат об эквивалентности конечномерных норм для ядер Сеге $\{e_j\}_{j=0}^{n-1}$, дискретизированных в точках $\{z_j\}_{j=0}^{n-1} \in \mathbb{D}$ на одном радиусе r.

Теорема A. Для всех $n \in \mathbb{N}$ и $r \in (0,1)$ выполняются неравенства

$$\frac{r^{2n} n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2 \leq \left\| \sum_{j=0}^{n-1} \xi_j e_j \right\|_{H^2}^2 \leq \frac{n(1-r^2)}{1-r^{2n}} \sum_{j=0}^{n-1} |\xi_j|^2.$$

В теореме B покажем, каким должно быть модельное пространство, чтобы представляющий ряд на основе нормированных дискретизированных ядер Сеге сходился безусловно.

Теорема B. Пусть точки дискретизации $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ имеют выбранный выше вид. Тогда следующие условия эквивалентны:

(a) для коэффициентов $\xi_n = \xi_{k,j}$ ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ выполняется условие

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n_k - 1} |\xi_{k,j}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} < \infty$$

(b) ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ абсолютно сходится по блокам в H^2

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\| \sum_{j=0}^{n_k - 1} \xi_{k,j} e_{k,j} \right\|_{H^2} < \infty$$

При выполнении этих условий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n e_n$ сходится в H^2 безусловно.

В теореме C докажем, что система дискретизированных ядер Сеге является банаховым фреймом относительно модельного пространства с комбинированной нормой.

Теорема C. Пусть точки дискретизации $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{D}$ имеют выбранный выше вид. Тогда последовательность нормированных дискретизированных ядер Сеге

$$e_n = (1 - |z_n|^2)^{\frac{1}{2}} K_{z_n}$$

является банаховых фреймом в H^2 относительно модельного пространства

$$X = \left(\bigoplus_{k=1}^{\infty} l_{n_k}^2 \right)_{l^1}.$$

В главе 4 рассматривается задача восстановления изображения по его размытой версии с помощью теории фреймов. Пусть $f \in \mathbb{R}^n$ - исходное изображение, тогда $g \in \mathbb{R}^n$ - размытое изображение

$$g = Bf + \eta,$$

где $\eta \in \mathbb{R}^n$ - вектор шума и B - линейный оператор размытия.

Эту задачу можно решать относительно не самого изображения, а коэффициентов u разложения изображения по фрейму. В этом случае задачу можно поставить в виде

$$\min_{u \in R^n} \{ \|u\|_1 : BFu = g \},$$

где u - коэффициенты фрейма, F - оператор синтеза для фрейма u. Мы будем пытаться найти набор коэффициентов фрейма такой, что восстановленное и размытое изображение BFu эквивалентно полученному изображению g. Одновременно с этим, мы будем пытаться минимизировать количество ненулевых коэффициентов фрейма поскольку мы минимизируем l_1-норму.

Для решения задачи восстановления изображения применяется линеаризованный алгоритм Брегмана

$$
\begin{aligned}
g^{k+1} &= g^k + (g - BFu^k), \\
u^{k+1} &= \delta \operatorname{shrink} (F^T B^T g^{k+1}, \mu),
\end{aligned}
$$

где F - оператор анализа, F^T - оператор синтеза для фрейма, а shrink - оператор сжатия

$$
\operatorname{shrink}(y, \alpha) := \begin{cases} y - \alpha & \text{если } y \in (\alpha, \infty) \\ 0 & \text{если } y \in [-\alpha, \alpha] \\ y + \alpha & \text{если } y \in (-\infty, -\alpha) \end{cases}.
$$

Мы покажем, что алгоритм Брегмана показывает лучшие результаты восстановления относительно фильтра Винера.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Используя понятие банахова фрейма мы дали ответ на открытый вопрос о существовании системы представления в пространстве Харди H^2 на основе последовательности дискретизированных ядер Сеге.

Сначала мы привели доказательства известных фактов о том, что не существует базиса и фрейма Даффина-Шеффера на основе дискретизированных ядер Сеге в пространстве Харди H^2. Затем, выбрав последовательность точек дискретизации ядер Сеге и модельное пространство коэффициентов, мы построили банахов фрейм в пространстве Харди H^2, который автоматически является системой представления.

В практической части мы рассмотрели алгоритм Брегмана для восстановления размытых изображений в пространстве коэффициентов разложения по фрейму. Мы сравнили работу алгоритма с фильтром Винера и показали, что алгоритм Брегмана дает лучшее восстановление. В дальнейшем, работу алгоритма Брегмана можно будет улучшить применив многоуровневое разложение по фреймлету.