

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математической физики и
Вычислительной математики

Методы регуляризации в задаче восстановления периодических функций

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 217 группы

направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

Механико-математический факультет

Красичковой Анастасии Васильевны

Научный руководитель
профессор кафедры
математической физики и
вычислительной математики,
д.ф.-м.н., профессор

Г. В. Хромова

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

В. А. Юрко

Саратов 2018

Введение. Среди математических задач выделяется класс задач, решения которых неустойчивы к малым изменениям исходных данных. Они характеризуются тем, что сколь угодно малые изменения исходных данных могут приводить к произвольно большим изменениям решений. Задачи подобного типа являются плохо поставленными. Они принадлежат к классу некорректно поставленных задач.

Если исходные данные известны приближенно, то упомянутая неустойчивость приводит к практической неединственности решения в рамках заданной точности и к большим трудностям в выяснении смысла получаемого приближенного решения. В силу этих особенностей долгое время считалось, что некорректно поставленные задачи не могут иметь практического значения.

Однако можно указать некорректно поставленные задачи, относящиеся как к классическим разделам математики, так и к различным классам практически важных прикладных задач. Это позволяет судить о широте рассматриваемого класса задач. К числу важных задач относятся задачи создания систем автоматической математической обработки результатов эксперимента, задачи оптимального управления и оптимального проектирования систем.

Одним из существенных этапов обработки является решение задач, неустойчивых к малым изменениям исходных данных. Поэтому не вызывает сомнения необходимость разработки методов решения таких задач. При этом приближенные решения, получаемые по приближенным исходным данным, должны быть устойчивыми к малым изменениям последних.

Исходные данные некорректно поставленных задач, получаемые обычно в результате измерений, содержат случайные погрешности. Поэтому при построении приближенных решений и при оценке их погрешности, в зависимости от характера исходной информации, возможен как детерминированный подход, так и вероятностный.

В автореферате приведен наилучший из четырех полученных результатов по численному решению задачи моделирования функции, заданной с погрешностью, и так же наилучший из четырех полученных результатов по численному решению задачи восстановления непрерывной периодической функции, заданной с погрешностью.

Основное содержание работы. В первом разделе рассматриваются методы, применяемые для решения задачи восстановления непрерывных периодических функций, заданных с погрешностью и некоторые сведения из теории приближения функций.

Метод S_n частных сумм ряда Фурье. Для периодической функции $\bar{f}(x)$ запишем её ряд Фурье:

$$\bar{f}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) dt$; $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \cos kt dt$; $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \sin kt dt$.

Обозначим $S_n \bar{f}$ — частной суммой ряда Фурье.

Будем считать, что $\bar{f}(x)$ удовлетворяет условию: $\|S_n \bar{f} - \bar{f}\|_C \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 1. [13] (Интегральное представление сумм Фурье). *Имеет место равенство:*

$$S_n \bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x, t) \bar{f}(t) dt,$$

где $K_n(x, t) = \frac{1}{\pi} [\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x)]$.

Теорема 2. [13] (Формула Дирихле).

$$S_n \bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} \bar{f}(t) dt, \text{ при } K_n(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}}$$

Теорема 3. [11] *Имеет место равенство:*

$$\|S_n\|_{L_2 \rightarrow C} = \sqrt{\frac{2n+1}{2\pi}}.$$

Теорема 4. [14] Пусть E_n есть наилучшее приближение функции $\bar{f}(x)$.

$$E_n = \inf_{T_m \subset H_n} \|T_m(x) - \bar{f}(x)\|_C.$$

Тогда

$$\|S_n \bar{f} - \bar{f}\|_C \leq (3 + \ln n) E_n \text{ при } n \geq 2.$$

Теорема 5. [13] Для того чтобы $\|S_n \bar{f} - \bar{f}\|_{C[-\pi, \pi]} \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, достаточно чтобы $\ln n \omega(\frac{\pi}{n+1}) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$

Метод F_n частных сумм ряда Фейера. Оператор Фейера имеет вид:

$$F_n \bar{f} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} S_k \bar{f},$$

где $S_k = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^k (a_j \cos jx + b_j \sin jx)$ при этом $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) dt$; $a_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \cos jt dt$; $b_j = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(t) \sin jt dt$.

$F_n \bar{f}$ — частная сумма ряда Фейера.

Теорема 6. [14] (Интегральное представление сумм Фейера). Справедливо равенство:

$$F_n \bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x, t) \bar{f}(t) dt,$$

где $K_n(x, t) = \frac{1}{\pi} [\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} (1 - \frac{k}{n}) \cos k(t - x)]$.

Теорема 7. [14] Имеет место равенство:

$$\|F_n\|_{L_2 \rightarrow C} = \sqrt{\frac{2n + \frac{1}{n}}{6\pi}}.$$

Некоторые оценки для отклонения сумм Фейера.

Теорема 8. [14] (Бернштейна) Если $\bar{f}(x) \in C[-\pi, \pi]$ и $\bar{f}(x) \in Lip_M \alpha$, где $0 < \alpha < 1$, то при всех x

$$|F_n \bar{f}(x) - \bar{f}(x)| < \frac{C_\alpha M}{n^\alpha},$$

где C_α — постоянная, зависящая только от α .

Теорема 9. [14] Если $\bar{f}(x)$, оставаясь 2π -периодической, пробегает весь класс $Lip_1 1$ и

$$\delta_n(1) = \sup\{\max |F_n \bar{f}(x) - \bar{f}(x)|\},$$

то справедлива асимптотическая формула

$$\delta_n(1) = \frac{2 \ln n}{\pi n} + \rho_n \frac{\ln n}{n},$$

где $\rho_n \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty$.

Метод τ_n частных сумм Валле-Пуссена. Суммы Фурье $S_n[f; x]$ функции $f(x)$ обладают тем важным свойством, что при $n \geq m$ они совпадают с функцией $f(x)$, если сама эта функция есть тригонометрический полином m -го порядка. Фейеровские суммы $F_n[f; x]$ этим свойством не обладают, но зато они удовлетворяют неравенству

$$|F_n[f; x]| \leq \max |f(x)|,$$

которому не удовлетворяют суммы Фурье. Валле-Пуссен построил такие суммы $\tau_n(x) = \tau_n[f; x]$, которые обладают обоими указанными свойствами. Именно, он полагает

$$\tau_n(x) = \frac{S_n(x) + S_{n+1}(x) + \cdots + S_{2n-1}(x)}{n}.$$

Теорема 10. [14] (Валле-Пуссена). Если $f(x) \in C[-\pi, \pi]$, то отклонение сумм Валле-Пуссена $\tau_n(x)$ этой функции удовлетворяет неравенству

$$|\tau_n(x) - f(x)| \leq 4E_n, \quad (1)$$

где E_n есть наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leq n$.

Теорема 11. [14] (Интегральное представление сумм Валле-Пуссена). Справедливо равенство:

$$\tau_n \bar{f} = \int_{-\pi}^{\pi} K_n(x, t) \bar{f}(t) dt,$$

$$\text{где } K_n(x, t) = \frac{1}{2\pi n} \left[\frac{\sin^2 n(t-x) - \sin^2 \frac{n}{2}(t-x)}{\sin^2 \frac{(t-x)}{2}} \right].$$

Известно представление τ_n в виде сингулярного интеграла Валле-Пуссена [14]:

$$\tau_n \bar{f}(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{t-x}{2} \bar{f}(t) dt$$

Теорема 12. [11] *Имеет место равенство:*

$$\|\tau_n\|_{L_2 \rightarrow C} = \left(\frac{8n + \frac{1}{n}}{6\pi} \right)^{1/2}.$$

Аппроксимативные свойства линейных методов приближения периодических функций. Одна из важных задач теории приближения - задача исследования аппроксимативных свойств методов типа

$$U_n^\lambda(x; \bar{f}; \lambda) = \frac{a_0 \lambda_0^n}{2} + \sum_{k=1}^n \lambda_k^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad (2)$$

где $a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \cos kx dx$, $b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) \sin kx dx$. Такие свойства в общем случае для каждого заданного класса функций \mathfrak{N} определяются поведением верхних граней

$$\mathcal{E}_n(\mathfrak{N}; x; \lambda) = \sup_{f \in \mathfrak{N}} |f(x) - U_n(x, f, \lambda)|, \quad (3)$$

которые являются их количественными характеристиками.

Следующая теорема для любой нуль-последовательности θ_n дает решение задачи об асимптотическом поведении верхних граней

$$\mathcal{E}_{\sigma_n}(KW^{(r)}H^{(\alpha)}; x) = \sup_{f \in KW^{(r)}H^{(\alpha)}} |f(x) - \sigma_n(f; \theta_n; x)|, \quad (4)$$

$$\mathcal{E}_{\sigma_n}(\overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}; x) = \sup_{f \in \overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}} |f(x) - \sigma_n(f; \theta_n; x)|, \quad (5)$$

при $n \rightarrow \infty$.

Теорема 13. [21] *Для любых чисел r и α ($r \geq 0, 0 < \alpha \leq 1$) и для любой последовательности $\theta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ справедливы асимптотические равенства*

$$\begin{cases} \mathcal{E}_{\sigma_n}(KW^{(r)}H^{(\alpha)}; x) \\ \mathcal{E}_{\sigma_n}(\overline{KW^{(r)}H^{(\alpha)}}; x) \end{cases} = \frac{2^{\alpha+1} K \ln \frac{1}{\theta_n^*}}{\pi^2 n^{r+\alpha}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} t^\alpha \sin t dt + O\left(\frac{1}{n^{r+\alpha}}\right), \quad (6)$$

где $\theta_n^* = \max\{\theta_n; \frac{1}{n}\}$ и $O(1)$ - величина, равномерно ограниченная относительно всех последовательностей $\{\theta_n\}$, для которых $\theta_n \leq 1 - \theta(\theta \leq 0)$.

Имеет место

Теорема 14. [21] Для любого линейного метода приближения $U_n^\lambda(x; \bar{f}; \lambda)$, и для любого модуля непрерывности $\omega(t)$ справедливы асимптотические неравенства:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \mathcal{E}_n(W^{(r)}H_\omega; x; \lambda) \\ \mathcal{E}_n(\overline{W^{(r)}H_\omega}; x; \lambda) \end{cases} &\geq \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \omega\left(\frac{2t}{n}\right) \sin t dt \left| \sum_{k=1}^n \frac{1 - \lambda_k^{(n)}}{k^r(n-k+1)} - \frac{\ln n}{n^r} \right| + \\ &+ O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1 - \lambda_k^{(n)}}{k^r}\right] + O\left[\frac{\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{n^r}\right], \end{aligned} \quad (7)$$

где величины $O(1)$, входящие в правые части последнего неравенства, равномерно ограничены относительно всех рассматриваемых матриц. В случае $r = 0$ эти соотношения имеют место для всех матриц, для которых $|\lambda_k^{(n)}| \leq C$ (C -произвольная константа).

Кроме того, если модуль непрерывности $\omega(t)$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{2}[\omega(t_1) + \omega(t_2)] \leq \omega\left(\frac{t_1 + t_2}{2}\right),$$

то неравенства (6) остаются в силе при увеличении в них правой части вдвое, и в этом случае в классе всех линейных методов приближения их дальше улучшить нельзя.

Во втором разделе приводится постановка задачи восстановления функции. Пусть непрерывная функция $f(x)$ на отрезке $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$, но вместо этой функции известна функция $f_\delta(x) : \|f_\delta(x) - f(x)\|_{L_2[-\pi, \pi]} \leq \delta$. Функция $f_\delta(x)$ называется δ -приближением $f(x)$ в среднеквадратичной метрике.

Требуется по f_δ и δ найти равномерные приближения к $f(x)$, то есть функции $\tilde{f}_\delta(x)$, для которых

$$\|\tilde{f}_\delta(x) - f(x)\|_{C[-\pi, \pi]} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Решение задачи восстановления функции с "периодическими" краевыми условиями. Справедлива оценка:

$$\|S_n f_\delta - f\|_{C[-\pi, \pi]} \leq \|S_n\|_{L_2 \rightarrow C} \delta + \|S_n f - f\|_{C[-\pi, \pi]}. \quad (8)$$

Теорема 15. [13] *Для того чтобы $\|S_n f_\delta - f\|_{C[-\pi, \pi]} \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, достаточно чтобы $n = n(\delta)$ было такое, что :*

1. $n(\delta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$
2. $\delta \sqrt{n(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Аналогично для $F_n f_\delta$ справедлива оценка:

$$\|F_n f_\delta - f\|_{C[-\pi, \pi]} \leq \|F_n\|_{L_2 \rightarrow C} \delta + \|F_n f - f\|_{C[-\pi, \pi]} \quad (9)$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Теорема 16. [13] *Для того чтобы $\|F_n f_\delta - f\|_{C[-\pi, \pi]} \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, достаточно чтобы $n = n(\delta)$ было такое, что :*

1. $n(\delta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$
2. $\delta \sqrt{n(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Рассмотрим оператор сумм Валле-Пуссена τ_n и применим его к функции f_δ . Справедлива оценка:

$$\|\tau_n f_\delta - f\|_{C[-\pi, \pi]} \leq \|\tau_n\|_{L_2 \rightarrow C} \delta + \|\tau_n f - f\|_{C[-\pi, \pi]} \quad (10)$$

на отрезке $[-\pi, \pi]$.

Теорема 17. [13] *Для того чтобы $\|\tau_n f_\delta - f\|_{C[-\pi, \pi]} \rightarrow 0$, при $n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$, достаточно чтобы $n = n(\delta)$ было такое, что :*

1. $n(\delta) \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$
2. $\delta \sqrt{n(\delta)} \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$.

Таким образом решением задачи восстановления функции с "периодическими" краевыми условиями является функция $(S_{n(\delta)} f_\delta)(x)$, поскольку для нее выполняется сходимостъ:

$$\|S_{n(\delta)}f_\delta(x) - f(x)\|_{C[-\pi,\pi]} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

для оператора S_n и функция $(F_{n(\delta)}f_\delta)(x)$, поскольку для нее выполняется сходимость:

$$\|F_{n(\delta)}f_\delta(x) - f(x)\|_{C[-\pi,\pi]} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

для оператора F_n и функция $(\tau_{n(\delta)}f_\delta)(x)$, поскольку для нее выполняется сходимость:

$$\|\tau_{n(\delta)}f_\delta(x) - f(x)\|_{C[-\pi,\pi]} \rightarrow 0 \text{ при } \delta \rightarrow 0,$$

для оператора τ_n .

Моделирование функции, заданной с погрешностью. Для проведения численного эксперимента приведем алгоритм моделирования функции $f_\delta(x)$ по точно заданной $f(x)$.

Пусть $f(x) \in C[-\pi, \pi]$ и δ некоторое число из интервала $(0, 1)$. Построим функцию $\tilde{f}_\delta(x)$ такую, что:

$$\|\tilde{f}_\delta(x) - f(x)\|_{L_2[-\pi,\pi]} \leq \delta$$

Разобьем отрезок $[-\pi, \pi]$ на m частей и рассмотрим узлы $x_i, i = 0, \dots, m$.

Далее возьмем некоторое $\tilde{\delta}, 0 < \tilde{\delta} < 1$ и определим функцию $f_{\tilde{\delta}}(x_i)$ при $i = 0, 1, 4, \dots, m$.

Пусть

$$f_{\tilde{\delta}}(x_i) = f(x_i) + (-1)^i A_i \tilde{\delta},$$

где A_i — случайные числа.

При $i = 2, 3$ будем считать

$$f_{\tilde{\delta}}(x_2) = f(x_2) + NA_2\tilde{\delta},$$

$$f_{\tilde{\delta}}(x_3) = f(x_3) - NA_2\tilde{\delta}.$$

Из условия, что m, δ и $\tilde{\delta}$ заданы, можно определить возмущение N :

$$N = \sqrt{\frac{m[(\frac{\delta}{\tilde{\delta}})^2 - 1]}{2} + 1}.$$

Численный алгоритм восстановления функции. Отрезок $[-\pi, \pi]$ разобьем на m точек. Для вычисления функции $S_n f_{\bar{\delta}}$ в узлах x_i используем сингулярный интеграл сумм Фурье, а именно:

$$S_n f_{\bar{\delta}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin \frac{t-x}{2}} f_{\bar{\delta}}(t) dt.$$

Как сказано выше, заменяем этот интеграл на конечную сумму, считаем этот интеграл по формуле левых прямоугольников:

$$S_n f_{\bar{\delta}}(x_i) = h \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(t_j - x_i)}{\sin \frac{t_j - x_i}{2}} f_{\bar{\delta}}(t_j).$$

Как только t_j совпадает с x_i заменяем ядро на $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}\tau}{\sin \frac{\tau}{2}}$.

Аналогично, заменяем сингулярный интеграл сумм Фейера

$$F_n f_{\bar{\delta}} = \frac{1}{2n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t-x)}{\sin^2 \frac{t-x}{2}} f_{\bar{\delta}}(t) dt,$$

на сумму по формуле левых прямоугольников:

$$F_n f_{\bar{\delta}}(x_i) = h \frac{1}{2n\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\sin^2 \frac{n}{2}(t_j - x_i)}{\sin^2 \frac{t_j - x_i}{2}} f_{\bar{\delta}}(t_j).$$

И как только t_j совпадает с x_i заменяем ядро в сумме на $\lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \frac{n}{2}\tau}{\sin^2 \frac{\tau}{2}}$.

Теперь, заменим сингулярный интеграл сумм Валле-Пуссена

$$\tau_n f_{\bar{\delta}}(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos^{2n} \frac{t-x}{2} f_{\bar{\delta}}(t) dt$$

на конечную сумму по формуле левых прямоугольников:

$$\tau_n f_{\bar{\delta}}(x) = h \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \sum_{i=0}^{n-1} \cos^{2n} \frac{t_j - x_i}{2} f_{\bar{\delta}}(t_j) dt$$

Как только t_j совпадает с x_i заменяем ядро на $\lim_{\tau \rightarrow 0} \cos^{2n} \frac{\tau}{2}$. Очевидно, такой предел равен 1.

Из теоремы 20, 21 и 22 известно, что параметр n должен удовлетворять условиям $n = n(\delta)$:

1. $n(\delta) \rightarrow \infty$, при $\delta \rightarrow 0$,
2. $\delta\sqrt{n(\delta)} \rightarrow 0$, при $\delta \rightarrow 0$.

Тогда параметр $n(\delta)$ будем выбирать следующим образом: $n(\delta) = \lceil \frac{1}{\delta^\gamma} \rceil$.

Рассмотрим задачу восстановления функции $f(x) = x^2 - \pi^2$.

В приложении А был проведен численный эксперимент по моделированию функции, заданной с погрешностью. Приведена программа, реализованная на языке C++, для подсчета параметров, необходимых для моделирования функции, заданной с погрешностью. А так же представлены полученные графики.

В результате эксперимента лучший результат был получен для следующих значений параметров: $\delta = 0.001$, $\tilde{\delta} = 0.0001$, $m = 25$. С помощью программы, реализованной на языке C++, были получены значения параметров $N, h, x_i, A_i, f(x_i)$ и $f_{\tilde{\delta}}(x_i)$ и построен следующий график:

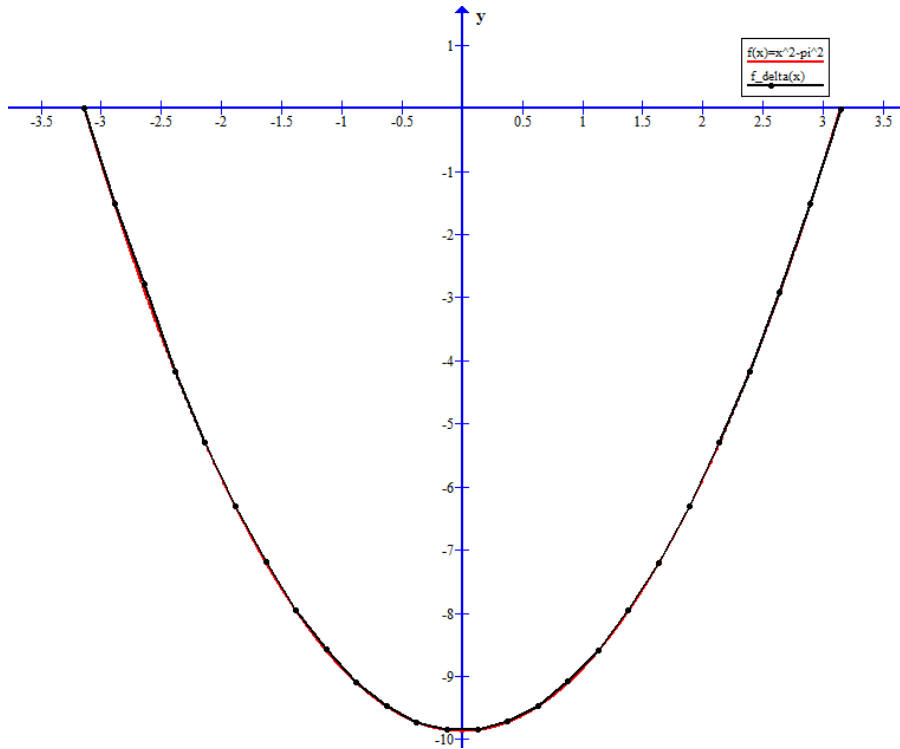


Рисунок 1 — График четвертой модели $f_{\tilde{\delta}}(x)$

В приложении Б был проведен численный эксперимент по восстановлению непрерывной периодической функции, заданной с погрешностью. Приведена программа, реализованная на языке C++, для подсчета параметров, необходимых для построения графиков приближенных функций, полученных с помощью операторов Фурье и Фейра, а так же представлены полученные графики.

В результате эксперимента наилучший результат восстановления периодической функции был получен для следующих значений параметров: $\delta = 0.001, \tilde{\delta} = 0.0001, m = 25, \gamma = 0.45$. Тогда $h = 0.2512, N = 35.3624$ и $n(\delta) = 22$. С помощью программы, реализованной на языке C++, были получены значения параметров $x_i, f_{\tilde{\delta}}(x_i), S_n f_{\tilde{\delta}}(x_i)$ и $F_n f_{\tilde{\delta}}(x_i)$ и построен следующий график:

В теории известно, что для гладких функций оператор S_n приближает периодическую функцию лучше, чем F_n . Но на практике работа происходит не с исходной "хорошей" функцией, а с функцией, заданной с погрешностью, которая уже не является периодической и гладкой. То есть в оценках $\|S_n f - f\|_C \leq \|S_n\|_{L_2 \rightarrow C} \delta + \|S_n f - f\|_C$ и $\|F_n f - f\|_C \leq \|F_n\|_{L_2 \rightarrow C} \delta + \|F_n f - f\|_C$ большую роль играют слагаемые $\|S_n\|_{L_2 \rightarrow C} \delta$ и $\|F_n\|_{L_2 \rightarrow C} \delta$ соответственно. И эти

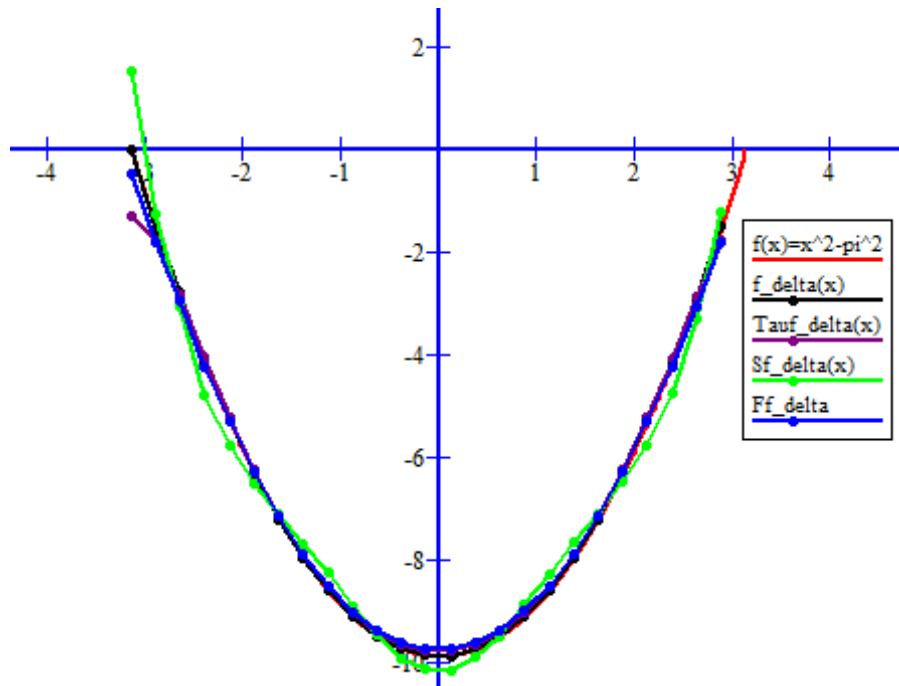


Рисунок 2 — четвертый эксперимент

слагаемые играют большую роль в практическом применении данных операторов при восстановлении периодических функций, заданных с погрешностью.

Заключение. В магистерской работе рассмотрены задача моделирования функции, заданной с погрешностью и задача восстановления непрерывной периодической функции. Разработан продукт решения данных задач на ЭВМ на высокоуровневом языке программирования C++. Так же были получены нормы операторов Фурье, Фейера и Валле-Пуссена $\|S_n\|_{L_2 \rightarrow C}$, $\|F_n\|_{L_2 \rightarrow C}$ и $\|\tau_n\|_{L_2 \rightarrow C}$ соответственно.

С помощью проведенных экспериментов были обнаружены достоинства и недостатки приведенных методов решения задачи восстановления периодической функции в практическом применении. Были получены условия лучших результатов в моделировании функции, заданной с погрешностью. С помощью оператора Фейера F_n было получено лучшее приближение функции, заданной с погрешностью, чем с помощью оператора Фурье S_n и Валле-Пуссена τ_n . Хотя, из теории приближений известно, что для гладких периодических функций оператор Валле-Пуссена τ_n даёт лучшее приближение, чем оператор Фейера F_n и Фурье S_n . Но так как задача решается не для исходной гладкой функции, а для смоделированной, которая не является гладкой и периодической, то получили противоположные результаты для данных операторов.