Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Интерполяция функций многочленами четной степени

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 219 группы
направления (специальности)
01.04.02 — Прикладная математика и информатика

механико-математического факультета

Булатовой Екатерины Андреевны

Научный руководитель
кандидат ф.-м.н., доцент ________________ Матвеева Ю.В.

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ________________ Прохоров Д.В.

Саратов 2018

Введение. Зачастую, производя математические расчеты, люди пользуются не точными значениями параметров или функций, а приближенными. Обычно это связано с тем, что сложно или невозможно вычислить точные значения функций, тогда прибегают к ее аппроксимации - нахождению приближенных значений, заменяя исходную функцию более простой. Частным случаем аппроксимации является интерполяция сплайнами. Этот метод является хорошо зарекомендовавшим себя, как в теоретических исследованиях, так и в приложениях, аппаратом приближения функций.

В отличии от аппроксимации функции, кривая которой должна лишь приближать значения точек к исходным, интерполирующая функция должна совпадать с исходной функцией в некотором наборе точек. Интерполяция кусочно-полиномиальными функциями достаточно удобна, так как не требует больших расчетов.

В данной работе мы рассмотрели случай интерполяции кусочно-полиномиальными сплайнами четвертой и шестой степени на треугольнике.

Как правило, оценки погрешности аппроксимации для производных интерполируемой функции характеризуются двумя параметрами: диаметром разбиения и дополнительной характеристикой, которой в двумерном случае в указанных работах служил синус наименьшего угла триангуляции или его аналог. Для кусочно-линейных функций в двумерном случае Синдж указал верхнюю, а Зламал нижнюю оценки, зависящие от диаметра разбиения и синуса наибольшего угла. Эти оценки одинаковы с точностью до констант, и в этом смысле неулучшаемы.

Знание таких точных результатов позволяет более эффективно выбирать базисные функции. Например, для кусочно-кубических функций, которые часто используются на практике, Ю.Н.Субботин показал, что для некоторого интерполяционного процесса оценки погрешности зависят от диаметра разбиения и синуса наименьшего угла, и эти оценки неулучшаемы, то есть построен пример функции из заданного класса и найдены положительные константы, не зависящие от триангуляции, для которых справедливы обратные оценки (оценки снизу). В отличие от лагранжевой интерполяции, где к настоящему моменту все выяснено, интерполяционные процессы типа Эрмита и Биркгофа еще мало изучены. Основные результаты по биркгофовой интерполяции для кусочно-линейных и кусочно-параболических функций получены Д.О.Филимоненковым, Ю.Н. Субботиным Н.В. Байдаковой и Н.В. Латыповой.

В данной работе предложены по два способа интерполяции типа Биркгофа многочленами четвертой и шестой степени на треугольнике, оценки погрешности в которых зависят только от наибольшей стороны треугольника и не зависят от угла.

Цель данной работы заключается в исследовании кусочно-полиномиальной интерполяции на треугольнике для функции двух переменных.

Для достижения поставленной цели были сформулированы следующие задачи:

— дать основные определения для интерполяции на треугольнике;

— доказать единственность и существование интерполяционных многочленов с заданными условиями интерполяции;

— рассмотреть оценки погрешности приближения функции двух переменных с помощью кусочно-параболической интерполяции на треугольнике;

— получить новые интерполяционные условия для многочленов 4-ой и 6-ой степени, приближающих функцию двух переменных на треугольнике;

— рассмотреть и решить практические примеры интерполяции в пакете Wolfram Mathematica.

Работа состоит из введения; раздела с определениями и понятиями; и основной части, которая состоит из 2 разделов, каждый из которых содержит 4 подраздела, которые имеют разделения на пункты; заключения; 12 приложений; списка используемых литературных источников, состоящего из 21 именований.

1 и 2 раздел имеют схожую структуру, только в 1 разделе мы рассматриваем интерполяцию 4-ой степени, а во втором 6-ой.

В 1-ом подразделе каждого из разделов мы сформулировали постановку задачи.

2 подраздел состоит из двух пунктов, в нём мы дали основные определения, касающиеся понятий интерполяции на треугольнике, привели вспомогательные сведения, описали первый способ интерполяции и доказали теорему о единственности многочлена, удовлетворяющего данным интерполяционным условиям, привели оценку погрешности первого способа интерполяции.

3 подраздел состоит из двух пунктов, в которых мы определили второй способ интерполяции и доказали теорему о единственности многочлена, удовлетворяющего данным интерполяционным условиям.

В 4 подразделе описан практический пример интерполяции, решенный в пакете Wolfram Mathematica.

Основное содержание работы. Триангуляция в наиболее общем значении — это разбиение геометрического объекта на симплексы, то есть на n-мерное обобщение треугольника. При $n = 2$ симплексы являются треугольниками.

Определение 1. Пусть Ω — многоугольная область в R^2 с границей Γ.

Пусть $T_\Omega = \{\Delta_\lambda\}$ — триангуляция множества $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, то есть совокупность конечного числа замкнутых треугольников Δ_λ, обладающая следующими свойствами:

1) треугольники не имеют общих внутренних точек;

2) объединение треугольников есть Ω;

3) два треугольника могут иметь только либо общую вершину, либо общую сторону или не имеют ничего общего.

На каждом треугольнике из триангуляции для $f(x,y)$ строится интерполяционный многочлен типа Биркгофа 4-ой степени, по совокупности переменных такой, чтобы результирующая кусочно-полиномиальная функция была непрерывна на Ω. В силу локального рассмотрения интерполяционных условий, на которых интерполяционный многочлен 4-ой степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением одного треугольника.

Пусть Δ — невырожденный треугольник в R^2. Через $a_i (i = 1, 2, 3)$ будем обозначать вершины треугольника Δ, через α, β, θ обозначим углы при вершине a_1, a_2, a_3 соответственно, при этом пусть выполняются неравенства $0 < \alpha \le \beta \le \theta < \pi$. Через $n_i (i = 1, 2, 3)$ обозначим единичную нормаль к стороне треугольника $[a_i, a_{i+1}]$.

Направление нормалей $n_i (i = 1, 2, 3)$ к сторонам $[a_i, a_{i+1}]$ выберем следующим образом: если первая координата точки a_i меньше первой координаты точки a_{i+1} или первые координаты этих точек равны, а вторая координата точки a_i, меньше второй координаты точки a_{i+1}, то пусть n_i будет направлена влево при движении от точки a_i, к a_{i+1}, в противном случае n_i, будет направлена влево при движении от a_{i+1} к a_i. Через b_i обозначим середину стороны $[a_i, a_{i+1}]$. Полагаем, что в треугольнике вершина $a_4 = a_1$. Далее без ограничения общности будем считать, что вершины Δ имеют следующие координаты: $a_1 = (b, 0), a_2 = (-a, 0), a_3 = (0, h)$, причем $0 \ < \ a \ <= b$ и длина наибольшей стороны треугольника Δ равна $a + b = H$. То есть треугольник с диаметром H расположен так, что его наибольшая сторона лежит на оси $0x$.

Рассмотрим класс аппроксимируемых функций:

$$W^5 M = \{f(x,y) : D^l_{\eta_1,..,\eta_l} \in \mathbb{C}(\Delta), \quad (0 \le l \le 3)$$

$$\forall (x,y) \in \Delta, \forall \eta_1, \eta_2, \eta_3, \eta_4, \eta_5 \left| D^5_{\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4,\eta_5} f(x,y) \right| \le M\},$$

где $\mathbb{C}(\Delta)$ обозначает класс непрерывных функций на треугольнике Δ.

Через $P_4(x,y) = P_4(f; x,y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит четырех, то есть многочлен вида:

$$P_4(x,y) = x^4 d_1 + y^4 d_2 + x^3 y d_3 + x^2 y^2 d_4 + x y^3 d_5 + x^3 d_6 + y^3 d_7 + x y^2 d_8 + \\ + x^2 y d_9 + x^2 d_{10} + y^2 d_{11} + x y d_{12} + x d_{13} + y d_{14} + d_{15}. \tag{1.1}$$

Пусть данный многочлен удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$f(a_i) = P_4(a_i)(i = 1, 2); \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial P_4(a_i)}{\partial x} \quad (i = 1, 2); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial^2 f(a_i)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 P_4(a_i)}{\partial x^2} \quad (i = 2); \tag{1.4}$$

$$D^4_{n^4_1} f(b_1) = D^4_{n^4_1} P_4(b_1); \tag{1.5}$$

$$D^3_{n^3_1} f(c_i) = D^3_{n^3_1} P_4(c_i) \quad (i = 1, 2); \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial f(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial P_4(a_i)}{\partial y} \quad (i = 3); \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^{k+2} f(a_3)}{\partial x^k \partial y^2} = \frac{\partial^{k+2} P_4(a_3)}{\partial x^k \partial y^2} \quad (k = 0, 1, 2); \tag{1.8}$$

$$\frac{\partial^{k+1} f(a_3)}{\partial x^k \partial y} = \frac{\partial^{k+1} P_4(a_3)}{\partial x^k \partial y} \quad (k = 1, 2, 3); \tag{1.9}$$

В работе доказана теорема о существовании и единственности интерполяционного многочлена с условиями (1.2)-(1.9).

Теорема 1. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, определенная на триангулированной области Ω, которая принадлежит классу аппросикмированных функций W^5M, тогда $\exists! P_4(x, y)$ — интерполяционный многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит четырех, интерполирующий функцию $f(x, y)$ с условиями (1.2)-(1.9).

Для доказательства теоремы, мы использовали пакет прикладных программ Wolfram Matematica 10.4, в котором рассчитали вид интерполяционных условий для многочлена 4-ой степени и получили общий вид коэффициентов интерполяционного многочлена, которые использовали для построения интерполяционного полинома конкретной функции в дальнейшем.

Получим оценки погрешности для предложенного способа интерполяции.

Теорема 2. Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f \in W^5M$ и любого невырожденного треугольника Δ, любого $(x, y) \in \Delta$ и для интерполяционного многочлена $P_4(x, y)$, заданного условиями (1.2)-(1.9), имеют место следующие оценки:

$$\left\| \frac{\partial^s e(x, y)}{\partial x^{s-j} \partial y^j} \right\| \le C_{s-j,j} M H^{5-s}, \; (0 \le j \le 4, \; j \le s \le 4),$$

где $\|\cdot\|$ — норма пространства $\mathbb{C}(\Delta)$.

Также мы рассмотрели второй способ интерполяции.

В качестве $P_4(x,y) = P_4(f;x,y)$ обозначим многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит четырех, удовлетворяющий интерполяционным условиям (1.2)-(1.5), (1.7), (1.8) ($k = 0,1$), (1.9) и:

$$\frac{\partial^2 f(c_i)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 P_4(c_i)}{\partial y^2} \quad (i = 1,2); \tag{1.10}$$

$$\frac{\partial^4 f(a_3)}{\partial x \partial y^3} = \frac{\partial^4 P_4(a_3)}{\partial x \partial y^3}; \tag{1.11}$$

то имеет место следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, определенная на триангулированной области Ω, которая принадлежит классу аппросикмированных функций W^5M, тогда $\exists! P_4(x,y)$ — интерполяционный многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит четырех, интерполирующий функцию $f(x,y)$ с условиями (1.2)-(1.5), (1.7), (1.8) ($k = 0,1$), (1.9) и(1.10),(1.11).

Для доказательства второй теоремы, мы также использовали пакет прикладных программ Wolfram Matematica 10.4 и рассчитали вид новых интерполяционных условий для многочлена 4-ой степени, получили общий вид коэффициентов интерполяционного многочлена.

В данной работе описан практический пример интерполяции, решенный в пакете Wolfram Mathematica.

Рассмотрена функция вида:

$$x^4 + y^2 + z^2 = 1$$

на треугольнике Δ с вершинами:

$$a_1 = (\frac{1}{2}, 0), \quad a_2 = (-\frac{1}{4}, 0), \quad a_3 = (0, \frac{1}{2}).$$

Мы ограничились рассмотрением функции на одном треугольнике. Далее мы построили интерполяционный сплайн для данной функции на указанном треугольнике. Результаты интерполяции представлены графически в приложении к данной работе. Синий цвет — интерполяция с условиями (1.2)-(1.9), зеленый — интерполяция с условиями (1.2)-(1.5), (1.7), (1.8) ($k = 0,1$), (1.9) и(1.10),(1.11), красный — исходная функция.

В результате практического примера визуально видно, что построенные сплайны мало отклоняются от исходной функции. Причем, интерполяционные условия второго типа на данном примере дают лучшее приближение по сравнению с условиями, предложенными Латыповой.

Теперь рассмотрим интерполяцию многочленами шестой степени на треугольнике, с условиями предложенными Н.В. Латыповой в ее работе.

Пусть у нас имеется функция двух переменных $f(x, y)$, определенная на триангулированной области Ω, которая принадлежит классу аппросикмированных функций W^7M, непрерывных на Ω вместе со всеми своими частными производными до 7-го порядка включительно, у которых все производные 7-го порядка ограничены по модулю константой M.

На каждом треугольнике из триангуляции для $f(x, y)$ строится интерполяционный многочлен типа Биркгофа 6-ой степени, по совокупности переменных такой, чтобы результирующая кусочно-полиномиальная функция была непрерывна на Ω.

В силу локального рассмотрения интерполяционных условий, на которых интерполяционный многочлен 6-ой степени будет определяться однозначно, ограничимся рассмотрением одного треугольника. Пусть Δ — невырожденный треугольник в R^2. Через $a_i (i = 1, 2, 3)$ по-прежнему будут обозначаться вершины треугольника Δ. Через n_1 обозначим единичную нормаль к стороне треугольника $[a_1, a_2]$. Через b_1 обозначим середину наибольшей стороны Δ. Пусть точки b_2 и b_3 делят наибольшую сторону $[a_1, a_2]$ на три равные части, а точки $b_i (i = 4, 5, 6)$ делят сторону $[a_1, a_2]$ на четыре равные части.

Далее будем считать, что координаты сторон определяются теми же параметрами, что и в подразделе 1.1 и $a + b = H$. Тогда координаты точек b_i на стороне $[a_1, a_2]$ следующие: $b_1 = \left(\dfrac{b-a}{2}, 0\right)$, $b_2 = \left(\dfrac{b-2a}{3}, 0\right)$, $b_3 = \left(\dfrac{2b-a}{3}, 0\right)$, $b_4 = \left(\dfrac{b-3a}{4}, 0\right)$, $b_5 = \left(\dfrac{b-a}{3}, 0\right)$, $b_6 = \left(\dfrac{3b-a}{4}, 0\right)$, заметим, что $b_5 = b_1$.

Через $P_6(x, y) = P_6(f; x, y)$ будем обозначать многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит шести, то есть многочлен вида:

$$\begin{aligned} P_6(x,y) = {} & x^6d_1 + y^6d_2 + x^5yd_3 + x^4y^2d_4 + x^3y^3d_5 + x^2y^4d_6 + xy^5d_7 + x^5d_8 + \\ & + y^5d_9 + +x^4yd_{10} + x^3y^2d_{11} + x^2y^3d_{12} + xy^4d_{13} + x^4d_{14} + y^4d_{15} + x^3yd_{16} + \\ & + x^2y^2d_{17} + xy^3d_{18} + x^3d_{19} + y^3d_{20} + x^2yd_{21} + xy^2d_{22} + x^2d_{23} + y^2d_{24} + \\ & + xyd_{25} + xd_{26} + yd_{27} + d_{28} \quad . \end{aligned} \tag{2.1}$$

Пусть данный многочлен (2.1) удовлетворяет следующим интерполяционным условиям:

$$\frac{\partial^m f(a_i)}{\partial x^m} = \frac{\partial^m P_6(a_i)}{\partial x^m} \quad (m = 0, 1, 2), (i = 1, 2); \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial^3 f(a_2)}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 P_6(a_2)}{\partial x^3}; \tag{2.3}$$

$$\frac{\partial^{k+1}f(a_i)}{\partial x^k\partial y}=\frac{\partial^{k+1}P_6(a_i)}{\partial x^k\partial y}\quad (k=0,1,2),(i=1,2);\tag{2.4}$$

$$D^6_{n_1^6}f(b_1)=D^6_{n_1^6}P_6(b_1);\tag{2.5}$$

$$D^5_{n_1^5}f(b_i)=D^5_{n_1^5}P_6(b_i)\quad (i=2,3);\tag{2.6}$$

$$D^4_{n_1^4}f(b_i)=D^4_{n_1^4}P_6(b_i)\quad (i=4,5,6);\tag{2.7}$$

$$\frac{\partial^m f(a_i)}{\partial y^m}=\frac{\partial^m P_6(a_i)}{\partial y^m}\quad (m=2,3),(i=3);\tag{2.8}$$

$$\frac{\partial^6 f(a_i)}{\partial x^3\partial y^3}=\frac{\partial^6 P_6(a_i)}{\partial x^3\partial y^3}\quad (i=3);\tag{2.9}$$

$$\frac{\partial^4 f(a_i)}{\partial x\partial y^3}=\frac{\partial^4 P_6(a_i)}{\partial x\partial y^3}\quad (i=3);\tag{2.10}$$

$$\frac{\partial^{k+2}f(a_i)}{\partial x^k\partial y^2}=\frac{\partial^{k+2}P_6(a_i)}{\partial x^k\partial y^2}\quad (k=1,2,3,4),(i=3).\tag{2.11}$$

Теорема 4. Пусть $f(x,y)$ — функция двух переменных, определенная на триангулированной области Ω, которая принадлежит классу аппросикмированных функций W^7M, тогда $\exists! P_6(x,y)$ — интерполяционный многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит шести, интерполирующий функцию $f(x,y)$ с условиями (2.2)-(2.11).

Положим, что $e(x,y)=f(x,y)-P_6(x,y)$, $e_{i,j}=\dfrac{\partial^{i+j}e(x,y)}{\partial x^i\partial y^j}$ $e_{i,j}=e_{i,j}(0,0)$.

Получим оценки погрешности для предложенного способа интерполяции.

Теорема 5. Существуют такие абсолютные положительные константы $C_{i,j}$, что для любой функции $f\in W^7M$ и любого невырожденного треугольника Δ, любого $(x,y)\in\Delta$ и для интерполяционного многочлена $P_6(x,y)$, заданного условиями (2.2)-(2.11), имеют место следующие оценки:

$$\left\|\frac{\partial^s e(x,y)}{\partial x^{s-j}\partial y^j}\right\|_{C(\Delta)}\le C_{s-j,j}MH^{7-s}\text{ , для }(0\le j\le 6,\ j\le s\le 6),$$

где $\|\cdot\|$ — норма пространства $\mathbb{C}(\Delta)$.

Предложим заменить часть условий интерполяции своими, аналогично выбранным условиям из раздела 1. В качестве $P_6(x,y)=P_6(f;x,y)$ обозначим многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит шести, удовлетворяющий интерполяционным условиям (2.2)-(2.6), (2.7) при $i=6$, (2.8), (2.10)-(2.11) и:

$$\frac{\partial^3 f(b_i)}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 P_6(b_i)}{\partial y^3} \quad (i = 4, 5); \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial^6 f(a_3)}{\partial x^2 \partial y^4} = \frac{\partial^6 P_6(a_3)}{\partial x^2 \partial y^4}; \tag{2.16}$$

то имеет место следующее утверждение.

Теорема 6. Пусть $f(x, y)$ — функция двух переменных, определенная на триангулированной области Ω, которая принадлежит классу аппросикмированных функций $W^7 M$, тогда $\exists! P_6(x, y)$ — интерполяционный многочлен, степень которого по совокупности переменных не превосходит шести, интерполирующий функцию $f(x, y)$ с условиями (2.2)-(2.6), (2.7) при $i = 6$, (2.8), (2.10)-(2.16).

Решим практическую задачу с помощью пакета прикладных программ Wolfram Mathematica 10.4.

Рассмотрим задачу на функции следующего вида:

$$x^6 + y^2 + z^2 = 1.$$

Возьмем тот же треугольник Δ, что и ранее, с вершинами:

$$a_1 = \left(\frac{1}{2}, 0\right), \quad a_2 = \left(-\frac{1}{4}, 0\right), \quad a_3 = \left(0, \frac{1}{2}\right).$$

Ограничимся рассмотрением функции на одном треугольнике, в приложении [Л] данная поверхность изображена красным цветом. Будем строить интерполяционный сплайн для данной функции на указанном треугольнике. Результаты интерполяции представлены графически. Синий цвет — интерполяция с условиями (2.2)-(2.11), зеленый — интерполяция с условиями (2.2)-(2.6), (2.7) при $i = 6$, (2.8), (2.10)-(2.16), красный — исходная функция.

В результате практического примера визуально видно, что построенные сплайны мало отклоняются от исходной функции. Причем, второй способ интерполяции в данном примере дает более точное приближение.

Заключение. Итак, в данной работе выполнены поставленные цель и задачи: даны основные определения, касающиеся понятий интерполяции на треугольнике; доказаны теоремы о единственности многочленов, удовлетворяющих приведенным интерполяционным условиям; приведена оценка погрешности приближения приведенных способов интерполяции, получены новые интерполяционные условия для приближения функции многочленами четвертой и шестой степени на треугольнике, решены практические примеры в пакете Wolfram Mathematica.

В заключении, тема интерполяции различными методами крайне важна, так как класс задач, решаемых этим способом, достаточно широк, он охватывает многие сферы деятельности, встречающихся как в основных вопросах математики, так и в её приложениях к естествознанию и технике.