

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

Сходимость метода Фурье в периодической смешанной

задаче для волнового уравнения

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента _____ 2 _____ курса _____ 217 _____ группы

направления 01.04.02 – Прикладная математика и информатика

Механико-математический факультет

Аль Балдави Лэйт Ирзуки Ахмед

Научный руководитель
к. ф.-м. н., доцент

В. В. Корнев

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор

А. П. Хромов

Саратов 2018

Введение. Метод Фурье является одним из наиболее важных математических методов. Впервые строгое обоснование метода Фурье дал академик В.А. Стеклов. Оно опирается на доказательство равномерной сходимости ряда, представляющего формальное решение задачи, и рядов, получающихся из него почленным дифференцированием нужное число раз.

Метод Фурье имеет широкое распространение, произведено множество исследований и достигнуты значительные результаты в этой области В.И. Смирновым, И.Г. Петровским, О.А. Ладыженской, В.А. Ильиным, В.А. Чернятиным.

Недостатком метода Фурье считается требование завышенной гладкости на начальные данные. Решение этой проблемы было предложено А. Н. Крыловым. Крылов предложил разбить формальное решение на два ряда, один из которых точно суммируется и тем самым не надо прибегать к почленному дифференцированию, а второй ряд сходится настолько быстро, что его можно почленно дифференцировать.

В.А. Чернятин, воспользовавшись приемом А.Н. Крылова с применением асимптотик для собственных значений и собственных функций, исследовал ряд задач методом Фурье и значительно ослабил условия гладкости, а в каких-то случаях эти условия стали минимально возможными.

Исследования В. А. Чернятина, А. П. Хромова, А.Н. Крылова позволили сделать переход от формального решения к новому виду. Этот подход позволяет исследовать методом Фурье смешанные задачи с исчерпывающей полнотой и ставить множество новых и важных вопросов в теории функций.

В данной работе рассматривается дальнейшее развитие метода, предложенного В. А. Чернятиным и А.Н. Крыловым с привлечением метода контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного спектральной задачей метода Фурье. Это позволит получить классическое решение для волнового уравнения с периодическими краевыми условиями при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом ни уточненных асимптотик для собственных значений, ни какой-либо информации о собственных функциях.

Разработка новых методов и усовершенствование существующих всегда были и остаются актуальными задачами.

Данная работа состоит из введения, шести глав, заключения, списка использованных источников и приложения.

В первой главе приводится постановка задачи и выводится формула для резольвенты спектрального оператора, соответствующего предложенной задаче по методу Фурье. Во второй главе представлены леммы, необходимые для доказательства асимптотики резольвенты. В третьей главе рассматривается оператор преобразования и формула Римана, которая необходима для данного оператора. В четвертой главе ряд формального решения разбивается на три ряда и каждый исследуется в отдельности. В пятой главе приводится доказательство основной формулы для классического решения задачи. В шестой главе рассматривается волновое уравнение с периодическими краевыми условиями и находится ее решение методом Фурье.

В приложении А приводится программа отыскания приближенного решения смешанной задачи, рассматриваемой в шестой главе. В приложении Б представлен результат работы программы в виде таблицы.

Целью работы ставится показать, что при решении периодической смешанной задачи для волнового уравнения методом Фурье формальный ряд будет сходиться к классическому решению при минимальных условиях на исходные данные.

На защиту выносятся следующие положения

- 1) представление формального ряда с помощью резольвенты;
- 2) формула для резольвенты спектральной задачи, соответствующей методу Фурье;
- 3) асимптотические формулы для резольвенты с помощью оператора преобразования;
- 4) обоснование сходимости формального ряда Фурье к классическому решению при минимальных требованиях на исходные данные к задаче.

Основное содержание работы. Рассматривается задача следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t), \quad (1)$$

$$u(0, t) = u(1, t) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t), \quad (2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty) \quad (3)$$

Считаем, что $q(x) \in C[0, 1]$ — комплексная функция. Минимальные требования для классического решения данной задачи следующие:

$$\varphi(x) \in C^2[0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1). \quad (4)$$

Кроме того, в силу дифференциального уравнения (1) имеем:

$$\varphi''(0) - \varphi''(1) - (q(0) - q(1))\varphi(0) = 0. \quad (5)$$

При применении метода Фурье в данной задаче возникают трудности из-за возможной кратности собственных значений соответствующей спектральной задачи. Резольвентный подход позволяет успешно справиться с возникающими трудностями.

Согласно методу Фурье задаче (1)-(3) соответствует спектральная краевая задача для оператора L :

$$Ly = -y'' + q(x)y(x), \quad y(0) = y(1), \quad y'(0) = y'(1). \quad (6)$$

Собственные значения оператора L достаточно большие по модулю и для них имеют место следующие асимптотические формулы:

$$\lambda_n = \rho^2, \quad \rho_n = 2\pi n + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n = n_0, \quad n_0 + 1, \dots$$

Пусть $\gamma_n = \{\rho : |\rho - n\pi| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и достаточно мало, а $n \leq n_0$ и n_0 таково, что при всех $n \geq n_0$ внутрь и на границу γ_n попадает лишь по одному из ρ_n .

Пусть $\tilde{\gamma}_n$ — образ γ_n в λ — плоскости $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Re} \rho \geq 0$.

Обозначим через R_λ резольвенту оператора L , т.е. $R_\lambda = (L - \lambda E)^{-1}$, где E — единичный оператор, λ — спектральный параметр.

Тогда по методу Фурье формальное решение задачи (1)-(3) представляется в виде

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda + \sum_{n \geq n_0} (\varphi, \psi_n) \varphi_n(x) \cos \rho_n t, \quad (7)$$

где $r > 0$ фиксировано и взято таким, что все собственные значения $|\lambda| < r$ имеют номера, меньшие n_0 , на контуре $|\lambda| = r$ нет собственных значений, $\varphi_n(x)$ — собственная функция оператора L для собственного значения λ_n , система $\{\psi_n(x)\}$ биортогоанальная системе $\{\varphi_n(x)\}$.

Представим (7) в виде

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_n} (R_\lambda \varphi) \cos \rho t d\lambda. \quad (8)$$

Мы получаем, что в формальном решении $u(x, t)$ нет ни собственных значений, ни собственных функций, а исходным формальным рядом будет ряд (8).

Обозначим через $z_1(x, \rho)$ и $z_2(x, \rho)$ решения уравнения

$$y'' - q(x)y + \rho^2 y = 0$$

с начальными условиями

$$z_1(0, \rho) = 1, \quad z_1'(0, \rho) = 0, \quad z_2(0, \rho) = 0, \quad z_2'(0, \rho) = 1.$$

Тогда $z_j(x, \rho)$ являются целыми функциями по ρ и даже по λ , где $\lambda = \rho^2$.

Теорема 1 Для резольвенты R_λ оператора L имеет место формула

$$R_\lambda f = -\frac{z_1(x, \rho)}{\Delta(\rho)} \begin{vmatrix} U_1(M_\rho f) & u_{12}(\rho) \\ U_2(M_\rho f) & u_{22}(\rho) \end{vmatrix} - \frac{z_2(x, \rho)}{\Delta(\rho)} \begin{vmatrix} u_{11}(\rho) & U_1(M_\rho f) \\ u_{21}(\rho) & U_2(M_\rho f) \end{vmatrix} + (M_\rho f)(x), \quad (9)$$

где

$$U_1(y) = y(0) - y(1), \quad U_2(y) = y'(0) - y'(1), \quad u_{ij}(\rho) = U_1(z_j)$$

$$\Delta(\rho) = \det(u_{ij}(\rho))_{i,j=1}^2, \quad \operatorname{Re} \rho \geq 0,$$

$$(M_\rho f)(x) = \int_0^x M(x, t, \rho) f(t) dt, \quad M(x, t, \rho) = \begin{vmatrix} z_1(t, \rho) & z_2(t, \rho) \\ z_1(x, \rho) & z_2(x, \rho) \end{vmatrix}.$$

Комплексное число λ является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда ρ является нулем функции $\Delta(\rho)$.

Важным местом в обосновании сходимости является оператор преобразования. Он позволяет представить $z_1(x, \rho)$ в виде:

$$z_1(x, \rho) = \cos \rho x + \int_0^x K_1(x, t) \cos \rho t dt, \quad (10)$$

где $K_1(x, t)$ непрерывно дифференцируема по x и по t .

Формула (10) играет важную роль в нахождении асимптотических формул. Выводу формулы (10) посвящен целый раздел.

Получаем, что нули функции $\Delta(\rho)$ достаточно большие по модулю, находятся в полосе $|\operatorname{Im} \rho| \leq h$, где $h > 0$ — любое фиксированное число. Далее, из формулы (8) следует, что для $\Delta(\rho)$ в полосе $|\operatorname{Im} \rho| \leq h$ имеет место асимптотическая формула:

$$\Delta(\rho) = 2(1 - \cos \rho) + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

которая приводит к следующей теореме

Теорема 2 Нули ρ_n функции $\Delta(\rho)$, достаточно большие по модулю, образуют две серии с асимптотикой $\rho'_n = 2\pi n + \varepsilon'_n$, $\rho''_n = 2\pi n + \varepsilon''_n$ ($n = n_0, n_0 + 1, \dots$), где ε'_n и ε''_n стремятся к нулю при

$n \rightarrow \infty$. В случае $\varepsilon'_n \neq \varepsilon''_n$ они простые, а в случае $\varepsilon'_n = \varepsilon''_n$ они двукратные.

Теорема 3 В полосе $|Im\rho| \leq h$, $h > 0$ имеют место асимптотические формулы

$$z_1(x, \rho) = \cos \rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad z'_1(x, \rho) = -\rho \sin \rho x + O(1),$$

$$z_2(x, \rho) = \frac{\sin \rho x}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right), \quad z'_2(x, \rho) = \cos \rho x + O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

где оценки $O(\dots)$ равномерны по $x \in [0, 1]$.

Введем в рассмотрение окружность

$$\gamma_n = \{\rho : |\rho - 2\pi n| = \delta\}, \quad \delta > 0.$$

Тогда из теоремы 3 следует

Лемма 1 При $\rho \in \gamma_n$ имеют место асимптотические формулы:

$$z_1^j(x, \rho) = z_1^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-1}), \quad z_2^j(x, \rho) = z_2^{0(j)}(x, \rho) + O(\rho^{j-2}),$$

где $j = 0, 1, 2$, $z_k^j(x, \rho)$ — j -ая производная по x функции $z_k(x, \rho)$,
 $z_1^0(x, \rho) = \cos \rho x$, $z_2^0(x, \rho) = \sin \frac{\rho x}{\rho}$.

Лемма 2 Пусть $\Delta_0(\rho) = (u_{ij}^0(\rho))_1^2$, где $u_{ij}^0(\rho) = U_i(z_j^0)$. При $\rho \in \gamma_n$ имеет место формула

$$\frac{1}{\Delta(\rho)} = \frac{1}{\Delta_0(\rho)} + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Лемма 3 При $\rho \in \gamma_n$ имеют место следующие формулы;

$$(g, z_1) = (g_3(\eta) \cos \mu \eta, \cos 2\pi n \eta) - (g_3(\eta) \sin \mu \eta, \sin 2\pi n \eta),$$

$$(g, z_1 - z_1^0) = \frac{1}{2\pi n + \mu} [(g_4(\eta) \cos \mu \eta, \sin 2\pi n \eta) + (g_4(\eta) \sin \mu \eta, \cos 2\pi n \eta)],$$

где

$$g_3(\eta) = g(\eta) + \int_{\eta}^1 K_1(\tau, \eta) g(\tau) d\tau,$$

$$g_4(\eta) = g(\eta) K_1(\eta, \eta) - \int_{\eta}^1 K_{i\eta}(\tau, \eta) g(\tau) d\tau,$$

$$g(\eta) \in C[0, 1].$$

Лемма 4 При $\rho \in \gamma_n$ имеют место формулы

$$(g, z_2) = \frac{1}{2\pi n + \mu} [(g_5(\eta) \cos \mu \eta, \sin 2\pi n \eta) + (g_5(\eta) \sin \mu \eta, \cos 2\pi n \eta)],$$

$$(g, z_2 - z_2^0) = \frac{1}{(2\pi n + \mu)^2} [(g_6(\eta) \cos \mu \eta, \cos 2\pi n \eta) + (g_6(\eta) \sin \mu \eta, \sin 2\pi n \eta)],$$

где

$$g_5(\eta) = g(\eta) + \int_{\eta}^1 K(\tau, \eta) g(\tau) d\tau,$$

$$g_6(\eta) = -g(\eta) K(\eta, \eta) + \int_{\eta}^1 K'_{\eta}(\tau, \eta) g(\tau) d\tau, \quad g(\eta) \in C[0, 1].$$

Лемма 5 При $\rho \in \gamma_n$ справедлива следующая оценка, равномерно сходящаяся по $x \in [0, 1]$:

$$R_{\lambda} f = O(\rho^{-1} \|f\|_1),$$

где $\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt$.

Формальный ряд (8) представляется в виде 3 рядов:

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t),$$

где

$$u_0(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda - \mu_0} \cos p t d\lambda - \sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda - \mu_0} \cos p t d\lambda$$

$$u_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [R_\lambda g - R_\lambda^0 g] \cos p t d\lambda,$$

$$u_2(x, t) = -\sum_{n \geq n_0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}_n} \frac{1}{\lambda - \mu_0} [R_\lambda g - R_\lambda^0 g] \cos p t d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0 - \lambda E)^{-1}$ — резольвента оператора L_0 , который есть оператор L при $q(x) \equiv 0$ и $\tilde{\gamma}_n$ — есть образ γ_n в λ -плоскости окружности $\gamma_n = \{\rho : |\rho - n\pi| = \delta\}$.

Сходимость каждого ряда исследуется отдельно.

Первый ряд $u_0(x, t)$ суммируется :

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2} [\tilde{\varphi}_1(x + t) + \tilde{\varphi}_1(x - t)],$$

где $\tilde{\varphi}_1$ — это продолжение φ_1 нечетным образом на всю ось с периодом 2, $\varphi_1 = R_{\mu_0}^0 (L - \mu_0 E) \varphi$,

$$\tilde{\varphi}_1(\tau) = (\varphi_1, 1) + 2 \sum_{n=0}^{\infty} [(\varphi_1(\eta), \cos 2\pi n \eta) \cos 2\pi n \tau + (\varphi_1(\eta), \sin 2\pi n \eta) \sin 2\pi n \tau].$$

Ряды $u_1(x, t), u_2(x, t)$ можно почленно дифференцировать и доказывается, что они сходятся.

Лемма 6 Формальное решение сходится абсолютно равномерно по $x \in [0, 1]$ и всех $t \in [-T, T]$, где $T > 0$ любое фиксированное число.

Теорема 4 Формальное решение $u(x, t)$ задачи

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - q(x)u(x, t),$$

$$u(0, t) = u(1, t) \quad u_x(0, t) = u_x(1, t),$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u'_t(x, 0) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad t \in (-\infty, \infty)$$

дает классическое решение при условиях

$$\varphi(x) \in C^2[0, 1], \quad \varphi(0) = \varphi(1), \quad \varphi'(0) = \varphi'(1),$$

$$\varphi''(0) - \varphi''(1) - (q(0) - q(1))\varphi(0) = 0.$$

Практическая часть. Рассмотрим смешанную задачу следующего вида:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + 4\pi^2 t \sin 2\pi x, \quad (11)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad (12)$$

$$u(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad u'_t(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad (13)$$

$$x \in [0, 1], \quad t \in [0, 1].$$

Решение задачи будем искать с помощью метода разделения переменных. Так как уравнение (11) неоднородное, задача (11)-(13) разобьется на две подзадачи:

1) однородную задачу с ненулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} v_{tt} = v_{xx}, \\ v(x, 0) = \sin 2\pi x, \quad v'_t(x, 0) = \sin 2\pi x, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0; \end{cases} \quad (14)$$

2) неоднородную к задачу с нулевыми начальными условиями

$$\begin{cases} w_{tt} = w_{xx} + 4\pi^2(t+1)\sin 2\pi x, \\ w(x, 0) = 0, \quad w'_t(x, 0) = 0, \\ w(0, t) = w(1, t) = 0. \end{cases} \quad (15)$$

Решением задачи (11)-(13) будет сумма решений задач (14) и (15).

Решение задачи (11)-(13) имеет вид

$$u(x, t) = 4\pi^2 t \sin 2\pi x - 4 \sin 2\pi x \sin \pi t + \frac{2}{3\pi^2} \sin^3 \pi \sin \pi x (\pi \cos \pi t + 2 \sin \pi t).$$

В работе в приложении А приводится программа, которая находит численное решение данной задачи разностным методом, а в приложении Б приведены поточечные решения задачи (11)-(13), полученные разностным методом и методом Фурье на отрезке $[0, 1]$ с шагом 0.1.

Заключение. В работе был исследован резольвентный подход к методу Фурье для однородного волнового уравнения с периодическими краевыми условиями.

Этот подход позволяет получить классическое решение для рассматриваемой задачи при минимальных условиях на исходные данные, не используя при этом уточненных асимптотик для собственных значений и никакой информации о собственных функциях.

Под классическим решением понимается дважды непрерывно дифференцируемая функция, удовлетворяющая условиям (1)-(3). Если существует классическое решение задачи, то функция $\varphi(x)$ также обязана удовлетворять этим условиям. Было показано, что эти условия являются и достаточными. К настоящему времени разработан значительный математический аппарат, предназначенный для решения краевых задач. Однако не существует одного универсального метода, который обладал бы преимуществами во всех ситуациях. Каждый метод имеет свою область применения, в которой он является более эффективным. Поэтому разработка новых методов и усовершенствование существующих всегда были и остаются актуальными задачами.