Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений и
прикладной математики

Исследование формального решения смешанной задачи для волнового уравнения

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 — Прикладная математика и информатика

Механико-математического факультета

Горбуновой Юлии Николаевны

Научный руководитель
Профессор,к.ф.-м.н. ______________ А. П. Хромов

Заведующий кафедрой
Профессор, д.ф.-м.н. ______________ А. П. Хромов

Саратов 2017

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Работа посвящена исследованию решения смешанной задачи для волнового уравнения с тремя видами граничных условий, полученного с помощью метода Фурье. Также предполагается использование минимальных требований на начальные условия. То есть метод Фурье используется, без исследования равномерной сходимости ряда, представляющего формального решения по методу Фурье и рядов, полученных из него почленным дифференцированием до второго порядка. Вместо этого, используется метод Коши-Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора, порождаемого спектральной задачей метода Фурье.

Метод Фурье используется при решении задач математической физики, имеющих необходимые и достаточные условия для начальных данных. Необходимые условия получаются из самой постановки задачи, в то время как достаточные получаются из обоснования метода Фурье. Зачастую, в процессе обоснования метода, получаются завышенные требования на начальные данные, обусловленных легитимностью тех или иных математических преобразований, поэтому нахождение минимальных достаточных условий и исследование полученных решений для них является актуальной задачей на текущий момент.

Цель работы. Исследовать формальное решение волнового уравнения, полученного методом Фурье при минимальных начальных данных для граничных условий трех видов, охватывающих все линейные двуточечные граничные условия.

Структура работы. Магистерская работа содержит 52 страниц машинописного текста и состоит из введения, шести глав (Смешанная задача с закрепленными концами, Поведение формального решения уравнения смешанной задачи для волнового уравнения с закрепленными концами, Случай свободного закрепления обоих концов, Случай с минимально необходимыми требованиями на ?(x), Обоснование метода Фурье для волнового уравнения при минимальных требованиях на исходные данные и Программный алгоритм решения), заключения, списка литературы и приложения а, содержащего код программы для решения волнового уравнения.

Научная новизна. В магистерской работе исследуется новая смешанная задача для волнового уравнения с минимальными требованиями на начальные данные. Получено численное решение. Положения, выносимые на защиту. Исследован резольвентный подход к обоснованию метода Фурье для решения волнового уравнения для различных граничных условий. Представлены результаты моделирования задачи.

Основное содержание работы.

Во введении была поставлена задача, описана проблематика вопроса и направление исследования.

Смешанная задача для волнового уравнения выглядит так:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - q(x)u(x,t) \qquad (1)$$

$x \in [0,1], t \in (-\infty, \infty)$,

При начальных условиях:

$$u(x,0) = \varphi(x), u'_t(x,0) = 0 \qquad (2)$$

И при граничных условиях:

а)

$$u(0,t) = u(1,t) = 0,$$

б)

$$u'_x(0,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0,$$

$$u'_x(1,t) + \alpha_2 u(0,t) + \beta_2 u(1,t) = 0,$$

в)

$$u'_x(0,t) + \beta u'_x(1,t) + \alpha_1 u(0,t) + \beta_1 u(1,t) = 0,$$

$$\alpha u(0,t) + u(1,t) = 0.$$

$\alpha, \beta, \alpha_i, \beta_i, i = 1,2$ - берутся комплексными.

Все функции предполагаются комплекснозначными, а так же:

$$\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi(0) = \varphi(1) = \varphi''(0) = \varphi''(1) = 0, q(x) \in C[0,1].$$

Первый раздел посвящен рассмотрению смешанной задачи с закрепленными концами при $\varphi(x) \in C^2[0,1]$. В частности, в первом подразделе рассмотрена асимптотика собственных значений для соответствующей спектральной задачи:

$$Ly = -y''(x) + q(x)y(x), y(0) = y(1) = 0.$$

Теорема 1 Краевая задача L имеет счетное множество собственных значений $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$. При этом

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = \pi n + \frac{\omega}{n} + \frac{\kappa_n}{n}, \quad \{\kappa_n\} \in l_2,$$

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos nx + \frac{\xi_n(x)}{n}, \quad |\xi_n(x)| \leq C,$$

где

$$\omega = \frac{1}{2}\int_0^1 q(t)\,dt.$$

Для нашего случая достаточно взять $\rho_n = \pi n + O(1/n)$

Во втором подразделе рассмотрено преобразование формального решения для данной задачи, получены основные формулы для формального решения и представления резольвенты соответствующей спектральной задачи, получена асимптотика решений спектральной задачи. Формальное решение по методу Фурье берется в виде:

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} (R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda - \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda =$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda$$

Для формального решения имеет место формула:

Теорема 2.

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_0(x,t),$$

где

$$u_0(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{R_\lambda^0 g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda + \sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{R_\lambda^0 g}{\lambda-\mu_0}\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_1(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|\lambda|=r} \frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda g - R_\lambda^0 g]\cos\rho t d\lambda,$$

$$u_2(x,t) = -\sum_{n\geq n_0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\frac{1}{\lambda-\mu_0}[R_\lambda f_1 - R_\lambda^0 f_1]\cos\rho t d\lambda,$$

$R_\lambda^0 = (L_0-\lambda E)^{-1}$– резольвента оператора L_0, который получается из L при $q(x)\equiv 0$ (считаем, что вышеприведенные требования на μ_0 выполняются и для оператора L_0).

Из общего решения спектральной задачи, обозначая z_1 и z_2 как решение спектральной задачи,получена формула для представления резольвенты:

$$R_\lambda f = -z_2(x,\rho)(f,z_1) + v(x,\rho)(f,z_2) + (M_\rho f)(x),$$

где $v(x,\lambda) = \frac{z_2(x,\rho)z_1(1,\rho)}{z_2(1,\rho)}$, $(f,g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)dx$, $M_\rho f = \int\limits_0^x M(x,t,\rho)f(t)dt$, $M(x,t,\rho) = \begin{vmatrix} z_1(t,\rho) & z_2(t,\rho) \\ z_1(x,\rho) & z_2(x,\rho) \end{vmatrix}$.

В третьем подразделе доказывается теорема о том, что формальное решение является классическим решением задачи с закрепленными концами при минимальных условиях на $\varphi(x)$.

Во втором разделе исследуется решение уравнения смешанной задачи для волнового уравнения с закрепленными концами при $\varphi(x)\in W_2^2$. Большинство результатов из 1 главы тут сохраняются, поэтому глава дополнена более точной теоремой о формальном решении и о виде $u_0(x,t)$. Также сделан важный результат в виде леммы:

Лемма 11. Частные производные по x и t второго порядка для $u_0(x,t)$ и существуют почти всюду в $Q_T = [0,1]\times[-\mathrm{T},\mathrm{T}] = \{x,t : \mathrm{x}\in[0,1], t\in$

$[-\mathrm{T}, T]\}$, и для таких x и t справедливо

$$\frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u_0(x,t)}{\partial t^2}.$$

А так же, рассмотрена:

Теорема 8. Функция $u(x,t)$ непрерывно дифференцируема по x $\in [0,1]$и$t \in (-\infty,\infty)$; $u'_x(x,t)(u'_t(x,t))$ абсолютно непрерывна по x(t); $\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}$ конечны почти всюду по x и t и в этом случае выполняется (1), а для всех x и t выполняются (2), а), т.е. $u(x,t)$ есть решение задачи (1)–(2), а), когда (1) выполняется лишь почти всюду.

В третьем разделе рассматривается смешанная задача с граничными условиями б) при $\varphi(x) \in L_2[0,1]$. Получены аналогичные результаты для данной задачи. Кроме того, получена сходимость и оценка формального решения.

Лемма 14. Ряд $u(\mathrm{x},0) \to \varphi(\mathrm{x})$ почти всюду на [0, 1].

Лемма 15. Имеет место оценка

$$\|u_h(x,t) - u(x,t)\|_{L_2(Q_T)} \leq c_T \|\varphi_h - \varphi\|_{L_2[0,1]}.$$

В четвертом разделе рассматривается задача с граничным условием в). В первом подразделе получены условия для граничных б), но при $\varphi(x) \in W_2^2$, а во втором подразделе уже рассматривались граничные в) при том же условии на $\varphi(x)$.

В первой части получено $u_0(x)$ для текущих условий

Лемма 19. Имеет место формула

$$u_0(x,t) = \frac{1}{2}[\Phi(x+t) + \Phi(x=t)],$$

где $\Phi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} v_n(x) \in W_2^2[-A,A]$, $\Phi(x)$ - нечетная, $\Phi(2+x) = \Phi(x), \Phi(x) = \varphi_1(x)$ при $x \in [0,1]$.

А во второй:

Лемма 22. Если x $\in [0,1]$, то $\Phi(\mathrm{x}) = \varphi_1(x)$.

Лемма 23. $\forall \mathrm{A} > 0 \Phi(x) \in W_2^2[-\mathrm{A}, A]$ и

$$\Phi(-x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}[(1-\alpha\beta)\Phi(x) - 2\beta\Phi(1-x)], \tag{29}$$

$$\Phi(1+x) = \frac{1}{1+\alpha\beta}[(\alpha\beta-1)\Phi(1-x) - 2\alpha\Phi(x)], \tag{30}$$

Откуда и получается, основной результат работы:

Лемма 24. Функция $u_0(x,t)$ есть решением задачи (1), (2) с условиями

$$u'_{0x}(0,t) + \beta u'_{0x}(1,t) = \alpha u_0(0,t) + u_0(1,t) = 0$$

при $q(x) \equiv 0, \varphi_1(x)$ вместо $\varphi(x)$, а дифференциальное уравнение (1) удовлетворяется лишь почти всюду.

Откуда следует, что для всех условий выполняются теоремы 7 и 8:

Теорема 7. При условиях (2), a) функция $u(x,t)$- решение уравнения

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) - u_0(x,t)) = -q(x)u(x,t).$$

В главе 5 методом контурного интегрирования резольвенты оператора соответствующей спектральной задачи дается обоснование метода Фурье при начальных данных $u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \psi(x)$. При этом используется прием ускорения сходимости рядов Крылова.

Получена

Теорема 18. Формальное решение

$$u(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right)(R^0_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda,$$

есть классическое решение задачи (1) с условиями $u(0,t) = u(1,t) = 0, u(x,0) = 0, u_t(x,0) = \psi(x)$, $\psi(x) \in C[0,1], \psi(0) = \psi(1) = 0$.

Теорема 19. Формальное решение:

$$w(x,t) = -\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right)(R_\lambda\varphi)\cos\rho t d\lambda -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\left(\int\limits_{|\lambda|=r} + \sum_{n\geq n_0}\int\limits_{\tilde{\gamma}_n}\right)(R_\lambda\psi)\frac{\sin\rho t}{\rho}d\lambda$$

есть классическое решение задачи (1)-(2) при минимальных условиях (4) на $\varphi(x)$ и $\psi(x) \in C[0,1], \psi(0) = \psi(1) = 0$.

В шестой главе описан программный алгоритм решения задачи с помощью разностной схемы, найдена ошибка аппроксимации, условие устойчивости. В подразделе результаты в начале описан поиск первого собственного значения, собственной функции и решения для конкретного случая при $q(x) = \sin x, \varphi(x) = \sin \pi x$. После нахождения решение было записано в программу и результатом ее были графики на которых, в зависимости от момента времени (фиксированного) изображались найденное решение разностной схемой и аналитически-полученная функция.

Для остальных случаев аналитически найденные функции подбирались отдельно.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследовалось поведение формального решения по методу Фурье смешанной задачи для волнового уравнения при начальном условии φ(x) (при нулевой начальной скорости) с более слабыми требованиями гладкости, чем это требуется для классического решения и произвольных двухточечных граничных условиях. Используется метод, основанный на методе Коши–Пуанкаре контурного интегрирования резольвенты оператора, порожденного соответствующей спектральной задачей. Рассматриваются условия, дающие решение смешанной задачи, когда волновое уравнение удовлетворяется лишь почти всюду. В случае, когда $\varphi(x)$ есть произвольная функция из $L_2[0,1]$, формальное решение сходится почти всюду и является обобщенным решением смешанной задачи.

Было проведено моделирование данного волнового уравнения с помощью разностной схемы и проведено сравнение с результатом, полученным вручную методом Фурье.