Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра дифференциальных уравнений
и прикладной математики

О полноте собственных функций простейшего дифференциального оператора с двучленными краевыми условиями

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 2 курса 217 группы
направления 01.04.02 Прикладная математика и информатика
механико-математического факультета
Ромадиной Виктории Михайловны

Научный руководитель доцент, канд. физ.-матем. наук	15.06.18	В.С. Рыхлов
Заведующий кафедрой профессор, доктор физ.-матем наук	15.06.18	А.П. Хромов

Саратов 2018 год

Введение

Во многих вопросах современного естествознания возникает необходимость исследования спектральных свойств несамосопряженных операторов таких, как асимптотика собственных значений, асимптотика собственных функций, возможность представления рядами по собственным функциям, полнота собственных функций, минимальность, базисность и так далее.

Теория несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов, а также пучков таких операторов интенсивно развивалась на протяжении XX века. Большой вклад в создание этой теории внесли такие математики, как G. D. Birkhoff, Я. Д. Тамаркин, M. H. Stone, М. В. Келдыш, А. П. Хромов, А. А. Шкаликов и др.

Понятие обыкновенного дифференциального пучка возникает, в частности, при решении задач математической физики методом Фурье разделения переменных. Решение представляется в виде обобщенных рядов Фурье по собственным и присоединенным функциям соответствующей спектральной краевой задачи для операторного пучка.

Дипломная работа носит реферативный характер. Была поставлена задача — разобрать статьи[1,2], в которых формулируется и доказывается полнота системы собственных функций (с.ф.) простейшего дифференциального оператора с двучленными двухточечными краевыми условиями в 3-х единственно возможных невырожденных сильно нерегулярных случаях. В статье[1] доказательство подробно проведено только для одного случая. В данной магистерской работе проведено доказательство еще в одном сильно

[1]Голубь А. В., Кутепов В. А., Рыхлов В. С. О полноте собственных функций простейшего дифференциального оператора 5-го порядка // Деп. в ВИНИТИ 05.08.04. № 1354–В2004. Саратов, 2004. 49 с.

[2]Рыхлов В. С. О полноте корневых функций простейших сильно нерегулярных дифференциальных операторов с двучленными двухточечными краевыми условиями // Доклады Академии Наук, 2009. Т. 428, № 6. С. 740–743.

регулярном случае.

В пространстве $L_2[0,1]$ рассмотрен простейший линейный обыкновенный дифференциальный оператор L_0 пятого порядка, порожденный дифференциальным выражением (д.в.)

$$\ell_0(y) = y^{(5)}(x),\ x \in [0,1], \tag{0.1}$$

и двухточечными двучленными краевыми условиями

$$U_\nu^0(y) := \alpha_\nu y^{(\nu-1)}(0) + \beta_\nu y^{(\nu-1)}(1) = 0,\ \nu = \overline{1,5}, \tag{0.2}$$

В магистерской работе исследуется вопрос о полноте системы собственных функций (с.ф.) оператора L_0 в пространстве $L_2[0,1]$ для одного класса операторов (0.1)–(0.2), подробно не рассмотренного в статьях[1,2]. Основным результатом этих статей является следующая теорема.

Теорема 0.1: *Предположим, что $\beta_j \neq 0, j = \overline{1,5}$. Тогда либо система с.ф. оператора L_0 полна в пространстве $L_2[0,1]$, либо этот оператор вырожденный (то есть либо имеет не более конечного числа собственных значений (с.з.), либо все $\lambda \in \mathbb{C}$ являются его с.з.).*

При получении результата о полноте с.ф. в данной работе используется схема доказательства из статьи[1].

Работа состоит из 6 разделов, списка используемых источников и Приложения.

В первом разделе дается постановка задачи и краткая история вопроса.

Во втором разделе приводится схема доказательства полноты системы с.ф. в пространстве $L_2[0,1]$, в частности, вводятся "неклассические" порождающие функции $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma)$ для с.ф., содержащие вектор-параметр Γ, подходящий выбор которого позволяет в некоторых случаях доказывать полноту системы собственных функций.

В третьем разделе дается классификация дифференциальных операторов (0.1)–(0.2) по степени их нерегулярности, а именно вводятся множества операторов NR_j^k.

В четвертом разделе доказываются некоторые вспомогательные результаты, которые существенно используются в дальнейшем изложении.

В пятом разделе дается аналитическое описание множеств NR_j^k.

В шестом разделе проводится непосредственное доказательство теоремы 0.1 для случая NR_1^0. Этот раздел состоит из 2-х пунктов. В первом пункте подробно анализируется порождающая функция $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma)$, а во втором пункте доказывается полнота системы с.ф. оператора L_0.

Наконец, в Приложении приводятся листинги программ, написанных на языке MATLAB в виде m-файлов, которые использовались при доказательстве изложенных результатов.

В тексте автореферата для удобства чтения сохранена нумерация формул, теорем, лемм, определений из текста магистерской работы.

Основное содержание работы

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{C}$ есть множество с.з. оператора L. Считаем, что Λ — счетное множество и все с.з. оператора L простые. В этом случае все собственные функции (с.ф.) оператора L однократны[3].

Пусть система функций $y_j(x,\lambda)$, $j=\overline{1,n}$, есть фундаментальная система решений (ф.с.р.) уравнения $\ell(y)-\lambda y=0$, определяемая начальными условиями при $x=0$, образующими единичную матрицу, то есть $y_j^{(k-1)}(0,\lambda)=\delta_{jk}$, $j,k=\overline{1,n}$, где δ_{jk} есть символ Кронекера. Функции $y_j(x,\lambda)$ есть целые аналитические функции по λ.

Известно[3], что $\lambda \in \Lambda$ является с.з. оператора L тогда и только тогда,

[3]Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы // М. : Наука, 1969. 528 с.

когда λ является нулем характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}.$$

Очевидно, $\Delta(\lambda)$ есть целая аналитическая функция.

Определение 2.1: $g(x, \lambda)$ называется *порождающей функцией* для системы с.ф. оператора L, если система $\{z(x, \lambda), \lambda \in \Lambda\}$, где Λ есть множество с.з. оператора, совпадает с множеством с.ф. оператора L.

Рассмотрим следующие порождающие функции для с.ф. оператора L

$$g_j(x,\ \lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \dots & U_1(y_n) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ U_{j-1}(y_1) & U_{j-1}(y_2) & \dots & U_{j-1}(y_n) \\ y_1(x,\lambda) & y_2(x,\lambda) & \dots & y_n(x,\lambda) \\ U_{j+1}(y_1) & U_{j+1}(y_2) & \dots & U_{j+1}(y_n) \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}, \quad j = \overline{1, n}$$

Эти функции также являются целыми аналитическими функциями по λ для оператора L, линейно независимыми при $\lambda \notin \Lambda$.

Предположим, что функция $\bar{f} \in L_2[0, 1]$ ортогональна системе с.ф. оператора L. Условие ортогональности можно записать в виде

$$0 = \int\limits_0^1 g_j(x, \lambda) f(x) dx := G_j(\lambda),\ \lambda \in \Lambda, \quad j = \overline{1, n}. \tag{2.1}$$

Здесь $G_j(\lambda)$ есть также целая аналитическая функция по λ.

Рассмотрим следующие функции

$$\mathcal{G}_j(\lambda) := \frac{G_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Это, вообще говоря, мероморфные функции, полюсами которых могут быть только нули $\Delta(\lambda)$. В силу предположения (2.1) полюсы функций $G_j(\lambda)$ являются устранимыми, то есть $G_j(\lambda)$ на самом деле есть целые аналитические функции по λ.

Рассмотрим другую ф.с.р. $\widetilde{y}_1(x,\rho), \widetilde{y}_2(x,\rho), \ldots, \widetilde{y}_1(x,\rho)$ уравнения $\ell(y) - \lambda y = 0$ или, что то же самое, уравнения $\ell(y) + \rho^n y = 0$, где $\lambda = -\rho^n$, $\rho \in S_0 \cup S_1$, $\omega_j = \exp\frac{(2j-1)\pi i}{n}$, то есть $\omega_j^n = -1$. Системы $\{y_j(x,\lambda)\}$ и $\{\widetilde{y}(x,\rho)\}$ получаются друг из друга в результате умножения на невырожденную матрицу, то есть существует матрица $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\rho)$, такая, что $|\mathcal{A}(\rho)| = \det \mathcal{A}(\rho) \neq 0$ и

$$(y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda)) = (\widetilde{y}_1(x,\rho), \widetilde{y}_2(x,\rho), \ldots, \widetilde{y}_1(x,\rho))\mathcal{A}(\rho)$$

Следовательно,

$$g_j(x,\lambda) = \widetilde{g}_j(x,\rho)|\mathcal{A}(\rho)|, \quad G_j(\lambda) = \widetilde{G}_j(\rho)|\mathcal{A}(\rho)|, \quad \Delta(\lambda) = \widetilde{\Delta}(\rho)|\mathcal{A}(\rho)|,$$

где $\widetilde{g}_j(x,\rho)$, $\widetilde{G}_j(\rho)$, $\widetilde{\Delta}(\rho)$ строятся по тем же формулам, что и $g_j(x,\lambda)$, $G_j(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$, но только вместо ф.с.р. $\{y_j(x,\lambda)\}$ используется ф.с.р. $\{\widetilde{y}(x,\rho)\}$.

Таким образом,

$$\mathcal{G}_j(\lambda) = \frac{G_j(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \frac{\widetilde{G}_j(\rho)|\mathcal{A}(\rho)|}{\widetilde{\Delta}(\rho)|\mathcal{A}(\rho)|} = \frac{\widetilde{G}_j(\rho)}{\widetilde{\Delta}(\rho)} = \widetilde{\mathcal{G}}_j(\rho), \quad \rho \in S_0 \cup S_1.$$

А так как в левой части стоит целая функция по λ, а следовательно и по ρ, то функция справа есть целая функция по ρ во всей комплексной плоскости. Таким образом, функции $\widetilde{\mathcal{G}}_j(\rho)$ есть целые аналитические функции по $\rho \in \mathbb{C}$, причем, как нетрудно заметить, первой степени.

Мы будем говорить, что *целая аналитическая функция первой степени $F(\rho)$ обладает свойством (A) (или кратко $G(\rho) \in (A)$), если в ρ-плоскости существуют по крайней мере три луча, исходящие из начала, каждые два соседних из которых имеют между собой угол, меньший π, и на которых функция $G(\rho)/\widetilde{\Delta}(\rho)$ имеет не более чем степенной рост.*

Для регулярных, слабо нерегулярных, полураспадающихся краевых условий всегда существуют $j = \overline{1,n}$, при которых $\widetilde{G}_j(\rho) \in (A)$. Отсюда известными рассуждениями выводим, что $f(x) = 0$ п.в. на $[0,1]$, тем самым установив полноту системы.с.п.ф. оператора L во всех этих случаях.

Если же оператор L сильно нерегулярен и не порожден полураспадающимися краевыми условиями, будем иметь, вообще говоря, что $\widetilde{G}_j(\rho) \notin (A)$, $j = \overline{1,n}$ и воспользоваться вышеизложенной схемой доказательства не удается.

Таким образом, проблема состоит в нахождении подходящей порождающей функции, то есть такой порождающей функции $\widetilde{g}(x,\rho)$, что соответствующая ей функция $G(\rho) \in (A)$

Но даже если $\widetilde{G}_j(\rho) \notin (A)$ $\forall j = \overline{1,n}$, можно подобрать такие аналитические по ρ функции $\gamma_1(\rho, \gamma_2(\rho), \dots, \gamma_n(\rho)$, что функция $\widetilde{G}(\rho,\Gamma) \in (A)$, где

$$\widetilde{G}(\rho,\Gamma) = \gamma_1(\rho)\widetilde{G}_1(\rho) + \gamma_2(\rho)\widetilde{G}_2(\rho) + \dots + \gamma_n(\rho)\widetilde{G}_n(\rho) =$$
$$= \int_0^1 (\gamma_1(\rho)\widetilde{g}_1(\rho) + \dots + \gamma_n(\rho)\widetilde{g}_n(\rho))f(x)dx = \int_0^1 \widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho))f(x)dx,$$

где $\Gamma(\rho) = (\gamma_1(\rho), \dots, \gamma_n(\rho))^T$, $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho)) = \gamma_1(\rho)\widetilde{g}_1(\rho) + \dots + \gamma(\rho)_n\widetilde{g}_n(\rho)$, причем для порождающей функции $\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho))$ имеет место представление

$$\widetilde{g}(x,\rho;\Gamma(\rho)) = \begin{vmatrix} 0 & \widetilde{y}_1(x,\rho) & \dots & \widetilde{y}_n(x,\rho) \\ -\gamma_1(\rho) & U_1(\widetilde{y}_1) & \dots & U_1(\widetilde{y}_n) \\ -\gamma_2(\rho) & U_2(\widetilde{y}_1) & \dots & U_2(\widetilde{y}_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\gamma_n(\rho) & U_n(\widetilde{y}_1) & \dots & U_n(\widetilde{y}_n) \end{vmatrix}$$

Таким образом, для решения вопроса о полноте системы с.п.ф. оператора L необходимо построить такие векторы $\Gamma(\rho)$, чтобы $\widetilde{G}(\rho,\Gamma(\rho)) \in (A)$.

Доказательство основного результата данной работы о полноте системы с.ф. простейшего оператора L_0 проводиться по рассмотренной выше схеме, суть которой составляет метод построения требуемых векторов $\Gamma(\rho)$ для простейшего оператора L_0. Необходимые векторы $\Gamma(\rho)$ удалось построить не сразу для всех нераспадающихся сильно нерегулярных краевых условий вида (0.2), а для конкретных множеств. Для этого потребовалось предварительно провести соответствующую классификацию краевых условий (0.2) по степени их нерегулярности.

Далее будем рассматривать обыкновенный дифференциальный оператор 5-го порядка L_0 в пространстве $L_2[0,1]$, порожденный д.в. (0.1) и двухточечными двучленными граничными условиями (0.2).

Обозначим при $\nu, j = \overline{1,5}$

$$U_\nu^0(e^{\rho\omega_j x}) \equiv \alpha_\nu(\rho\omega_j)^{\nu-1} + \beta_\nu(\rho\omega_j)^{\nu-1}e^{\rho\omega_j} := \rho^{\nu-1}(v_{\nu j} + w_{\nu j}e^{\rho\omega_j}) := u_{\nu j},$$

где $v_{\nu j} = (\alpha_\nu \omega_j^{\nu-1})$, $w_{\nu j} = (\beta_\nu \omega_j^{\nu-1})$.

Положим

$$V_j = \begin{pmatrix} v_{1j} \\ v_{2j} \\ \vdots \\ v_{5j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2\omega_j \\ \vdots \\ \alpha_5\omega_j^4 \end{pmatrix}, \quad W_j = \begin{pmatrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ \vdots \\ w_{5j} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2\omega_j \\ \vdots \\ \beta_5\omega_j^4 \end{pmatrix},$$

$$\Delta_0 = \det(V_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5) =: |V_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5|,$$

$$\Delta_1 = |W_1\ V_2\ V_3\ V_4\ V_5|,\ \Delta_2 = |V_1\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5|,\ \ldots,$$

$$\Delta_{12} = |W_1\ W_2\ V_3\ V_4\ V_5|,\ \ldots,\ \Delta_{12345} = |W_1\ W_2\ W_3\ W_4\ W_5|.$$

Отметим на плоскости (см. рис. 1–3) все точки 0, ω_j, $\omega_j + \omega_k$ $(j \neq k)$, $\omega_j + \omega_k + \omega_l$ $(j \neq k \neq l \neq j)$, $\ldots$, $\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 (= 0)$ (на рисунке цифрой j обозначается точка ω_j, суммой $1+2$ обозначается точка $\omega_1 + \omega_2$ и т.д.). Пусть M_0 — выпуклая оболочка отмеченных точек. Очевидно, M_0 является правильным 10-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$
\begin{array}{llll}
\sigma_{01}^{0}=\omega_1+\omega_2, & \sigma_{02}^{0}=\omega_2+\omega_3, & \ldots, & \sigma_{05}^{0}=\omega_5+\omega_1,\\
\sigma_{01}^{1}=\omega_1+\omega_2+\omega_3, & \sigma_{02}^{1}=\omega_2+\omega_3+\omega_4, & \ldots, & \sigma_{05}^{1}=\omega_5+\omega_1+\omega_2,
\end{array}
$$

Обозначим через M_0^0 и M_0^1 выпуклые оболочки точек σ_{0j}^0, $j=\overline{1,5}$ и σ_{0j}^1, $j=\overline{1,5}$, соответственно. Очевидно, M_0^0 и M_0^1 есть правильные 5-угольники с центром в начале координат и с вершинами в точках σ_{0j}^0, $j=\overline{1,5}$ и σ_{0j}^1, $j=\overline{1,5}$, соответственно, которые перемежаются друг с другом.

Если удалить вершины многоугольника M_0 и обозначить через M_1 выпуклую оболочку оставшихся точек, то многоугольник M_1 будет также, как и M_0, правильным 10-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$
\begin{array}{lll}
\sigma_{11}^{0}=\omega_1, & \ldots, & \sigma_{15}^{0}=\omega_5,\\
\sigma_{11}^{1}=\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4, & \ldots, & \sigma_{11}^{1}=\omega_5+\omega_1+\omega_2+\omega_3,
\end{array}
$$

которые лежат на тех же самых лучах, исходящих из начала координат, что и вершины многоугольника M_0 (правильный многоугольник M_1 выделен жирной линией на рис. 1).

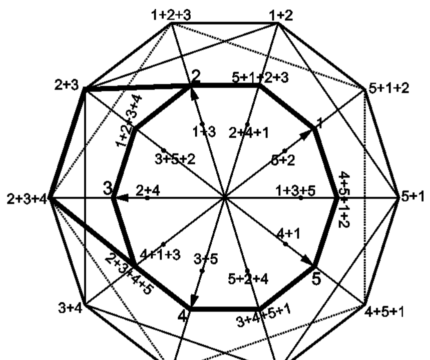

Рис. 1

Обозначим через M_1^0 и M_1^1 выпуклые оболочки точек σ_{1j}^0, $j=\overline{1,5}$ и σ_{1j}^1, $j=\overline{1,5}$, соответственно. Очевидно, M_1^0 и M_1^1 есть правильные 5-угольники с центром в начале координат и с вершинами в точках $\sigma_{1j}^0,\ j=\overline{1,5}$ и σ_{1j}^1, $j=\overline{1,5}$, соответственно, которые также перемежаются друг с другом (многоугольники M_1^0 и M_1^1 выделены жирными линиями на рис. 2 и 3 соответственно).

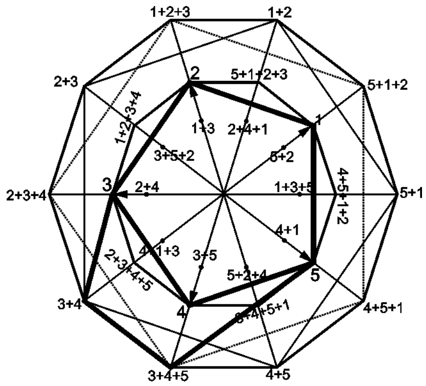

Рис. 2

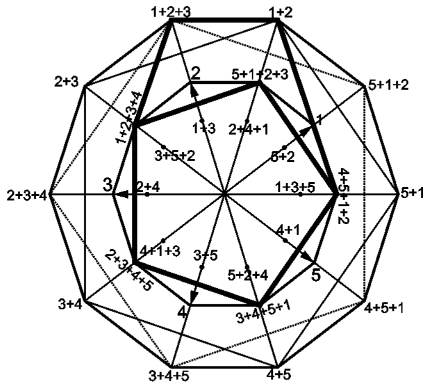

Рис. 3

Если удалить вершины многоугольников M_0 и M_1 и обозначить через M_2 выпуклую оболочку оставшихся точек, то легко заметить, что многоугольник M_2 будет также, как и M_0 и M_1, правильным 10-угольником с центром в начале координат и с вершинами в точках

$$\begin{array}{lll} \sigma_{21}^0=\omega_1+\omega_3, & \ldots, & \sigma_{25}^0=\omega_5+\omega_2, \\ \sigma_{21}^1=\omega_1+\omega_2+\omega_4, & \ldots, & \sigma_{25}^1=\omega_5+\omega_1+\omega_3, \end{array}$$

которые лежат на тех же самых лучах, исходящих из начала координат, что и вершины многоугольников M_0 и M_1.

Нетрудно показать, что многоугольник M_1 лежит строго внутри многоугольников M_0, M_0^0 и M_0^1. А многоугольник M_2 – строго внутри многоугольников M_1, M_1^0 и M_1^1.

Подсчитаем характеристический определитель оператора L_0:

$$\widetilde{\Delta}(\rho)=\begin{vmatrix} u_{11} & \ldots & u_{15} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{51} & \ldots & u_{55} \end{vmatrix} = \rho^{10}|V_1+e^{\rho\omega_1}W_1,\ldots,V_5+e^{\rho\omega_1}W_5| =$$

$$= \rho^{10}((\Delta_{12}e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} + \Delta_{23}e^{\rho(\omega_2+\omega_3)} + \ldots + \Delta_{15}e^{\rho(\omega_1+\omega_5)})+$$

$$+(\Delta_{123}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + \Delta_{234}e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \ldots + \Delta_{125}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)})+$$

$$+(\Delta_1 e^{\rho\omega_1} + \Delta_2 e^{\rho\omega_2} + \ldots + \Delta_5 e^{\rho\omega_5})+$$

$$+(\Delta_{1234}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \Delta_{2345}e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + \ldots + \Delta_{1235}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)})+$$

$$+(\Delta_{13}e^{\rho(\omega_1+\omega_3)} + \Delta_{24}e^{\rho(\omega_2+\omega_4)} + \ldots + \Delta_{25}e^{\rho(\omega_2+\omega_5)})+$$

$$+(\Delta_{124}e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} + \Delta_{235}e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} + \ldots + \Delta_{135}e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}) + \Delta_{12345} + \Delta_0).$$

Лемма 3.1: *Справедливы следующие равенства*

$$\Delta_{12} = \Delta_{23} = \Delta_{34} = \Delta_{45} = \Delta_{15},$$

$$\Delta_{123} = \Delta_{234} = \Delta_{345} = \Delta_{145} = \Delta_{125},$$

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = \Delta_1,$$

$$\Delta_{1234} = \Delta_{2345} = \Delta_{1345} = \Delta_{1245} = \Delta_{1235},$$

$$\Delta_{13} = \Delta_{24} = \Delta_{35} = \Delta_{14} = \Delta_{25},$$

$$\Delta_{124} = \Delta_{235} = \Delta_{134} = \Delta_{245} = \Delta_{135}.$$

В силу этой леммы

$$\widetilde{\Delta}(\rho) = \rho^{10}|V_1 + e^{\rho\omega_1}W_1, \ldots, V_5 + e^{\rho\omega_1}W_5| =$$

$$= \rho^{10}\Big(\Delta_{12}(e^{\rho(\omega_1+\omega_2)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3)} + \ldots + e^{\rho(\omega_1+\omega_5)})+$$

$$+\Delta_{123}(e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + \ldots + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_5)})+$$

$$+\Delta_1(e^{\rho\omega_1} + e^{\rho\omega_2} + \ldots + e^{\rho\omega_5})+$$

$$+\Delta_{1234}(e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_4)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_4+\omega_5)} + \ldots + e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_3+\omega_5)})+$$

$$+\Delta_{13}(e^{\rho(\omega_1+\omega_3)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_4)} + \ldots + e^{\rho(\omega_2+\omega_5)})+$$

$$+\Delta_{124}(e^{\rho(\omega_1+\omega_2+\omega_4)} + e^{\rho(\omega_2+\omega_3+\omega_5)} + \ldots + e^{\rho(\omega_1+\omega_3+\omega_5)}) + \Delta_{12345} + \Delta_0\Big).$$

Отметим на рисунке точки $\omega_1+\omega_2,\ \omega_2+\omega_3,\dots,\omega_5+\omega_1$, если $\Delta_{12}\neq 0$, $\omega_1+\omega_2+\omega_3,\ \omega_2+\omega_3+\omega_4,\dots,\omega_5+\omega_1+\omega_2$, если $\Delta_{123}\neq 0$, и так далее. Пусть M_Δ есть выпуклая оболочка отмеченных точек. Очевидно, M_Δ является многоугольником, симметричным относительно начала координат и инвариантным относительно поворота на угол $\frac{2\pi}{5}$. Вид этого многоугольника характеризует степень вырожденности характеристического определителя. Будем называть этот многоугольник *характеристическим многоугольником* оператора L_0.

Возможны следующие случаи:

(**0**) $\Delta_{12}\neq 0\wedge\Delta_{123}\neq 0$. Здесь $M_\Delta=M_0$. Это регулярный по Биркгофу случай. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать как NR_0 и кратко писать $L_0\in\mathrm{NR}_0$.

($\mathbf{0^0}$) $\Delta_{12}\neq 0\wedge\Delta_{123}=0$. Здесь $M_\Delta=M_0^0$. Это первый из двух слабо нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать как NR_0^0 и кратко писать $L_0\in\mathrm{NR}_0^0$.

($\mathbf{0^1}$) $\Delta_{12}=0\wedge\Delta_{123}\neq 0$. Здесь $M_\Delta=M_0^1$. Это второй из двух слабо нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать как NR_0^1 и кратко писать $L_0\in\mathrm{NR}_0^1$.

(**1**) $\Delta_1\neq 0\wedge\Delta_{12}=\Delta_{123}=0\wedge\Delta_{1234}\neq 0$. Здесь $M_\Delta=M_1$ (см. рис. 1). Это первый из четырех возможных сильно нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать как NR_1 и кратко писать $L_0\in\mathrm{NR}_1$.

($\mathbf{1^0}$) $\Delta_1\neq 0\wedge\Delta_{12}=\Delta_{123}=\Delta_{1234}=0$. Здесь $M_\Delta=M_1^0$ (см. рис. 2). Это второй из четырех возможных сильно нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать как NR_1^0 и кратко писать $L_0\in\mathrm{NR}_1^0$.

($\mathbf{1^1}$) $\Delta_1=\Delta_{12}=\Delta_{123}=0\wedge\Delta_{1234}\neq 0$. Здесь $M_\Delta=M_1^1$ (см. рис. 3). Это третий из четырех возможных сильно нерегулярных случаев. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать как NR_1^1 и кратко писать $L_0 \in \mathrm{NR}_1^1$.

(2) $\Delta_1 = \Delta_{12} = \Delta_{123} = \Delta_{1234} = 0$. Здесь $M_\Delta \subset M_2$. Множество операторов L_0, обладающих данным свойством, будем обозначать как NR_2 и кратко писать $L_0 \in \mathrm{NR}_2$. Это четвертый из четырех возможных сильно нерегулярных случаев, который содержит все оставшиеся сильно нерегулярные случаи, если они есть (далее будет показано, что все операторы из этого множества — вырожденные).

Для полного доказательства теоремы 0.1 осталось рассмотреть случаи только сильно нерегулярных операторов L_0 из множества NR_1, NR_1^0 и NR_1^1, так как полнота с.ф. в регулярном и слабо нерегулярном случаях следует из результатов статьи[4], а случай NR_2, как показано в магистерской работе, является вырожденным. Если для операторов L_0 из этих множеств будет доказана полнота в пространстве $L_2[0,1]$ системы их с.ф., то тем самым теорема 0.1 будет полностью доказана.

Случай NR_1 был подробно рассмотрен в статье[1]. В данной магистерской работы проведено подробное доказательство полноты с.ф. в случае NR_1^1.

Заключение

Таким образом, в данной магистерской работе изложена общая схема доказательства полноты системы собственных функций в случае простейшего дифференциального оператора L_0 пятого порядка с двухточечными двучленными краевыми условиями. Проведено подробное доказательство теоремы о полноте системы собственных функций оператора L_0 в случае $L_0 \in NR_1^0$, которая была ранее сформулирована в статье[1], но подробного доказательства именно этого случая не было приведено.

[4]Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Труды семинара имени И.Г.Петровского. М.: Изд-во Моск. ун-та. 1983. Вып. 9. С. 190–229.