Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Аппроксимация аналитических функций

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 – Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Замараевой Марии Алексеевны

Научный руководитель
Доцент, к.ф.-м.н. ____________________ Осипцев М.А.
подпись, дата

Зав. кафедрой
Д.ф.м.н, профессор ____________________ Прохоров Д.В.
подпись, дата

Саратов 2018

Введение. В последние годы резко возрос интерес к классическим методам рациональной аппроксимации аналитических функций и в первую очередь — к аппроксимациям Паде и их обобщениям. Это связано с тем, что такие аппроксимации нашли разнообразные применения в вычислительных задачах теоретической физики и механики.

Аппроксимация Паде — классический метод рациональной аппроксимации аналитических функций, названный по имени математика Анри Паде, родившемся в городе Абвиль, который находится в Пикардии, области на севере Франции. Метод заключается в представлении функции в виде отношения двух полиномов, коэффициенты которых определяются коэффициентами разложения функции в ряд Тейлора.

Основная идея метода аппроксимаций Паде, который, в частности, является весьма эффективным методом построения и вычисления значений степенных рядов, была открыта независимо по крайней мере дважды. Авторство Паде основывается на его диссертации, представленную в 1892 г. под названием "Sur la representation approchee d'une fonction par des fractions rationelles"в Сорбонне. Метод приближения функций, описанный в этой работе, позже получил название "аппроксимация Паде". В своей диссертации он изучил рациональные аппроксимации аналитических функций и расположил их в таблицу, уделив при этом особое внимание экспоненциальной функции. Он, по-видимому, не знал о более ранней работе Якоби (1846 г.), посвящённой упрощению метода рациональной аппроксимации Коши, где дано детерминантное представление решения этой задачи. Работе Паде предшествовала также работа Фробениуса (1881 г.), который вывел тождества между соседними рациональными функциями Якоби. Интересно отметить, что в 1740 г. Андерсон, вероятно случайно, натолкнулся на аппроксимации Паде логарифмической функции.

Основные задачи.Основными задачами данной работы являются: знакомство с понятием аппроксимации Паде, изучение методов и алгоритмов её нахождения, выявление предполагаемых ошибок, а также распознавание особенностей

Краткое содержание работы.Работа состоит из двух разделов, каждый из которых делится на подразделы.

Первый подраздел посвящен вводным понятиям аппроксимации. Изучение начинается с задания степенного ряда

$$f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i z_i,$$

представляющий функцию $f(z)$, где $c_i, i = 0, 1, 2 \ldots$, коэффициенты ряда. Разложение (**??**) является исходным пунктом анализа, использующего аппроксимацию Паде.

Введены определения самой аппроксимации, а также уравнений Паде.

Определение 1.1

Аппроксимация Паде - это рациональная функция вида

$$[L/M] = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_L z^L}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_M z^M},$$

разложение которой в ряд Тейлора (с центром в нуле) совпадает с разложением (**??**) до тех пор, пока это возможно.

$$\begin{pmatrix} c_{L-M+1} & c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & \cdots & c_L \\ c_{L-M+2} & c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & \cdots & c_{L+1} \\ c_{L-M+3} & c_{L-M+4} & c_{L-M+5} & \cdots & c_{L+2} \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ . & . & . & & . \\ c_L & c_{L+1} & c_{L+2} & \cdots & c_{L+M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_M \\ b_{M-1} \\ b_{M-2} \\ . \\ . \\ . \\ b_1 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} c_{L+1} \\ c_{L+2} \\ c_{L+3} \\ . \\ . \\ . \\ c_{L+M} \end{pmatrix}$$

Из данной системы и находим b_i. Коэффициенты числителя $a_1, a_2, \ldots, a_L$ находятся из (1.4) сравнением коэффициентов при $1, z, z^2, \ldots, z^L$:

$$\begin{aligned} a_0 &= c_0, \\ a_1 &= c_1 + b_1 c_0, \\ a_2 &= c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0, \\ &. \\ &. \\ &. \\ a_L &= c_L + \textstyle\sum_{i=1}^{min(L,M)} b_i c_{L-i}. \end{aligned}$$

Уравнения (**??**),(**??**) называются уравнениями Паде; в случае когда система (**??**) разрешима, они определяют коэффициенты числителя и знаменателя аппроксимации Паде $[L/M]$.

Коэффициенты этой функции в разложении Тейлора при $1, z, z^2, \ldots, z^{M+L}$ совпадают с коэффициентами ряда (**??**).

Далее приведен пример, где наглядно показана точность (в ∞ она составляет 8%), достигаемая аппроксимацией, которая использует всего три члена разложения.

Сформулированы следующие теоремы:

Теорема 1.1. Для многочленов, определенных равенствами (1.1.8)и (1.1.9), справедливо соотношение

$$Q^{[L/M]}(z)\sum_{i=0}^{\infty} c_i z^i - P^{[L/M](z)} = O(z^{L+M+1}).$$

Теорема 1.2. Если $Q^{[L/M]}(0) \neq 0$, то аппроксимация Паде $[L/M]$ определяется равенством

$$[L/M] = \frac{P^{[L/M]}(z)}{Q^{[L/M]}(z)},$$

где $P^{[L/M]}(z)$ и $Q^{[L/M]}(z)$ определен формулами (**??**),(**??**).

Аппроксимация экспоненциальной функции отдельно вынесена в следующий подраздел первого раздела. Этот пример наглядно показывает, как работают аппроксимации Паде в идеальной ситуации.

Вычисляя числитель и знаменатель, получаем, что

$$Q^{[L/M]}(z) = C(L/M)\sum_{j=1}^{M} \frac{(L+M-j)!}{(L+M)!}\frac{M!}{(M-j)!}\frac{(-z)^j}{j!} =$$

$$= C(L/M)_1F_1(-M, -L-M; -z).$$

$$P^{[L/M]}(z) = C(L/M)_1F_1(-L, -L-M; z),$$

и, таким образом, аппроксимация Паде $[L/M]$ функции e^z представима в виде

$$[L/M] = \frac{{}_1F_1(-L, -L-M; z)}{{}_1F_1(-L, -L-M; -z)}.$$

И завершается первый раздел подразделом "Определение Бейкера, С-таблица и блочная структура где вводится определение аппроксимации Паде по Бейкеру.

Определение 1.3. Если существуют многочлены $A^{[L/M]}(z), B^{[L/M]}(z)$ степени L и M соответственно такие, что

$$\frac{A^{[L/M]}(z)}{B^{[L/M]}(z)} = f(z) + O(z^{L+M+1})$$

и

$$B^{[L/M]}(0) = 1,$$

то мы по определению полагаем

$$[L/M] = \frac{A^{[L/M]}(z)}{B^{[L/M]}(z).}$$

Форма записи подчеркивает, что и числитель, и знаменатель зависят от каждого из чисел L и M. Замена (**??**) на соотношение

$$A^{[L/M]}(z) - f(z)B^{[L/M]}(z) = O(z^{L+M+1})$$

дает эквивалентный вариант определения при условии, что (**??**) сохраняется.

Второй раздел назван "Прямые приложения". В подразделе (2.1) происходит знакомство с гипергеометрическими функциями и методом нахождения знаменателей аппроксимаций Паде, основанным непосредственно на детерминантной формуле (1.1.8) для $Q^{[L/M](z)}$ при $L \geq M - 1$. И применяем его для класса функций вида

$$f(z) =_2 F_1(\alpha, 1, \gamma; z).$$

Как следствие получаются результаты для функций вида

$$f(z) =_1 F_1(1, \gamma; z).$$

и

$$f(z) =_2 F_0(\alpha, 1; z).$$

Определение 2.2.1.

Гипергеометрическая функция - это функция, определенная внутри круга $|z| < 1$ как сумма гипергеометрического ряда

$$F(a, b, c; z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \Big[\prod_{l=0}^{k-1} \frac{(a+l)(b+l)}{(1+l)(c+l)} \Big] z^k = 1 + \frac{ab}{c}\frac{z}{1!} + \frac{a(a+1)b(b+1)}{c(c+1)}\frac{z^2}{2!} + \dots,$$

а при $|z| > 1$ - как её аналитическое продолжение.

Часто применяют обозначение

$$(p)_n = \frac{\Gamma(p+n)}{\Gamma(p)},$$

где Γ - гамма-функция. Обозначение ${}_2F_1(a, b, c; z)$ указывает, что параметры a, b идут в числитель, а c в знаменатель.

В подразделе 1.2 мы показали, что прямым методом можно найти и знаменатель, и числитель аппроксимаций Паде экспоненциальной функции, но существование простой явной формулы для числителя характерно только для этого случая. Если знаменатель аппроксимаций Паде найден, то коэффициенты числителя находятся прямо из (1.1.9).

Производя различные операции с определителями, получаем вывод формулы для знаменателя аппроксимаций Паде.

$$\begin{gathered}
Q^{[L/M]}(z) = C(L/M) \cdot \Big\{ 1 + \frac{(-\alpha - L)(-M)}{1!(1 - \gamma - L - M)} z + \\
+ \frac{(-\alpha - L)(-\alpha - L + 1)(-M)(-M + 1)}{2!(1 - \gamma - L - M)(2 - \gamma - L - M)} z^2 + \dots \Big\} = \\
= C(L/M)_2F_1(-M, -\alpha - L, 1 - \gamma - L - M; z).
\end{gathered}$$

Аппроксимации Паде могут очень эффективно применяться для вычисления значений функций, особенно если имеется качественная информация о свойствах функции. С другой стороны, они позволяют получать важную информацию о характере и расположении особенностей функции непосредственно по коэффициентам степенного разложения.

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n (z - z_0)^{-n}$$

По характеру разложения (**??**) однозначно определяется тип особенности в точке $z = z_0$.

Если $b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$, то $z = z_0$ - регулярная точка и $f(z)$ аналитична при $|z| < R$.

Если $b_n = 0, \quad n = 2, 3, \dots$, и $b_i \neq 0$, то z_0 - простой полюс.

Если $b_n = 0, \quad n = m + 1, m + 2, \dots$, и $b_m \neq 0$, то z_0 - полюс порядка m; при $m > 1$ говорят, что $f(z)$ имеет кратный полюс.

Если для каждого m существует $n > m$, такое, что $b_n \neq 0$, то z_0 - существенная особенность $f(z)$.

Если z_0 не является существенной особенностью, то разложение (**??**) дает основания предполагать, что аппроксимации Паде могут приблизить функцию

$f(z)$. Существенная особенность, если расстояние до нее не слишком мало, приближается конечной суммой кратных полюсов.

Этот подраздел (2.2) основан на примерах функций, имеющих различные типы особенностей, а также рассмотрены функции, у которых существуют точки ветвления.

Последний подраздел посвящен численным методам нахождения аппроксимаций Паде. Так как вычислить вручную значения диагональных аппроксимаций Паде, соответствующих данному ряду, можно лишь производить для аппроксимаций самого малого порядка, то сразу возникает потребность в хорошем машинном алгоритме. И в этом подразделе обсуждаются известные алгоритмы и общие требования, которым должен удовлетворять "хороший метод".

Сначала рассматривается прямой метод вычисления аппроксимаций Паде. Прямые методы вычисления надежны и устойчивы, но могут оказаться не самыми эффективными. Их применение предпочтительнее в те случаях, когда существование и невырожденность аппроксимаций Паде не вызывают сомнений.

Далее приводится список метод, каждый из которых имеет свои достоинства и их характеристика:

1. Алгоритм Кронекера

2.Q.D.-алгоритм.

3. Алгоритм Бейкера.

4. Алгоритм Ватсона.

5 Метод ганкелевых и теплицевых матриц

Алгоритм Кронекера - относится к общей задаче рациональной интерполяции, основывается главным, алгоритм Кронекер образом на антидиагональном тождестве и позволяет восстанавливать антидиагональные последовательности таблицы Паде. Поэтому алгоритм корректно определен только в том случае, когда все элементы рассматриваемой антидиагональной последовательности существуют и невырождены. Однако в любом невырожденном случае алгоритм Кронекера может быть усовершенствован алгоритмом Евклида.

Q.D.-алгоритм дает представление последовательности аппроксимаций Паде в виде непрерывной дроби. Требуется, чтобы все элементы соответствующей дроби были конечны и отличны от нуля. Это как раз эквивалентно условию невырожденности подходящих дробей.

С помощью алгоритма Бейкера строится последовательность числителей и знаменателей аппроксимаций Паде, образующих в таблице Паде последовательности типа "лестниц".

Существенно, что этот алгоритм является быстрым методом вычисления последовательностей типа антидиагональных лестниц.

Алгоритм Ватсона. С его помощью строится последовательность числителей и знаменателей аппроксимаций Паде, образующих лестничные последовательности. Это быстрый метод вычисления последовательностей типа лестниц, параллельных главной диагонали.

Отметим, что в алгоритме Ватсона используются условия точности порядка аппроксимации.

Методы, основанные на структуре ганкелевых и теплицевых матрицне используют перестановок, вычисления проводятся по итерационной схеме, основанной на принципе вложения.

Детали, касающиеся надежных вычислений диагональных последовательностей таблицы Паде вида $[L+j/j]$, можно найти в работах [Brezinski, 1976] [Bultheel,1979,1980 a]. В работе [Luke,1980] можно найти замечание о проблеме точности вычислений при малых $|z|$. В работе [Pindor, 1979 a] имеются некоторые интересные гипотезы по проблеме вычисления значений аппроксимаций Паде.

Заключение. В первом разделе выпускной квалификационной работы были изучены:

— определение аппроксимации Паде

— вывод формул для вычисления числителя и знаменателя аппроксимации Паде

— аппроксимация Паде экспоненциальной функции

Во втором разделе получены формулы для вычисления знаменателя Паде, применяемых для класса гипергеометрических функций, а также изучены численные методы вычисления аппроксимаций Паде.