Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Интерполяционные процессы типа Ньютона

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 – Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Кузьмичевой Елены Алексеевны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.. ____________________ М. А. Осипцев
подпись, дата

Зав. кафедрой
д.ф.м.н, профессор ____________________ Д.В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2018

Введение. В вычислительной математике важную роль играет интерполяция функций, то есть построение по заданной функции другой (как правило, более простой) функции, значения которой совпадают со значениями заданной функции на некотором наборе точек. Причем интерполяция имеет как практическое, так и теоретическое значение. На практике часто возникает задача о восстановлении непрерывной функции по ее табличным значениям, например полученным в ходе некоторого эксперимента. Для вычисления многих функций оказывается эффективно приблизить их полиномами или дробно-рациональными функциями. Теория интерполирования используется при построении и исследовании квадратурных формул для численного интегрирования, для получения методов решения дифференциальных и интегральных уравнений.

Теория интерполяции функций является одной из современных математических теорий, имеющих важные приложения в различных отраслях теоретическом и прикладной математики. С начала двадцатого века центр тяжести проблем и методов этой теории перешел в область теории аналитических функций.

Ряд важных задач теории интерполяции впервые разрешен нашими соотечественниками С. Н. Бернштейном, М. В. Келдышем, А. О. Гельфондом, В. Л. Гончаровым и их учениками. в этом деле особенно велики заслуги А. О. Гельфонда, решившего ряд важных проблем этой теории.

Впервые в работах А. О. Гельфонда показано, что методы теории интерполяции функций могут успешно применяться в разрешении некоторых весьма актуальных задач современной теории интерполяции функций. К числу таких задач относится, например, проблемы полноты систем аналитических функций, проблемы единственности функций, задачи теории моментов и др.

В 1945-1948 годах семинар по теории функций комплексного переменного в Московском государственном университете имени М, В. Ломоносова, работающий под руководством М. В. Келдыша, А. О. Гельфонда, А. И, Маркушевича, сосредоточил свое внимание на задачах теории интерполяции функций комплексного переменного. В дальнейшем его участники стали крупными учеными в области теории функций комплексного переменного. На этом семинаре было выполнено значительное число важных работ. В частности, М. В. Келдыш и И. И.Ибрагимов в совместной работе "Об интерполяции целых функций "[?] установили общий критерии сходимости интерполяционного процесса типа Ньютона во всем классе целых функций. А. О. Гельфонд и И. И. Ибрагимов в совместной работе [?] разрешили так называемую проблему о двух точках. По теории интерполяции функций на русском языке имеются ценные книги: А. О. Гельфонда "Исчисление конечных разностей"[?], В. Л.Гончарова [?], В. И. Смирнова, Н. А. Лебедева [?], Уолша [?] и др. Наиболее полным источником современных исследований по теории интерполяции функций комплексного переменного является монография А. О. Гельфонда.

Основные задачи. Основными задачами данной работы являются: изучение интерполяционных последовательностей и рядов, в частности, сходимость ряда Дирихле и ряда Ньютона. Работа состоит из трех разделов.

Основные методы исследования:

- методы исследования функций комплексного переменного,

-ряды экспонент,

-свойства аналитических функций и интерполяционных последовательностей аналитических функций.

Основное содержание работы. Первый раздел посвящен исследованию интерполяционных многочленов Ньютона и Лагранжа,основных проблем интерполяционных последовательностей и рядов интерполяции в комплексной плоскости. Изучены условия существования интерполяционных многочленов по заданным значениям самой функции и по заданным значениям ее производных некоторого порядка, были определены два метода определения коэффициентов в формальном разложении интерполяционного ряда Ньютона.

Во втором разделе рассматривается ряд Дирихле, а так же его абсциссы простой, абсолютной и равномерной сходимости. ряд Дирихле

Под рядом Дирихле понимается ряд вида:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z},$$

где λ_n - возрастающая последовательность положительных чисел, коэффициенты a_n суть заданные, вообще говоря, комплексные числа.

Доказаны следующие теоремы:

Лемма 2.1.

Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *сходится в точке* z_0*. Тогда он сходится (вообще говоря, не абсолютно) в полуплоскости* $Re\ z > Re\ z_0$ *в каждом секторе*

$$|arg(z - z_o)| <= \Theta < \pi/2$$

он сходится равномерно.

Определение.

Полуплоскость $\mathrm{Re}\ z > c$ называется полуплоскостью сходимости, прямая $\mathrm{Re}\ z = c$ - прямой сходимости, а величина c - абсциссой сходимости ряда Дирихле.

Теорема 2.1.

Пусть

$$\alpha = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|S_n|}{\lambda_n}, \quad \beta = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln|r_n|}{\lambda_n}.$$

Тогда $c = \alpha$*, если ряд* $\sum\limits^{\infty} a_n$ *расходится, и* $c = \beta$ *в противном случае.*

В последнем, третьем разделе изучается область сходимости ряда Ньютона, формула для абсциссы сходимости и абсциссы абсолютной сходимости ряда Ньютона, а так же взаимосвязь рядов Дирихле и Ньютона.

Ряд Ньютона имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z - z_1)(z - z_2)...(z - z_n),$$

с узлами интерполяции $z_1, z_2, ..., z_n, ...$, которые могут быть любыми комплексными или вещественными числами.

Рассматривалась область сходимости ряда Ньютона и было показано, что областью сходимости ряда Ньютона может быть произвольная односвязная область с аналитической границей.

Так же были сформулированы и доказаны следующие теоремы:

Теорема 3.1.

Пусть ряд Ньютона Ньютона сходится в точке z_0*, не совпадающей с узлами интерполяции* ($z_0 \neq z_k, k = 1, 2, ...$)*, и последовательность узлов* z_k *имеет только одну предельную точку* $\lim_{n\to\infty} z_n = z'$*. Тогда справедливы утверждения:*

1) Если z'– конечное число, то ряд Ньютона сходится равномерно в круге

$$|z - z'| \le r < |z_0 - z'|$$

с центром в точке z' и радиусом $r < |z_0 - z'|$.

2)Если последовательность z_n имеет только одну предельную точку в бесконечности, т. е. $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, и ряд $\sum \frac{1}{|z_n|}$ сходится, то ряд Ньютона сходится равномерно в каждом конечном круге $|z| \le R$.

3) Если последовательность z_n имеет только одну предельную точку в бесконечности, т. е. $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, и ряд $\sum \frac{1}{|z_n|}$ расходится, то ряд Ньютона сходится равномерно в каждой конечной части области D, определяемой условиями:

$$|\arg(z - z_0) - \arg z_k| \le \varphi < \frac{\pi}{2}; \qquad Re\ (z - z_0) > 0.$$

В случае, когда последовательность узлов $x_n \quad (x_n \ge 0)$ ряда Ньютона имеет единственную точку в бесконечности, то существует такое конечное или бесконечное число σ_c, что при $\mathrm{Re}\, z > \sigma_c$ ряд Ньютона сходится, а при он расходится $\mathrm{Re}\, z < \sigma_c$. Число σ_c называется абсциссой сходимости ряда Ньютона Ньютона с узлами интерполяции $x_n \ge 0 \ \ (n = 1, 2, ...)$.

Теорема 3.2

Если ряда Ньютона с вещественными и положительными узлами $x_n \ \ (n = 1, 2, ...)$ в $\lim_{n\to\infty}$ имеет конечную абсциссу сходимости σ_c, то он равномерно сходится в области $\overline{D}(\varepsilon, R)$, определяемой неравенствами:

$$Re\, z > \sigma_c + \varepsilon, \quad |z - \sigma_c| \le R,$$

при любом сколько угодно малом и сколь угодно большом $R > 0$, и его сумма является регулярной функцией комплексного переменного z в любой конечной части полуплоскости $Rez > \sigma_c$.

Вообще говоря, из сходимости ряда Ньютона в какой-нибудь области D не следует его абсолютная сходимость в той же области D.

Теорема 3.3

Пусть ряд Ньютона абсолютно сходится в точке z_0, не совпадающей с узлами интерполяции $(z_0 \ne z_k, k = 1, 2, ...)$, и последовательность узлов z_n имеет только одну предельную точку: $\lim_{n\to\infty} z_n = z'$. Тогда справедливы утверждения:

1) Если z'– конечное число, то ряд (**??**) сходится равномерно и абсолютно в круге:

$$|z - z'| < |z_0 - z'|.$$

2)Если $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$ и ряд $\sum \frac{1}{|z_n|}$ сходится, то ряд (**??**) сходится равномерно и абсолютно в каждой конечной области плоскости z.

3) Если последовательность z_n имеет только одну предельную точку в бесконечности, т. е. $\lim_{n\to\infty} z_n = \infty$, и ряд $\sum \frac{1}{|z_n|}$ расходится, то ряд Ньютона сходится равномерно и абсолютно в каждой области $\overline{\mathrm{D}}$ определяемой условиями (**??**)

Теорема 3.4.

Разность между абсциссой сходимости и абсциссой абсолютной сходимости $\sigma_a - \sigma_c$ *ряда Ньютона* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$ *с вещественными положительными узлами* $x_n(n = 1, 2, ...)$, *где* $\lim x_n =$ *и* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$, *не превышает числа* $\sigma \geq 0$, *определяемого формулой:*

$$\sigma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln x_n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k}}$$

Теорема 3.5.

Ряд Ньютона $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(z-z_1)(z-z_2)...(z-z_n)$ *и ряд Дирихле* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ *в предположении, что*

$$b_n = (-1)^n a_n x_1 x_2 \cdot ... \cdot x_n \quad (x_k > 0,\ k = 1, 2, ...),$$

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

и $s_n = \sum\limits_{n=1}^{n} \frac{1}{x_n} \to \infty$ *при* $n \to \infty$, *имеют одни и те же абсциссы сходимости и абсциссы абсолютной сходимости.*

Заключение. В первом разделе выпускной квалификационной работы были изучены:

-условия существования интерполяционных многочленов по заданным значениям самой функции и по заданным значениям ее производных некоторого порядка, основные проблемы интерполяции, заключающиеся в изучении сходимости интерполяционных последовательностей к функции.

- методы определения коэффициентов интерполяционных полиномов, также были подробно рассмотрены интерполяционные формулы Лагранжа и Ньютона.

Во втором разделе получены формулы для абсциссы сходимости ряда Дирихле, а так же область сходимости этого ряда.

Третий раздел был посвящен исследованию рядов Ньютона, в частности, была доказана теорема, в которой показано, что ряд Ньютона и ряд Дирихле имеют одни и те же абсциссы сходимости и абсциссы абсолютной сходимости.