Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Граничное поведение конформных отображений

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления ***02.03.01 – Математика и компьютерные науки***

механико-математического факультета

Наумова Владислава Владимировича

Научный руководитель
Зав. кафедрой, д.ф.-м.н, профессор ________________________ Д. В. Прохоров
подпись, дата

Зав. кафедрой
Д.ф.-м.н, профессор ________________________ Д. В. Прохоров
подпись, дата

Саратов 2018

Ведение. Вопрос граничного поведения конформных отображений является одним из важных, обширных и в тоже время сложных в комплексном анализе. Его изучали и изучают многие известные ученые такие как Г. М. Голузин, А. И. Маркушевич, И. И. Привалов, К.Каратеодори и многие другие.

В работе приведены две точки зрения рассмотрения вопроса соответствия границ при конформном отображении: с точки зрения простых концов (введено К. Каратеодори) и с точки зрения достижимых граничных точек.

Цель работы. Целью работы является: изложение известных результатов граничного поведения, определение и описание граничных свойств областей Джона, приведение оценок граничных значений отображений круга на область Джона, а также проведение исследования, описывающего конформное отображение на область, которая не является областью Джона.

Объем и структура работы. Бакалаврская работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Первая глава — вводные сведения, вторая глава называется соответствие границ при конформном отображении. Вторая глава состоит из трех разделов: достижимые граничные точки, простые концы, частные типы областей. Третья глава — области Джона и четвертая глава называется научно-практическое исследование.

Краткое содержание работы. Глава 1. В первой главе работы вводятся ряд общеизвестных понятий и свойств теории функций комплексного переменного, которые используются в работе для дальнейшего изучения граничного поведения конформных отображений. Например, понятия связности множеств, кривой Жордана, области, континуума, односвязности области, сходимости последовательности функций. Приведен ряд важных теорем.

Теорема 1 (Достаточное условие связности). *Всякое множество E, любые две точки z', z'' которого можно соединить непрерывной кривой L, целиком лежащей в E, является областью.*

Теорема 2 (Признак связности для ограниченного замкнутого множества). *Ограниченное замкнутое множество F является связным, если*

$$\forall z_0, z' \in F \; \forall \varepsilon > 0 \; \exists z_0, z_1, \dots z_n = z' : \; |z_k - z_{k-1}| < \varepsilon, \; \forall k = \overline{1, n}$$

Теорема 3 (О свойстве области). *Любые две точки произвольной области можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в этой области.*

Теорема 4 (О границе открытого множества). *Граница любого открытого множества — замкнутое множество.*

Глава 2. В этой главе непосредственно рассматриваются известные факты граничного поведения конформных отображений. Вводятся понятия достижимых граничных точек и простого конца. Доказываются утверждения о соответствии достижимой точки области точке на окружности при отображении области на круг, свойствах простого конца, о взаимно однозначном соответствии простого конца области и точками окружности, а также о связи простого конца и достижимой граничной точки. Так приведены и доказаны некоторые свойства частных типов областей.

Теорема 5. *При однолистном отображении области B плоскости z на единичный круг $|\xi| < 1$ каждой достижимой граничной точке z_1 области B можно поставить в соответствие точку ξ_1 на $|\xi| = 1$ определенную следующим образом: если $z \to z_1$ по любой кривой l_1, определяющей z_1, то $\xi = f(z) \to \xi_1$ причем двум различным достижимым граничным точкам области B соответствуют две различные точки на единичной окружности. Множество точек F единичной окружности соответствует всем различным достижимым граничным точкам области B всюду плотно на единичной окружности.*

Теорема 6 (Свойства простого конца)**.** *Простой конец обладает следующими свойствами:*

1. *Простой конец не зависит от последовательности разрезов его определяющих.*

2. *Простой конец области B соответствующий точке ξ_0 на единичной окружности является геометрическим местом всех предельных точек последовательностей точке области B, соответствующих всевозможным последовательностям точек круга $|\xi| < 1$, сходящимся к точке ξ_0.*

Теорема 7. *При однолистном конформном отображении области B на единичный круг между точками единичной окружности и простыми концами B существует взаимно однозначное соответствие.*

Теорема 8. *Пусть E — множество точек границы области B, определяемое разрезами C_n. Множество E является простым концом области B тогда и только тогда, когда E содержит не более одной граничной достижимой точки области B.*

Теорема 9. *При однолистном конформном отображении области B, ограниченной замкнутой жордановой кривой, на единичный круг $|\xi| < 1$ отображение замкнутой области $\bar{B}$ на замкнутый круг $|\xi| \leqslant 1$ будет взаимно однозначным и непрерывным.*

Теорема 10. *Пусть односвязная область B имеет на своей границе аналитическую дугу Жордана γ, ни одна внутренняя точка которой не является предельной для граничных точек, не принадлежащих γ, тогда $f(z)$ является регулярной во внутренних точках дуги γ и в них $f'(z) \neq 0$, то есть имеет место конформность.*

Теорема 11. *Пусть все граничные точки ограниченной односвязной области B являются достижимыми, тогда ее можно единственным образом однолистно отобразить на круг $|\xi| < 1$ так, что три заданные точки z_1, z_2, z_3 границы C области B, расположенные в порядке положительного обхода, переходят в три заданные точки ξ_1, ξ_2, ξ_3 на окружности $|\xi| = 1$, также расположенные в порядке положительного обхода (См. Рисисунок 1).*

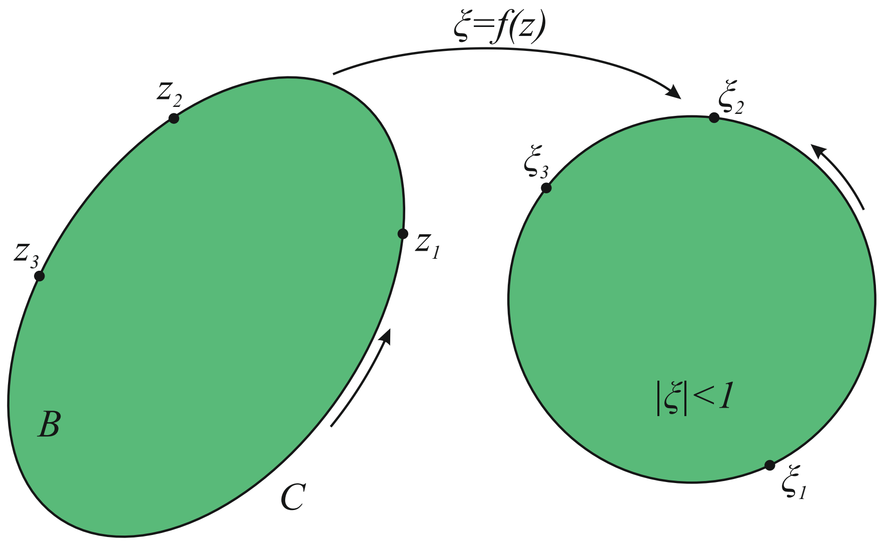

Рисунок 1 — Стрелками показаны направления обхода

Глава 3. В третьей главе рассматривается один из частных типов областей: области Джона. Вводится понятие области Джона, дается ее аналитическая характеристика изучаются и доказываются ее свойства, граничные свойства. Приводятся оценки граничных значений отображений области Джона на круг.

Пусть $M_1, M_2, \ldots$ — подходящие положительные постоянные.

Предложение 1. *Пусть G - область Джона. Если C — поперечное сечение G, тогда для одной из компонент H области $G \setminus C$ имеет место неравенство*

$$diam H \leqslant M_2 diam C. \tag{1}$$

Теорема 12. *Пусть f конформно отображает $\mathbb{D}$ на G так, что*

$$d_f(0) \geqslant c\ diam G. \tag{2}$$

Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) G *— область Джона;*

(2) $diam f(B(z)) \leqslant M_3 d_f(z)$ *где* $z \in \mathbb{D}$;

(3) существует α, $0 < \alpha < 1$ *такое, что*

$$|f'(\zeta)| \leqslant M_4 |f'(z)| \left(\frac{1-|\zeta|}{1-|z|}\right)^{\alpha-1} \text{ где } \zeta \in \mathbb{D} \cap B(z), \text{ где } z \in \mathbb{D};$$

(4) существует $\beta > 0$ *такое, что для всех дуг* $A \subset I \subset \mathbb{T}$,

$$\Lambda(A) \leqslant \beta \Lambda(I) \Rightarrow diam f(a) \leqslant \frac{1}{2} diam f(I).$$

Замечание. Функция f непрерывна в $\bar{\mathbb{D}}$ по теореме 2.1. [?] Константы M_3, M_4, α, β зависят только друг от друга, от M_1 и от c; мы будем использовать предположение (1.5) только при доказательстве *(1)* $\Rightarrow$ *(2)*. Можно заменить *(4)* на *(4')*.

(4') $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0:$

$$\Lambda(A) \leqslant \beta \Lambda(I) \Rightarrow diam f(A) \leqslant \varepsilon\ diam f(I)$$

для всех дуг $A \subset I \subset \mathbb{T}$.

Следствие 1. *Пусть f конформно отображает $\mathbb{D}$ на область Джона. Если* $z \in D$, *то*

$$|f(\zeta_1) - f(\zeta_2)| \leqslant M_8 d_f(z) \left(\frac{|\zeta_1 - \zeta_2|}{1-|z|}\right)^{\alpha}, \text{ где } \zeta_1, \zeta_2 \in B(z). \tag{3}$$

Теорема 13. *Если*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{4}$$

конформно отображает $\mathbb{D}$ на область Джона, то

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{1+\delta} |a_n|^2 < \infty \quad \text{для некоторых } \delta > 0 \tag{5}$$

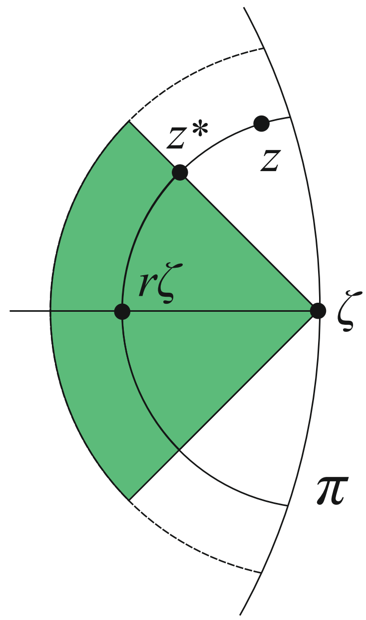

Рисунок 2 — Угол Штольца Δ_n — закрашенная часть

Теорема 14. *Пусть f конформно отображает $\mathbb{D}$ на область Джона G и $\zeta \in \mathbb{T}$. Тогда выполняются следующие условия:*

1) Если $f'(\zeta) \neq \infty$, тогда

$$\frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \to f'(\zeta) \text{ при } z \to \zeta, \quad z \in \bar{\mathbb{D}}. \tag{6}$$

2) Если f изогональна в ζ, то существует γ такая, что

$$\arg \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta} \to \gamma \quad \text{при } z \to \zeta, \quad z \in \bar{\mathbb{D}} \tag{7}$$

*и ∂G имеет касательную к $f(\zeta)$ [**?**] (См. Рисунок 2.)*

Глава 4. В четвертой главе проводится небольшое научно-практическое исследование. Нужно отобразить отрезок действительной оси на верхнюю комплексную полуплоскость с разрезом, исходящим из нулевой точки по дуге окружности с помощью формулы Кристофеля-Шварца и отследить поведение и динамику построения точек равномерного разбиения отрезка.

$$\frac{1}{f(w,t)} = \int\limits_0^{\frac{1}{w}} \frac{(1-\gamma w)dw}{(1-\alpha w)^2(1-\beta w)} = \frac{\beta-\gamma}{(\alpha-\beta)^2} \log\frac{w-\alpha}{w-\beta} + \frac{\alpha-\gamma}{\alpha-\beta}\frac{1}{w-\alpha}$$

где $\gamma = 2\alpha + \beta$, $\beta = \alpha + 2\sqrt{-\alpha\pi}$, $\alpha(3\alpha + 4\sqrt{-\alpha\pi}) = -6t$ и t — параметр.

Для решения этой задачи использовался пакет Wolfram Mathematica 11.

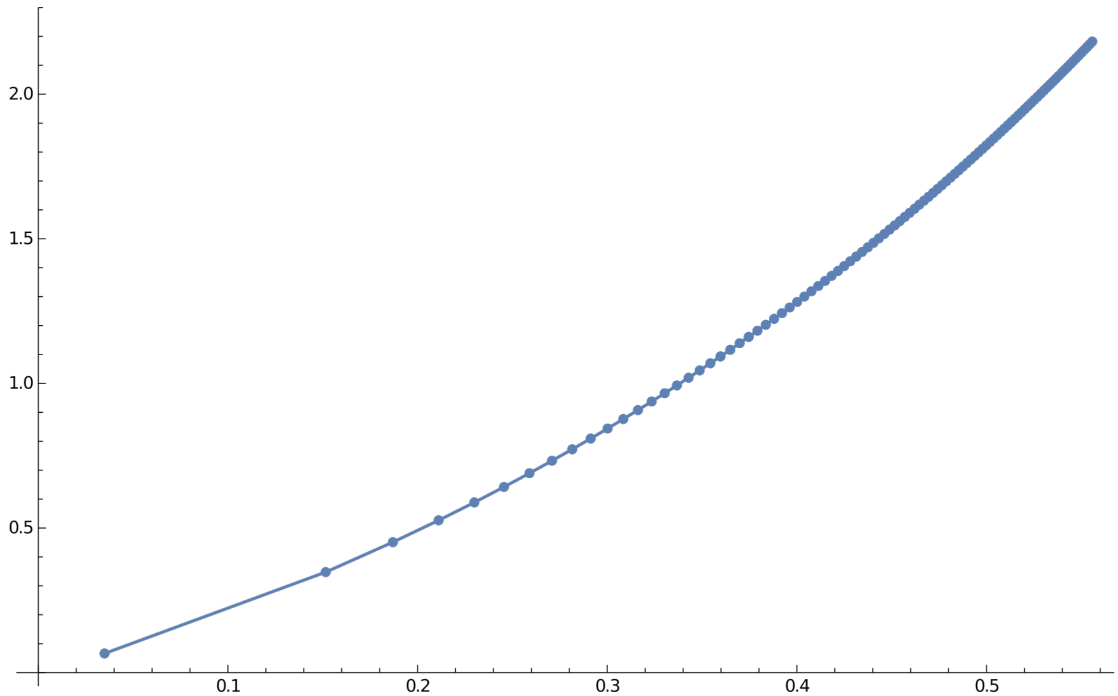

Рисунок 3 — Точки разреза по дуге окружности

На графике (См. Рисунок 3) мы наблюдаем, что точки равномерного разбиения отрезка в одной плоскости при отображении с помощью формулы Кристофеля-Шварца переходят в точки разреза вдоль дуги окружности, причем чем дальше мы отдаляемся от нулевой точки, тем больше сгущаются точки разреза. Чем ближе мы приближаемся к нулевой точке, тем большее разрежение получаем между точками. Следовательно, точки равномерного разбиения при отображении одной плоскости становятся кратными точками другой плоскости и находятся на разных берегах разреза, идущего вдоль дуги окружности.

Заключение. Целью работы являлось: изложение известных результатов граничного поведения, определение и описание граничных свойств областей Джона, приведение оценок граничных значений отображений круга на область Джона, а также проведение исследования, описывающего конформное отображение на область, которая не является областью Джона. В каждом случае все свойства и оценки приведены и доказаны.