Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра математического анализа

Критерии существования обобщенных в смысле С.Л. Соболева производных в L_p

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки

механико-математического факультета

Тараканова Ильяса Юсефовича

Научный руководитель

Доцент, д.ф.-м.н, доцент ____________________ Л. В. Сахно

подпись, дата

Заф.кафедрой

Д.ф.-м.н, профессор ____________________ Д. В. Прохоров

подпись, дата

Саратов 2018

Введение. Из элементарного курса анализа известны следующие основные равенства, дающие связи между операциями дифференцирования и интегрирования: если f - непрерывная функция, F - функция, имеющая непрерывную производную, то

$$\frac{d}{dx}\int\limits_a^x f(t)dt = f(x), \tag{1}$$

$$\int\limits_a^b F^{'}(t)dt = F(b) - F(a). \tag{2}$$

Далее возникает вопрос: верно ли равенство (1) для функций, суммируемых в смысле Лебега? Каков класс функций (возможно, более широкий), для которого выполняется равенство (2)?

Первый вопрос решается положительно. Равенство (1) справедливо для любой суммируемой на отрезке функции. что касается второго вопроса, то абсолютно непрерывные функции, и только они, восстанавливаются с точностью до постоянного слагаемого по своей производной с помощью операции интегрирования.

В связи с этим естественно был поставлен вопрос о характеристическом признаке функции, являющейся непредельным интегралом функции, входящей в L_p при $p > 1$. Ответом служит теорема Ф. Рисса[1], которой посвящен первый раздел работы. Условие теоремы Рисса можно считать естественным для функций из пространства L_∞. Следует также обратить внимание на критерий Харди-Литтлвуда[2], выраженный в терминах модулей непрерывности в L_p.

Обобщение критерия Ф. Рисса на производные любого порядка получено А.П. Терехиным[3].

L_q - характеристика анизотропных Соболевских классов W_p^l, полученная Л.В. Сахно[4], является одновременным развитием Критерия Ф. Рисса ($q = \infty$) и критерий Харди-Литтлвуда ($1 < p = q < \infty$) на случай $1 < p \leq q \leq \infty$ в многомерный случай. Для $n = 1$ этот результат при $q = \infty$ есть не что иное, как критерий Ф.Рисса, а при $p = q$ - критерий Харди-Литтлвуда.

Второй раздел работы посвящен обобщению теоремы Рисса. Сначала вводится понятие обобщенных в смысле С.Л. Соболева производных. Для характеристики пространства W_p^l будут применятся q-интегральные p-модули, или коротко (p, q)-модули. Из оценок (p, q)-модулей L_p-нормами заданного набора производных явствует определенная малость (p, q)-модулей функций W_p^l. В случае $(p > 1)$ эта малость достаточна для существования производных $D_i^{li} \in L_p(l = (l_1, ..., l_n))$, $i = 1, ..., n$, тогда при $p = 1$ она гарантирует лишь существования производных $D_i^{li-1} f$, $i = 1, ..., n$ имеющих суммируемые классические вариации по прямым $y^{(i)} = x^{(i)}(x^{(i)} = (x_1, ..., x_{i-1}, x_{i+1}, ..., x_n))$ соответственно. Указанные производные названы слабыми производными. Они есть ни что иное, как обобщенные производные в смысле Л.Шварца. Это обстоятельство вызвало необходимость дать в терминах (p, q)-модулей характеристику таких пространств. Эту характеристику можно считать развитием теоремы Харди-Литтлвуда, утверждающей равносильность требования ограниченности вариации функции одной переменной выполнению условия Липшица в L. При $n = 1$, $p = q = 1$, $l = 1$, проводимый результат ялвяется этой теоремой Харди-Литтвулда.

Теорема раздела 2.7 является теоремами вложения, так как они являются утверждениями об эквивалентности полу норм. Аппаратом исследования являлись интегральные представления функций через заданный набор производных(Бесов[6]). При получении оценок использовались интегральные неравенства Гельдера, Минковского, Юнга

Содержание работы. В 1 разделе работы описываются основные понятия необходимые, для дальнейшего доказательства теоремы Рисса.

Первым таким понятием будет пространство L_p

Измеримая функция $f(x)$ называется суммируемой с p-й степенью, где $p \geq 1$, если

$$\int_a^b f(x)dx \tag{3}$$

Множество всех таких функций принято обозначить через L_p. Очевидно что $L_1 = L$.

Теорема 1. Функция $f(x)$, суммируемая со степенью $p > 1$, суммируема, то есть $L_p \subset L$.

Действительно, если положить $E = [a, b]$, $A = E(f < 1)$, $B = E - A$, то суммируемость функции $f(x)$ на множестве A очевидна, а ее суммируемость на множестве B вытекает из того, что на этом множестве $|f(x)| \leq |f(x)|^p$.

Теорема 2. Если $f(x) \in L_p$, а $g(x) \in L_q$, где p и q взаимно сопряжены, то произведение $f(x)g(x)$ суммируемо и справедливо неравенство

$$|\int\limits_a^b f(x)g(x)dx| \leq \sqrt[p]{\int\limits_a^b |f(x)|^p dx} \sqrt[p]{\int\limits_a^b |g(x)|^q dx} \qquad (4)$$

Теорема 3. Если $f(x) \in L_p$ и $g(x) \in L_p (p \geq 1)$, то

$$\sqrt[p]{\int\limits_a^b |f(x) + g(x)|^p dx} \leq \sqrt[p]{\int\limits_a^b |f(x)|^p dx} + \sqrt[q]{\int\limits_a^b |g(x)|^q dx} \qquad (5)$$

Второе рассматриваемое в работе понятие - абсолютно непрерывные функции, и теорема о абсолютной непрерывности функции.

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана конечная функция $f(x)$. Если всякому $\epsilon > 0$ отвечает такое $\delta > 0$, что для любой конечной системы взаимно не пересекающихся интервалов $(a_1, b_1), ..., (a_n, b_n)$, для которой

$$\sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k) < \delta \qquad (6)$$

оказывается

$$|\sum_{k=1}^{n} (f(b_k) - f(a_k))| < \epsilon, \qquad (7)$$

то говорят, что функция $f(x)$ абсолютно непрерывна.

Теорема 4.

Абсолютно непрерывная функция является неопределенным интегралом своей производной.

И наконец, ввиду полученных знаний, становится возможным сформулировать и доказать **теорему Рисса**.

Для того, чтобы функция $F(x)$ $(a \leq x \leq b)$ представлялась в форме

$$F(x) = C + \int\limits_{a}^{x} f(t)dt, \tag{8}$$

где $f(t) \in L - p(p > 1)$, необходимо и достаточно, чтобы при всяком разложении $[a, b]$ на части точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$ было

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{|F(x_{k+1}) - F(x_k)|^p}{(x_{k+1} - x_k)^{p-1}} \leq K, \tag{9}$$

где K не зависит от способа разложения $[a, b]$.

Во 2 разделе рассматривается обобщенная теорема Рисса. Для этого также необходимо, ввести разные понятия и теоремы.

Итак, вначале, разберем понятие **обобщенной производной**.

Определение 1. Пусть $f \in L^{loc}$, $x \in L^{loc}$. Если для любой бесконечно дифференцируемой финитной функции $\phi(\phi \in C_0^\infty)$ выполняется равенство

$$\int\limits_{R^n} \chi(x)\phi(x)dx = (-1)^n \int\limits_{R} f(x)\frac{\partial^r \phi(x)}{\partial x_i^r}dx, \tag{10}$$

где $r \in N$, то χ называется обобщенной производной функции f порядка r по i-ой переменной и обозначается

$$D_i^r = \tfrac{\partial^r f}{\partial x_i^r}.$$

Приведем лемму, которой в дальнейшем воспользуемся.

Лемма 1.1. Пусть $f \in L_p^{loc}$, $f_k \in L_p^{loc}$, $D_i^r f_k \in L_q^{loc}$, $k = 1, 2, ...$, где $1 \leq p \leq \infty$, $1 \leq q \leq \infty$. Если $f_k \to f$ в смысле L_p^{loc} и $(D_i^r f_k - D_i^r f_m) \to 0$ $(k, m \to \infty)$ в смысле L_q^{loc}, то функция f имеет обобщенную производную $D_i^r f \in L_q^{loc}$ и $D_i^r f_k \to D_i^r f$ $k \to \infty$ в смысле L_q^{loc}.

Определение 2. Если у функции f, определенной на R^n, существует обобщенная производная $D_i^{r-1} f$, которую можно исправить на множестве меры 0 так, чтобы вариация $V_i(D_i^{r-1}f, x^{(i)})$ стала суммируемой, то говорим, что у функции f существует r-ая слабая производная по i-му аргументу.

Введем понятие **интегральных представлений функции**.

Пусть $l = (l_1, ..., l_n)$ - вектор с натуральными координатами, $\lambda = 1 : l$, функция $f \in L^{loc}$ и имеет обобщенные производные $D_i^{l_i} f$, $i = 1, ..., n$. Тогда почти всюду

$$f(x) = S^{-|\lambda|} \int\limits_{R^n} f(x+y)\Omega(y : S^{\lambda})dy + \sum_{i=1}^{n} \int\limits_{0}^{S} \upsilon^{-|\lambda|} d\upsilon \int\limits_{R^n} D_i^{l_i} f(x+y) Z_i(y : \upsilon^{\lambda})dy,$$

где функция Ω и Z_i, $i = 1, ..., n$, бесконечно дифференцируемы и финитны, и их носители таковы, что носитель интегрального представления содержится в прямоугольнике $(0, S^{\frac{1}{l}}) = \prod_{i=1}^{n}(0, S^{\frac{1}{l_i}})$.

Введем понятие **многомерных** (p, q) **- модулей и интегральных модулей непрерывности**.

Определение 3. Пусть функция f определена на R^n, $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $l = (l_1, ..., l_n)$ - вектор с натуральными координатами $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ - вектор с целочисленными координатами, $r \in N$, $i = 1, ..., n$, $h > 0$.

Отметим **два свойства** (p, q) **- модулей**.

Лемма 3.1. Справедливо равенство

$$\mu_{p,q}^{re_i}(h; f) = ||\triangle_i^r(h)f||_{L_p}.$$

Итак, модули непрерывности в L_p включаются в класс (p, q) - модулей.

Лемма 3.2. Справедливо неравенство

$$||\triangle_i^r(h)f||_{L_q} \leq \mu_{p,q}^{re_i}(h; f).$$

Оценка модуля непрерывности в L_p (p, q)- модулей без особого труда устанавливается в следующей теореме.

Теорема 3.1. Справедливо неравенство

$$||\triangle_i^r(h)f||_{L_p} \leq h^{l_i \partial e} \mu_{p,q}^{re_i}(h; l; f),$$

где $\partial e = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})|1 : l|$.

Оценка (p, q)-модулей и L_p-норм производной.

Для оценки (p, q) - модулей L_p - нормами производных воспользуемся интегральным представлением функции через ее производные.

Лемма 4.1. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\partial e = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})|1 : l| < 1$. Тогда при $1 \leq j \leq n$

$$\mu_{p,q}^{re_i}(h; l; f) \leq h^{l_j(1-\partial e)} C[||D_j^{l_j} f||_{L_p} + \sum_{i=1}^{n} ||\triangle_j^{l_j}(h) D_j^{l_j} f||_{L_p}]$$

причем C не зависит от f и h.

Теорема 4.1. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\partial e = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})|1 : l| < 1$. Тогда для $j = 1, ..., n$, $0 < h_0 \leq +\infty$

$$\sup_{0<\delta<h_0} \omega_{p,q}^{l_j e_j}(\delta; l; f) \delta^{-l_j(1-\partial e)} \leq C \sum_{i=1}^{n} ||D_i^{l_i} f||_{L_p},$$

причем C не зависит от f.

Теорема 4.2. Справедливо неравенство

$$||D_i^{l_i} f||_{L_p} \leq \sup_{0<\delta<h_0} \omega_{p,q}^{l_j e_j}(\delta; l; f) \delta^{-r+l,\partial e)},$$

если производная $D_i^r f$ существует.

Доказательство.

Оценка (p, q)-модулей слабо дифференцируемых функций.

Для оценки (p, q) - модулей слабо дифференцируемых функций воспользуемся интегральным представлением.

Лемма 5.1. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\partial e = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})|1 : l| < 1$. Тогда при $1 \leq j \leq n$

$$\mu_{l,q}^{l_j e_j}(h; l; f) \leq h^{l_j(1-\partial e)} C \sum_{i=1}^{n} \int_{R^{(i)}} V_i(D_i^{l_i - 1} f; x^{(i)}) dx^{(i)},$$

причем C не зависит от h и f.

Теорема 5.1. Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\partial e = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})|1 : l| < 1$. Тогда при $1 \leq j \leq n$

$$\sup_{0<\delta<h_0} \omega_{1,q}^{l_j e_j}(\delta; l; f) \delta^{-l_j(1-\partial e)} \leq C \sum_{i=1}^{n} \int_{R^{(i)}} V_i(D_i^{l_i - 1} f; x^{(i)}) dx^{(i)},$$

причем C не зависит от f.

Достаточное условие дифференцируемости.

В этом параграфе будут представлены достаточные условия дифференцируемости функций, выраженные в терминах (p, q) - моделей.

Теорема 6.1. Пусть $p > 1$. Если

$$\sup_{0<\delta<h_0} \omega_{1,q}^{l_j e_j}(\delta; l; f) < \infty,$$

то существует производная $D_i^r f$.

Теорема 6.2. Если

$$\sup_{0<\delta<h_0} \omega_{p,q}^{l_j e_j}(\delta; l; f)\delta^{-r+l_i\partial e} = M < \infty,$$

то существует производная $D_i^{r-1} f$, причем

$$\int\limits_{R_{(i)}} V_i(D_i^{r-l} f; x^{(i)}) dx^{(i)} \leq CM$$

и C не зависит от f.

Теоремы эквивалентных вложений.

Основная теорема 1 (Обобщенная теорема Ф.Рисса). Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\partial e = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})|1 : l| < 1$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^{n} ||D_i^{l_i} f||_{L_p}$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{0<\delta<h_0} \omega_{p,q}^{l_i e_i}(\delta; l; f)\delta^{-l_i(1-\partial e)},$$

причем из конечности второй полунормы следует существование указанных производных.

Основная теорема 2 (Обобщенная теорема Харди-Литтлвуда). Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $\partial e = (\frac{1}{p} - \frac{1}{q})|1 : l| < 1$. Тогда эквивалентны полунормы

$$\sum_{i=1}^{n} \sup_{0<\delta<h_0} \omega_{p,q}^{l_i e_i}(\delta; l; f)\delta^{-l_i(1-\partial e)},$$

и

$$\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{R^{(i)}} V_i(D_i^{r-1} f; x^{(i)}) dx^{(i)},$$

причем из конечности второй полунормы следует существование указанных производных.

Неравенство Гельдера.Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f_1 \in L_p(R^n)$, $f_2 \in L_p(R^n)$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тогда функция $f_1(x)f_2(x)$ интегрируема и имеет место неравенство Гельдера

$$\int\limits_{R^n} |f_1(x)f_2(x)|dx \leq ||f_1||_{L_p}||f_2||_{L_p}$$

Неравенство Минковского.Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $f_i \in L_p(R^n)$, $(i = 1, ..., m)$. Тогда $f_1 + ... + f_m \in L_p(R^n)$ и справедливо неравенство Минковского

$$||\sum_{i=1}^{m} f_i||_{L_p} \leq \sum_{i=1}^{m} ||f_i||_{L_p}.$$

Обобщение неравенства Минковского.Пусть $1 \leq p \leq \infty$, $\phi(x, y)$ - измеримая функция, заданная $R_x \times R_y$, то имеет место быть неравенство

$$||\int\limits_{E_y} \phi(x, y)dy||_{L_p} \leq \int\limits_{E_y} ||\phi(x, y)dy||_{L_p}.$$

Неравенство Юнга.Пусть $1 \leq p \leq q \leq \infty$, $1 - \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}$. Пусть $f \in L_p(R^n)$, $K \in L_r(R^n)$

$$J(x) = \int\limits_{R^n} f(y)K(y - x)dy.$$

Тогда

$$||J||_{L_q} \leq ||f||_{L_p}||K||_{L_r}.$$

Заключение. Целью работы является, доказательство теоремы Рисса. Для этого были описаны все теоремы, которые необходимы для получения этого доказательство

В первом разделе работы описаны и изложены все определения. теоремы и леммы необходимые для доказательства теоремы Рисса

Во втором разделе описываются основные понятия для того чтобы провести обобщение теоремы Рисса.