Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Размерность упорядоченного множества

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

АДЕЛАНА ОЛУВАНСЕГУ ЭММАНУЭЛ
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
Зав.кафедрой, д.ф.-м.н., профессор ________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, ,дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ________________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2018

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. Понятия и результаты упорядоченных множеств широко используются в различных разделах чистой и прикладной математики. На практике чаще всего встречаются конечные упорядоченные множества, которые задаются при помощи диаграммы.

Цели и задачи. Цель данной работы – рассмотреть некоторые важные понятия и конструкции, связанные с комбинаторикой упорядоченных множеств. В частности, в работе представлены такие понятия, как линейные доупорядочения порядка, способы введения размерности упорядоченного множества и оценки размерности упорядоченных множеств. Приведены важнейшие теоретические результаты, на которых основаны эти конструкции.

Описание структуры работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, четырех глава, списка использованных источников, содержащего 10 наименований. Работа содержит 47 страницы.

Краткая характеристика материалов работы. Работа носит реферативный характер и основана на источниках, указанных в списке литературы. Часть результатов доказана самостоятельно.

Научная новизна и значимость работы. Научная значимость работы состоит в систематизации важнейших результатов комбинаторики упорядоченных множеств и приведении доказательств основных теорем.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Описание алгоритма построения всех линейных доупорядочений порядка, заданного при помощи диаграммы.

2. Сравнение различных определений размерности упорядоченного множества.

3. Приведен Пример построения всех линейных доупорядочений упорядоченного множества.

1 Элементы теории упорядоченных множеств

1.1 Основные понятия бинарных отношений

1.) Способы задания отношений. Для бинарных отношений на конечных множествах используются еще два следующих способа задания.

1. Пусть ρ-бинарное отношение на множестве A. Изобразим элементы множества A в виде точек на плоскости. Для двух точек a, b проводим стрелку $\rightarrowtail$ из a в b тогда и только тогда, когда $(a, b) \in \rho$. При этом, если одновременно $(a, b) \in \rho$ и $(b, a) \in \rho$, то точки a и b соединяются стрелкой $\longleftrightarrow$, а если $(a, a) \in \rho$, то в точке a изображается петля на рис 1 нарисован граф заданного выше отношения ρ_1. При представлении отношения с помощью графа принято точки изображающие элементы множества A называть вершинами графа, а стрелки—его дугами; пары (a, b), принадлежащие отношению ρ, иногда называют дугами отношения ρ. Граф отношения, заданного на множестве A, будем записывать в виде пары (A, ρ).

2. Пусть $\rho \subset A\text{x}B$, где $A = \{a_1, ..., a_n\}$; $B = \{b_1, ..., b_m\}$. Рассмотрим nxm—матрицу (таблицу), в начальный столбец которой выписаны элементы множества A, а в начальную строку—элементы множества B. На пересечении строки элемента a_i и столбца b_i записывается 1, если $(a, b) \in \rho$ и 0 в противном случае. Такая таблица называется булевой матрицей отношения: булева матрица отношения ρ_1.

2.) Операции над отношениями. Так как бинарные отношения являются множествами, то к ним применимы все понятия, которые вводятся для множеств: понятия равенства, включения, а также операции пересечения, объединения и дополнения. Мы рассмотрим две таких операции.

I. Обращение отношений. Если в каждой упорядоченной паре принадлежащей отношению ρ, поменять местами первую и вторую компоненту, то получим новое отношение, которое называется о б р а т н ы м для отношения ρ и обозначается через ρ^{-1}.

$$\rho_1^{-1} = \{(r, p), (q, s), (p, r), (p, p), (r, s), (s, p)\}$$

II. Умножение отношений. Назовем две упорядоченные пары вида $(a, b), (a, b)$ примыкающими (т.е. одна упорядоченная пара примыкает к другой, если первая компонента второй упорядоченной пары совпадает со второй компонентой первой упорядоченной пары). Для двух примыкающих упорядоченных пар (a, b) и (b, c) их произведением считается упорядоченная пара (a, c).

1.2 Основные понятия упорядоченных множеств

Упорядоченным множеством называется произвольное множество A, на котором задано отношение порядка ω (т.е. рефлексивное, транзитивное и антисимметричное бинарное отношение). Такое упорядоченное множество может быть задано в виде пары $\langle A, \omega \rangle$. Иногда мы будем использовать инфиксное обозначение порядка и строгого порядка, полагая для любых элементов $a, a^{'} \in A$:

$$a \leq^{\omega} a^{'} \Leftrightarrow (a, a^{'}) \in \omega,$$
$$a <^{\omega} a^{'} \Leftrightarrow (a, a^{'}) \in \omega, a \neq a^{'}$$

При этом буква над знаками $\leq$ и $<$ опускается, если из контекста ясно, какое отношение порядка имеется в виду. Иногда инфиксные обозначения вводятся в тексте и для других типов бинарных отношений; в частности, для отношения квазипорядка ρ используется символ $\lesssim$ и для эквивалентности ε – символ $\equiv^{\varepsilon}$.

В инфиксных обозначениях аксиомы порядка приобретают следующий вид.

Аксиома рефлексивности (Ref): для любого $a \in A$ имеет место $a \leq a$;

Аксиома транзитивности (Tr): для любых $a_1, a_2, a_3 \in A$ условия $a_1 \leq a_2$ и $a_2 \leq a_3$ следует $a_1 \leq a_3$;

Аксиома антисимметричности (Antsym): для любых $a_1, a_2 \in A$ условий $a_1 \leq^{\omega} a_2$ и $a_2 \leq^{\omega} a_1$ следует $a_1 = a_2$.

Правило 1.1. *Соотношение $x < y$ выполняется тогда и только тогда, когда на диаграмме упорядоченного множества существует путь из вершины x в вершину y, идущий по наклонным отрезкам только вверх.*

2 Линейные доупорядочения порядка

2.1 Теорема Шпильрайна

Полные семейства линейных доупорядочений. Пусть $\langle A, \omega \rangle$ — произвольное упорядоченное множество. Под *линейным доупорядочением* порядка ω понимается любой содержащий его линейный порядок на том же множестве. Допуская вольность речи, иногда говорят о линейном доупорядочении множества A. Задачей данного раздела является описание всех линейных доупорядочений заданного порядка.

Лемма Цорна Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – упорядоченное множество, для которого выполняется условие индуктивности. Тогда каждый элемент $a \in A$ мажорируется некоторым максимальным элементом.

Следствие 2.1. *В упорядоченном множестве* $(\Omega(A), \subset)$ *всех отношений порядка на множестве A максимальными элементами являются линейные отношения порядка и только они.*

Теорема 2.1. ***(теорема Шпильрайна)****. Для всякого отношения порядка ω на множестве A найдется такое линейное отношение порядка $\overline{\omega}$ на A, что $\omega \subset \overline{\omega}$ (такое отношение называется линейным доупорядочением порядка ω)*

Кратко: всякий порядок на множестве можно продолжить до линейного порядка на этом множестве.

2.2 Совместимость отношения с отношением порядка.

Пусть отношение порядка на множестве . Бинарное отношение ρ на множестве будем называть *совместимым* с порядком ω, если граф отношения $\omega \bigcup \rho$ не имеет контуров. Это требование рав- 7-132 носильно тому, что отношение $\omega \bigcup \rho$ включается в некоторое отношение порядка на A. действительно, если $\omega \bigcup \rho \subset \overline{\omega}$ и $\overline{\omega}$ отношение порядка, то граф отношения $\omega \bigcup \rho$ не имеет контуров, так как контур графа (A, $\omega \bigcup \rho$) был бы также контуром графа (A, ω) а граф отношения порядка контуров не имеет. Обратно, если граф отношения $\omega \bigcup \rho$ не имеет контуров, то по предложению 7 его отношение достижимости о $\omega \widehat{\bigcup} \rho$ является отношением порядка и Выполняется $\omega \bigcup \rho \subset \omega \widehat{\bigcup} \rho$.

Теорема 2.2. *(теорема о совместимости) Пусть ω – отношение порядка на множестве A, ρ–бинарное отношение на A, причем компоненты упорядочен-*

ных пар, принадлежащих отношению ρ составляют подмножество $X \subset A$. Если ρ совместимо с порядком, индуцированным отношением ω о на подмножества X, то ρ совместимо и с порядком ω.

Из теоремы о совместимости и теоремы Шпильрайна легко получается следующее

Следствие 2.2. *Всякое линейное упорядочение подмножества упорядоченного множества может быть продолжено до линейного доупорядочения всего упорядоченного множества.*

2.3 Алгоритм построения всех линейных доупорядочений порядка

Алгоритм построения всех линейных доупорядочений порядка может быть представлен в виде следующих шагов.

1. Для упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ строим вспомогательный граф γ. Построение начинаем с самого множества A, которое является начальной вершиной графа γ Смежными с вершиной A будут те подмножества, которые получаются из множества A удалением одного из его максимальных элементов. Далее применяем процедуру удаления максимальных элементов к полученным подмножествам и т.д. Окончательной вершиной графа γ является пустое множество $\varnothing$.

2. Для каждого одноэлементного подмножества, являющегося вершиной графа γ, выписываем его единственное линейное доупорядочение.

3. Через конечное число шагов мы получим все линейные доупорядочения всего множества A , являющегося вершиной графа γ.

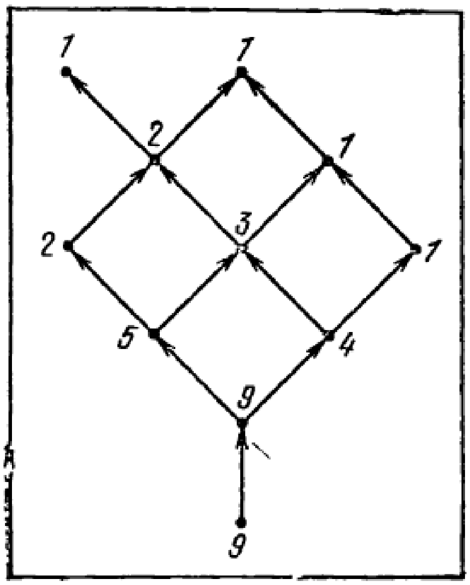
Проиллюстрируем реализацию приведенного алгоритма примером.

2.4 Подсчет числа линейных доупорядоченнй

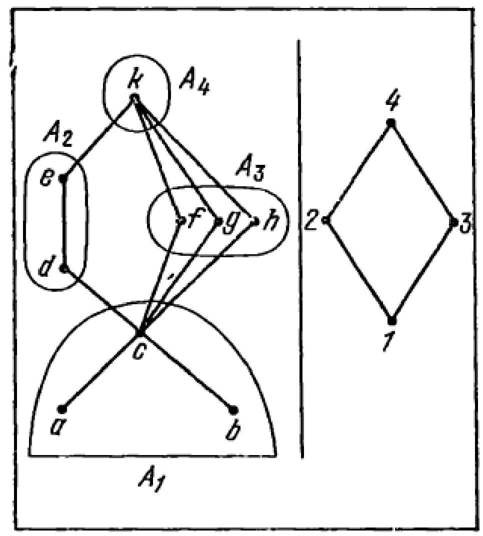
Далее мы рассмотрим способ подсчета числа линейных доупорядочений таких упорядоченных множеств, которые получаются с помощью композиции специального вида, называемой `упорядоченной суммой` упорядоченных множеств. Этот вид ком- позиции, имеющий важное значение для многих вопросов теории упорядоченных множеств, определяется так. Пусть $(A_i, \omega_i)_{i \in I}$ семейство упорядоченных множеств, причем множества $A_i (i \in I)$ попарно не пересекаются. На множестве индексов I также должно быть задано отношение (строгого) порядка

$>$. Тогда на множестве $A = \bigcup\limits_{i \in i} A_i$ определяется отношение порядка ω следующим образом. Пусть $a, b \in A$.

1. Если элементы a и b принадлежат одному и тому же подмножеству A_i то условие $a \overset{\omega}{>} b$ равнозначно условию $a \overset{\omega_i}{>} b$



(a) Рис. 10



(b) Рис. 11

2. Если $a \in A_i$, $b \in A_j$ где $i \neq j$, то условие $a \overset{\omega_i}{>} b$ равнозначно тому, что $i > j$.

3 Размерность упорядоченного множества

3.1 Порядковая и мультипликативная размерность

Определение 3.1. *Порядковой размерностью упорядоченного множества* $\langle A, \omega \rangle$ *называется наименьшее число линейных порядков на множестве* A*, пересечением которых является порядок* ω*. Согласно теореме Душника – Миллера, порядковая размерность любого упорядоченного множества существует. При этом для конечного упорядоченного множества его порядковая размерность не превосходит числа его линейных доупорядочений.*

Для введения второго подхода к понятию размерности напомним следующее

Определение 3.2. *Пусть* $\langle A, \omega \rangle$ *и* $\langle B, \sigma \rangle$ *два упорядоченных множества. Под* изоморфным вложением *первого во второе понимается инъективное отображение* $\theta : A \to B$, *удовлетворяющее при всех* $a_1, a_2 \in A$ *условию:*

$$a_1 \leq^{\omega} a_2 \Leftrightarrow \theta(a_1) \leq^{\sigma} \theta(a_2).$$

Определение 3.3. *Мультипликативной размерностью упорядоченного множества* $\langle A, \omega \rangle$ *называется наименьшее число цепей, в прямое произведение которых оно изморфно вкладывается. При этом прямое произведение цепей упорядочивается покомпонентным порядком.*

Утверждение 3.1. *Всякое упорядоченное множество имеет мультипликативную размерность. Мультипликативная размерность* $n-$ *элементного упорядоченного множества не превосходит* n.

Теорема 3.1. *Для любого упорядоченного множества порядковая размерность и мультипликативная размерность совпадают между собой. Это общее значение называется просто размерностью упорядоченного множества. Размерность упорядоченного множества* A *обозначается* $dim\ A$

4 Оценки размерности упорядоченного множества

4.1 Неразложимые элементы упорядоченного множества

Определение 4.1. *Пусть* $\langle A, \omega \rangle$ *– произвольное упорядоченное множество. Элемент* $a \in A$ *называется неразложимым, если он не может быть представлен в виде конечного объединения (т. е. супремума) строго меньших его элементов.*

Другими словами, неразложимость элемента a означает, что условие $a = \sup\{a_1, a_2, ..., a_r\}$ влечет равенство $a = a_k$ для некоторого $k = 1, ..., r$.

Теорема 4.1. *Пусть* $\langle A, \omega \rangle$ *упорядоченное множество, удовлетворяющее условию минимальности. Тогда всякий элемент* $a \in A$ *может быть представлен в виде конечного объединения (т. е. супремума) неразложимых элементов.*

Доказательство. Так как всякий минимальный элемент, очевидно, неразложим, то для минимального элемента утверждение справедливо. Предположим, что доказываемое утверждение справедливо для всех элементов, строго меньших некоторого фиксированного элемента a. Может быть два случая:

1. элемент a является неразложимым. Тогда требуемое представление имеет вид $a = \sup\{a,\}$;

2. элемент a является разложимым. Тогда $a = \sup\{a, ..., a_m\}$, где $a_i < a$ $(i = 1, ..., m)$. По индуктивному предположению каждый элемент a_i может быть представлен в виде объединения некоторого конечного множества неразложимых элементов: $a_i = \sup B_i$. Используя ассоциативность операции супремума

$$a = \sup\{\sup B_i, ..., \sup B_m\} = \sup \bigcup_{i=1}^{m} B_i,$$

4.2 Вложение упорядоченного множества в прямое произведение цепей.

Далее нам потребуется конструкция представления упорядоченного множества в виде объединения цепей, которая связана с теоремой Дилуорса. Введем вначале следующее

Определение 4.2. *Подмножество в упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ называется дискретным (или антицепью), если любые два его различных элемента несравнимы между собой.*

Определение 4.3. *Ширина упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$ определяется как супремум мощностей его антицепей и обозначается через $b(A)$:*

$$b(A) = \sup |B|,$$

где B – произвольная антицепь в упорядоченном множестве $\langle A, \omega \rangle$. Р.Дилуорс изучал проблему представления конечного упорядоченного множества в виде объединения попарно непересекающихся цепей.

Теорема 4.2. *Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – конечное упорядоченное множество. Наименьшее число попарно непересекающихся цепей, объединение которых совпадает с A, равно ширине упорядоченного множества $\langle A, \omega \rangle$.*

Теорема 4.3. *Пусть $\langle A, \omega \rangle$ – конечное упорядоченное множество, имеющее наименьший элемент 0, B – множество его неразложимых элементов, отличных от нуля 0. Рассмотрим представление множества B в виде объединения цепей: $B = \bigcup\limits_{k \in K} C_k$, и положим $C_k^0 = c_k \cup \{0\}$ для $k \in K$. Определим при* *каждом* $k \in K$ *отображение* $\varphi_k : A \to C_k^0 = c_k$, *полагая*

$$\varphi_k(a) = \sup\{b \in C_k^0 : b \leq a\}. \tag{4.1}$$

Тогда отображение $\varphi : A \to \prod_{k \in K} C_k^0$, *определенное равенством* $\varphi(a) = (\varphi_k(a))_{k \in K}$ *является изоморфным вложением упорядоченного множества* $\langle A, \omega \rangle$ *в прямое произведение семейства цепей* $(C_k^0)_{k \in K}$, *снабженное покомпонентным упорядочением.*

$$a_1 \leq a_2 \Rightarrow \varphi(a_1) \leq (\varphi_k(a_2) \tag{4.2}$$