Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Принципы оптимальности в задачах принятия решения с отношениями предпочтения

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студента 4 курса 421 группы

направления 02.03.01 – Математика и компьютерные науки,
код и наименование направления
профиль подготовки: Математические основы компьютерных наук

механико-математического факультета
наименование факультета, института, колледжа

БИРБАСОВОЙ ТАТЬЯНЫ МАКСИМОВНЫ
фамилия. имя, отчество

Научный руководитель
Зав.кафедрой, д.ф.-м.н., профессор ________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч. звание подпись, ,дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
доктор физ-мат. наук, профессор ________________________ В.В.РОЗЕН
должность, уч. степень, уч.звание подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы. В последние годы в теории принятия решений возникло новое научное направление, состоящее в том, что целевая структура задачи принятия решения задается не в виде целевой функции, а с помощью бинарного отношения предпочтения на множестве допустимых альтернатив. Такой способ формализации целевой структуры позволяет в некоторых случаях избавиться от недостатков, присущих числовым моделям принятия решений и построить более адекватную модель.

Цель работы:

1) Изучить методы анализа задач принятия решения, в которых целевая структура задана при помощи бинарных отношений предпочтения на множестве допустимых альтернатив;

2) Привести доказательства основных свойств структур предпочтения различных типов;

3) Рассмотреть важнейшие способы задания отношений предпочтения для многокритериальных задач принятия решений с качественными критериями;

4) Разобрать алгоритм нахождения циклов в графе предпочтений и составить Программу для поиска циклов в произвольном графе.

Описание структуры работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований и Приложения, в котором представлена программа решения задачи нахождения циклов в произвольном конечном графе. Работа содержит 40 страниц и 4 иллюстрации.

Краткая характеристика материалов работы. Работа носит реферативный характер и основана на источниках, указанных в списке литературы.

Часть результатов доказана самостоятельно. Также самостоятельна составлена Программа для нахождения циклов в произвольном конечном графе.

Научная новизна и значимость работы. Научная значимость работы состоит в систематизации важнейших результатов, относящихся к задачам принятия решений с отношениями предпочтения на множестве допустимых альтернатив.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1) Самостоятельное доказательство ряда результатов, приведенных в работе (ацикличность структуры предпочтений, представленной отношением порядка (утверждение 1.1); доказательство основных свойств отношения достижимости, на которых основан алгоритм нахождения циклов в графе; пример нахождение циклов графа с помощью описанного алгоритма.

2) Составление Программы нахождения циклов произвольного графа на языке $C++$.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1 Структуры предпочтений

1.1 Определение структуры предпочтений

В работе определена структура «Доминирование-безразличие». Формально можно представить данную структуру с помощью бинарного отношения, те в виде множества пар, где один элемент лучше (или не хуже) другого.

Дано следующее формальное определение:

Определение 1.1. *Будем говорить, что пара бинарных отношений* (α, β), *заданных на множестве* A, *определяет на нем структуру «доминирование-безразличие» и назовем* α *отношением доминирования, а* β *- отношением безразлично, если:*

1) *α асимметрично;*

2) *β симметрично и рефлексивно(есть отношение толерантности);*

3) *$\alpha \cap \beta = \varnothing$.*

Замечание 1.1. *Структура предпочтений на A может быть задано с помощью одного бинарного отношения ρ, которое является объединением отношений сторогого предпочтения и безразличия: $\alpha \cup \beta$. Отношение ρ называется при этом отношением нестрогого предпочтения.*

Замечание 1.2. *Для отношения доминирования α и отношения безразличия β, чтобы показать их зависимость от ρ, будем иногда использовать обозначения α_ρ и β_ρ соответственно. Сама структура предпочтений в данном случае может быть представлена как парой $\langle A, \rho \rangle$, так и тройкой $\langle A, \alpha_\rho, \beta_\rho \rangle$.*

Множество, на котором тем или иным способом задана структура предпочтений, будем называть *пространством предпочтений*.

1.2 Типы структур предпочтений

Определение 1.2. *Пусть на множестве A задана структура предпочтений. Говорят что элементы $a, b \in A$ сравнимы по предпочтению если либо один строго предпочтительнее другого, либо они безразличны; в противном случае a и b называют несравнимыми по предпочтению.*

Для любы элементов $a, b \in A$ выполняется одно из следующих соотношений:

1. a строго предпочтительнее b: $a > b$;

2. b строго предпочтительнее a: $b > a$;

3. a и b безразличны: $a \sim b$;

4. a и b несравнимы: $a \| b$.

В работе дано определение индифферентности объектов:

$$aIb \Leftrightarrow \neg(a < b) \wedge \neg(a > b).$$

Индифферентность элементов a и b означает, что они либо безразличны, либо несравнимы:

$$aIb \Leftrightarrow a \sim b \text{ или } a \| b.$$

Доказано следующее свойство структур предпочтений:

Теорема 1.1. *Структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ транзитивна тогда и только тогда, когда и отношение строгого предпочтение и отношение безразличия транзитивны, причем отношение строгого предпочтение транзитивно относительно отношения безразличия.*

1.3 Ацикличные структуры предпочтений

Замечание 1.3. *Структурой порядка (или упорядоченным множеством) называется такая структура предпочтений, которая является одновременно транзитивной и антисимметричной. Асимметричная часть порядка является строгим порядком; при этом, добавляя к отношению строгого порядка тождественное отношение, получаем отношение порядка. На языке теории графов строгий порядок и порядок получаются один из другого отбрасыванием или добавлением петель в каждой вершине и однозначно определяют друг друга. Формально отношение порядка определяется аксиомами рефлексивности, транзитивности и антисимметричности.*

В работе рассмотрен простой способ «превращения» транзитивной структуры пред- почтений в структуру порядка, состоящий в следующем:

Определение 1.3. *Пусть ρ - некоторое бинарное отношение, а ϵ - отношение эквивалентности на множестве A. На фактор-множестве A/ϵ определим фактор-отношение ρ/ϵ с помощью формулы:*

$$(C_1, C_2) \in \rho/\epsilon \Leftrightarrow (a_1, a_2) \in \rho \text{ для некоторых } a_1 \in C_1, a_2 \in C_2$$

Важным подклассом класса антисимметричных структур предпочтения является класс *ацикличных структур предпочтения.*

Определение 1.4. *Структура предпочтений $\langle A, \rho \rangle$ называется ацикличной, если для любого $n = 2, 3, \ldots$ выполняется:*

$$a_1 \xrightarrow{\rho} a_2 \xrightarrow{\rho} \cdots \xrightarrow{\rho} a_n \xrightarrow{\rho} a_1 \Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n \tag{1.1}$$

Таким образом, в ацикличном графе предпочтений нет циклов, кроме, может быть, петель.

Доказано следующее утверждение:

Утверждение 1.1. *Транзитивная и антисимметричная структура предпочтений (то есть структура порядка) ω является ацикличной.*

1.4 Граф Герца (стягивание циклов)

В этом пункте рассмотрен способ избавления любого отношения от циклов. Для этого сначала необходимо выделить все циклы в графе.

1.4.1 Алгоритм нахождения циклов в произвольном графе

Приводится более алгоритм выделения циклов, основанный на свойствах отношения достижимости.

Доказаны следующие свойства отношения достижимости в произвольном графе:

Лемма 1.1. *Для графа, содержащего n вершин, свойства «достижимость» и «достижимость не более чем за n шагов» равносильны.*

Лемма 1.2. *Если отношение ρ рефлексивно, то в графе $\langle A, \rho \rangle$ свойства «достижимость за k шагов» и «достижимость не более чем за k шагов» равносильны.*

Лемма 1.3. *Пусть ρ - рефлексивное отношение на множестве A, содержащем n элементов $a, c \in A$. Для того, чтобы вершина c была достижима в графе $\langle A, \rho \rangle$ из вершины a, необходимо и достаточно, чтобы c была достижима из a точно за n шагов.*

Теорема 1.2. *Две вершины $a, b \in A$ находятся в отношении взаимной достижимости ρ тогда и только тогда, когда для любой вершины графа ее достижимость из a равносильна ее достижимости из b, т.е.*

$$(a, b) \in str\rho \Longleftrightarrow tr\rho(a) = tr\rho(b)$$

В работе получена следующая формула:

$$(a, b) \in str\rho \Longleftrightarrow \rho_0^n(a) = \rho_0^n(b) \qquad (1.2)$$

Формула (1.2) является основным правилом для нахождения циклов графа с помощью бинарных отношений.

1.4.2 Алгоритм нахождения циклов в произвольном графе на языке булевых матриц

Дано описание конкретного алгоритма нахождения циклов в графе на языке булевых матриц:

Шаг 1. Задаем отношение ρ_0, полученное из отношения ρ добавлением отсут- ствующих в нем петель, с помощью булевой матрицы M_0.

Шаг 2.Отношение ρ_0^n представляется матрицей M_0^n (n-я степень матрицы M_0).

Равенство срезов $\rho_0^n(a) = \rho_0^n(b)$ означает совпадение строк элементов a и b в матрице M_0.

Правило 1.1. *Вершины a и b находятся в одном цикле, тогда, и только тогда, когда a-строка и b-строка в матрице M_0^n совпадают.*

Приведен пример работы данного алгоритма. Для выполнения этой задачи, составлена программа на языке $C++$.

1.4.3 Стягивание циклов

В работе даны необходимые теоретические выкладки, позволяющие доказать следующее утверждение.

Утверждение 1.2. *Факторизация любого отношения ρ по отношению его взаимной достижимости приводит к фактор-отношению, удовлетворяющему условию ацикличности.*

Приведен пример стягивания циклов, найденных в предыдущем примере.

2 Задачи принятия решений

В работе рассмотрены три основных проблемы, относящиеся к структуризации множества альтернатив A:

- проблема выявления и задания предпочтений;
- проблема уточнения понятия «хорошей альтернативы»;
- проблема ранжирования по предпочтению множества альтернатив.

2.1 Основная модель

Математическая модель принятия решения по качественным критериям может быть представлена в виде набора

$$G = \langle A, (q_j)_{j \in J} \rangle, \tag{2.1}$$

Делаются следующие предположения.

1. Множество альтернатив A должно содержать не менее двух элементов: $|A| \geq 2$.
2. Число критериев должно быть также не меньше двух: $|J| \geq 2$.
3. Всякая цепь $C_j (j \in J)$ должна содержать не менее двух элементов: $|C_j| \geq 2$.

Рассматриваемая модель задается в виде таблицы значений критериев.

$A \backslash Q$	q_1	$\dots$	q_j	$\dots$	q_m
a_1	$q_1(a_1)$	$\dots$	$q_j(a_1)$	$\dots$	$q_m(a_1)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_i	$q_1(a_i)$	$\dots$	$q_j(a_i)$	$\dots$	$q_m(a_i)$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
a_n	$q_1(a_n)$	$\dots$	$q_j(a_n)$	$\dots$	$q_m(a_n)$

2.2 Предпочтение по Парето

Рассмотрено одно из решающих правил, называемое предпочтением по Парето.

Определение 2.1. *Говорят, что альтернатива a' является не менее предпочтительной по Парето, чем альтернатива a, если a' не менее предпочтительна, чем a, сразу по всем критериям $q_j (j \in J)$:*

$$a \overset{Par}{\leq} a' \Leftrightarrow (\forall j \in J) q_j(a) \leq_j q_j(a'). \tag{2.2}$$

Определение 2.2. *Пусть A - множество допустимых альтернатив. Альтернатива $a^* \in A$ называется оптимальной по Парето, если не существует такой допустимой альтернативы $a \in A$, для которой выполнено условие $a \overset{Par}{>} a^*$.*

Приведен пример выявления предпочтения в многокритериальной системе с помощью предпочтения по Парето.

Рассмотрена геометрическая интерпретация Парето-предпочтения для двух положительных критериев оценки в случае с дискретным и абсолютно непрерывным распределениями.

Замечание 2.1. *В работах по многокритериальной оптимизации используется некоторая модификация отношения $\overset{Par}{<}$, называемая предпочтением по Слейтеру и состоящая в следующем: строгое предпочтение по Слейтеру $\overset{Sl}{<}$ (доминирование по Слейтеру) означает, что одна альтернатива строго лучше другой сразу по всем критериям:*

$$a \overset{Sl}{<} a' \Leftrightarrow (\forall j \in J) q_j(a) <_j q_j(a').$$

Нестрогое предпочтение по Слейтеру задается формулой:

$$a \overset{Sl}{\leq} a' \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ или } (\forall j \in J) q_j(a) <_j q_j(a'). \tag{2.3}$$

Доказана формула:

$$a \overset{Par}{\leq} a', a' \overset{Sl}{\leq} a'' \Rightarrow a \overset{Par}{\leq} a''.$$

Указанный способ задания некоторой структуры на множестве альтернатив модели G является типичным. А именно, вначале структура задается на множестве векторных оценок (или, более общо, на прямом произведении шкал измерения $\prod\limits_{j \in J} C_j$), а затем с помощью отображения $q : A \to \prod\limits_{j \in J} C_j$ она переносится на множество альтернатив модели G.

Важнейшим свойством предпочтения по Парето является его транзитивность. Заметим, что отношение «несравнимости по Парето» $\parallel$ может быть нетранзитивным даже в случае двух критериев.

Приведен пример, в котором отношение несравнимости по Парето не является транзитивным.

2.3 Правила большинства

Если два объекта являются несравнимыми по Парето, то ни один из них не превосходит другого сразу по всем критериям. Правило простого большинства основано на учёте не всех критериев, а их большинства.

С каждой упорядоченной парой альтернатив $a, a' \in A$ связаны три числа:

- $n^*(a, a')$ есть число тех критериев $j = 1, \ldots, m$, для которых альтернатива a' предпочтительнее (в строгом смысле) альтернативы a;
- $n^*(a', a)$ есть число тех критериев $j = 1, \ldots, m$, для которых альтернатива a предпочтительнее (в строгом смысле) альтернативы a';
- $n^0(a, a')$ есть число тех критериев $j = 1, \ldots, m$, для которых альтернативы a и a' безразличны по предпочтительности.

Определим отношение $\overset{M_1}{\leq}$ следующей равносильностью:

$$a \overset{M_1}{\leq} a' \Leftrightarrow n(a', a) \leq n(a, a'). \tag{2.4}$$

Рассматриваем правило большинства $\overset{M_2}{\leq}$, определенное следующим образом:

$$a \overset{M_2}{\leq} a' \Leftrightarrow n(a, a') \geq m/2$$

Утверждение 2.1. *Строгое предпочтение для мажоритарного отношения* $\overset{M_2}{\leq}$ *определяется равносильностью:*

$$a \overset{M_2}{<} a' \Leftrightarrow n^*(a, a') > m/2. \tag{2.5}$$

В случае, когда для рассматриваемых альтернатив отсутствуют критерии с совпадающими значениями, будем для отношений предпочтения $\overset{M_1}{\leq}$ и $\overset{M_2}{\leq}$ использовать общее обозначение $\overset{M}{\leq}$ и общее название «мажоритарное отношение». Мажоритарное отношение обладает как свойствами предпочтения $\overset{M_1}{\leq}$, так и свойствами предпочтения $\overset{M_2}{\leq}$. В частности, условие $a' \overset{M}{>} a$ означает, что альтернатива a' превосходит альтернативу a более чем по половине критериев.

Важным преимуществом правила большинства является простота его использования; именно поэтому оно чаще всего применяется на практике. Однако правило большинства может привести к нетранзитивному предпочтению.

Приведен пример применения правила большинства.

Замечание 2.2. *На практике иногда используют некоторые модификации правила большинства, являющиеся его усилением. Одно из таких усилений, называемое правилом λ-большинства, строится следующим образом.*

Зафиксируем действительное число $1/2 < \lambda < 1$. Для любых $a, a' \in A$ определяем строгое предпочтение по правилу λ-большинства формулой:

$$a \overset{M(\lambda)}{<} a' \Leftrightarrow n^*(a, a') \geq r,$$

где $r = \lambda m$, если λm целое, и $r = [\lambda m] + 1$ в противном случае. Отношение безразличия по правилу λ-большинства задается в виде:

$$a \overset{M(\lambda)}{\sim} a' \Leftrightarrow n^*(a, a') < r, n^*(a', a) < r.$$

Определенное таким способом отношение предпочтения является линейным, однако оно также может приводить к нетранзитивным предпочтениям.