Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра геометрии

Выпуклые конусы и квазипорядки в линейных пространствах

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

Студента 2 курса 227 группы

направления 02.04.01 ‹‹Математика и компьютерные науки››

Механико-математический факультет

Безрукова Александра Владимировича

Научный руководитель
Зав. кафедрой д.ф.-м.н., профессор ____________________ В.В.РОЗЕН
подпись, дата инициалы, фамилия

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., профессор ____________________ В.В.РОЗЕН
подпись, дата инициалы, фамилия

Саратов 2018

Введение. Выпуклым анализом называют раздел математики, в котором изучаются выпуклые множества и выпуклые функции [1]. Понятие выпуклости [2] играет важную роль в различных областях фундаментальной и прикладной математики. Результаты выпуклого анализа находят многочисленные приложения в теории игр, в математической теории управления, в математической экономике.

Цели и задачи. Цель данной работы – дать краткий обзор основных понятий и результатов выпуклого анализа. Основное внимание уделяется вопросам отделимости выпуклых множеств гиперплоскостями, свойствам выпуклых конусов и квазипорядков в линейном пространстве.

Составить программу, решающую задачу принадлежности точки к выпуклому конусу, заданному своими образующими в евклидовом пространстве.

Описание структуры работы. Выпускная квалификационная работа состоит из введения, пяти глав, заключения, списка использованных источников, содержащего 20 наименований и приложения. Работа содержит 61 страницу и 11 иллюстраций.

Краткая характеристика материалов работы. Работа носит реферативный характер и основана на источниках, указанных в списке литературы. Часть результатов доказана самостоятельно. Составлена программа на языке C++. Рассмотрен модельный пример, подтверждающий правильность работы программы.

Научная новизна и значимость работы. Научная значимость работы состоит в систематизации важнейших результатов выпуклого анализа и приведении полных доказательств основных теорем.

Положения, выносимые на защиту. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Описание структуры решетки выпуклых конусов в линейном пространстве. Доказательство того факта, что супремум конечного числа конусов совпадает с их суммой.

[1] Розен, В. В. Выпуклый анализ в линейных пространствах. Элементарное введение: учебное пособие / В. В. Розен. Саратов: Изд-во Сар. ун-та, 1996. 112 с.

[2] Рокафеллар, Р. Выпуклый анализ / Р. Рокафеллар. М.: Мир, 1973. 472 с.

2. Подробное доказательство существования взаимно однозначного соответствия между выпуклыми конусами и квазипорядками линейного пространства [3].
3. Составление программы для решения проблемы принадлежности точки к выпуклому конусу, заданному своими образующими в евклидовом пространстве.

Основное содержание работы. В главе 1 вводятся основные определения и рассматриваются некоторые вспомогательные утверждения, необходимые в дальнейшем. В частности: дано определение линейного (векторного) пространства, линейного и аффинного подпространства, выпуклого множества, размерности выпуклых множеств [4]. Приведены важнейшие свойства выпуклых множеств и выпуклых оболочек [5].

Предложение 1.1. В любом линейном пространстве:
1. сумма выпуклых множеств является выпуклым множеством,
2. произведение выпуклого множества на число есть выпуклое множество.

В главе 2 изучается топологическая структура выпуклых множеств[6]. Дается определение топологического линейного пространства:

Определение 2.1. Линейное пространство V, на котором задана топология, согласованная с имеющейся на V линейной структурой в том смысле, что операции $+$ и $\cdot$ непрерывны в этой топологии, называется топологическим линейным (векторным) пространством.

Указаны формулы для нахождения внутренности и замыкания выпуклого множества в нормированном линейном пространстве:

$$clX = \cap_{\varepsilon>0}(X + \varepsilon B),$$

$$intX = x \in X(\exists \varepsilon > 0)x + \varepsilon B \subseteq X.$$

[3] Розен, В. В. Упорядоченные векторные пространства и их приложения / В. В. Розен. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014. 216 с.

[4] Петров, Н. Н. Введение в выпуклый анализ: учебное пособие / Н. Н. Петров. Ижевск: Удмуртский гос. ун-т, 2008. 168 с.

[5] Стрекаловский, А. С. Введение в выпуклый анализ: учебное пособие / А. С. Стрекаловский. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 2009. 81 с.

[6] Лейхтвейс, К. Выпуклые множества / К. Лейхтвейс. М.: Наука, 1985.
366 с.

Доказывается **теорема 2.6**, дающая алгебраическую характеризацию условия непустоты внутренности выпуклого множества в конечномерном линейном пространстве. Согласно этой теореме, в конечномерном линейном пространстве внутренность непустого выпуклого множества C непуста тогда и только тогда, когда C имеет полную размерность.

Определение 2.2. Относительной внутренностью выпуклого множества C называется внутренность множества C относительно его аффинной оболочки $affC$.

Теорема 2.10. В конечномерном линейном пространстве замыкание clC и относительная внутренность riC выпуклого множества C имеют такую же аффинную оболочку, а, следовательно, и размерность, как и множество C.

В главе 3 рассматриваются способы усиления понятия отделимости[7].

Определение 3.1. Пусть C_1 и C_2 - два выпуклых множества в линейном пространстве V. Говорят, что гиперплоскость H отделяет C_1 от C_2, если C_1 и C_2 содержатся в разных полупространствах, определяемых гиперплоскостью $H : C_1 \subseteq H_+$ и $C_2 \subseteq H_-$. Гиперплоскость H называется при этом отделяющей.

1. Собственная отделимость. Дополнительное требование к отделимости состоит здесь в том, что выпуклые множества C_1 и C_2 не должны лежать оба в отделяющей гиперплоскости H (допускается вариант, когда одно из множеств C_1 или C_2 лежит H). В конечномерном линейном пространстве V любые два выпуклых множества C_1 и C_2, для которых $\dim(C_1 \bigcup C_2) < \dim V$, могут быть отделены гиперплоскостью. Такое отделение выпуклых множеств не является собственным и не представляет интереса.
2. Строгая отделимость. Требуется, чтобы выпуклые множества C_1 и C_2 лежали в разных открытых полупространствах, определяемых гиперплоскостью $H : C_1 \subseteq H_+^0,\ C_2 \subseteq H_-^0$ (открытые полупространства получаются из замкнутых полупространств "выбрасыванием"из них точек граничной гиперплоскости: $H_+^0 = H_+ \backslash H,\ H_-^0 = H_- \backslash H$).

[7]Шефер, Х. Топологические векторные пространства / Х. Шефер. М.: Мир, 1971. 360 с.

На евклидовой плоскости два касающихся круга могут быть отделены гиперплоскостью (в качестве которой выступает общая касательная к граничным окружностям), но не могут быть отделены строго.

3. Сильная отделимость. Означает с интуитивной точки зрения, что отделяемые множества могут быть "улучшены на ε"и при этом оставаться в разных открытых полупространствах. Формально это означает следующее: гиперплоскость H *сильно отделяет* выпуклые множества C_1 и C_2, если существует такое $\varepsilon > 0$, что выпуклые множества $C_1 + \varepsilon B$ и $C_2 + \varepsilon B$ содержатся в разных открытых полупространствах, определяемых гиперплоскостью H (через B, обозначается единичный шар с центром в O).

   Таким образом, в приведенном перечне каждый следующий вариант отделимости является усилением предыдущего. Наибольшее значение в приложениях имеют собственная и сильная отделимость выпуклых множеств.

Теорема 3.1 Для того, чтобы выпуклые множества C_1 и C_2, лежащие в конечномерном линейном пространстве V, были собственно отделимыми некоторой гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы их относительные внутренности не пересекались, то есть чтобы $riC_1 \bigcap riC_2 = \emptyset$.

Основной результат о сильной отделимости выпуклых множеств в конечномерном линейном пространстве представлен в следующей теореме.

Теорема 3.5. Пусть $C_1,\ C_2$ - непустые выпуклые множества в конечномерном евклидовом пространстве V. Для того, чтобы множества C_1 и C_2 могли быть сильно отделены некоторой гиперплоскостью, необходимо и достаточно, чтобы расстояние между ними было строго положительно[8].

Замечание 3.6. Расстояние между двумя множествами в V определяется равенством:

$$\rho(C_1, C_2) = \inf_{\substack{x_1 \in C_1 \\ x_2 \in C_2}} \|x_2 - x_1\|,$$

где $\|\cdot\|$ - евклидова норма.

[8]Никайдо, Х. Выпуклые структуры и математическая экономика / Х. Никайдо. М.: Мир, 1972. 520 с.

В 4-ой главе дается **определение 4.1** выпуклого конуса в линейном пространстве V как непустого подмножества $K \subseteq V$, удовлетворяющего двум условиям:

1. $K + K \subseteq K$;
2. $\alpha K \subseteq K$ при любом $\alpha \geq 0$.

Введено понятие конической оболочки, которая обозначается $coneX$ и представляет собой наименьший выпуклый конус, содержащий X.

Определяются операции взятия инфимума и супремума произвольного семейства выпуклых конусов $(K_i)_{i \in I}$ следующим образом:

$$\inf_{i \in I} K_i = \bigcap_{i \in I} K_i,$$

$$\sup_{i \in I} K_i = cone(\bigcup_{i \in I} K_i).$$

Отметим, что sup не совпадает с теоретико-множественным объединением, так как оно может не быть выпуклым конусом.

Доказывается **теорема 4.5**, состоящая в том, что в случае двух конусов их супремум совпадает с их суммой:

$$\sup\{K_1, K_2\} = K_1 + K_2.$$

Пусть K – произвольный конус в векторном пространстве V и $(-K)$ противоположный ему конус, тогда выполняются следующие равенства:

$$\inf\{K, -K\} = K \cap (-K),$$

$$\sup\{K, -K\} = K - K.$$

При этом $K \bigcap (-K)$ и $(K - K)$ являются векторными подпространствами пространства V. Точнее: конус $K \cap (-K)$ представляет собой наибольшее векторное подпространство, содержащееся в K, а конус $K - K$ представляет собой наименьшее векторное подпространство, содержащее K.

Определение 4.2. Конус $K \subseteq V$ называется заостренным, если

$$K \cap (-K) = \mathbf{0}.$$

Определение 4.3. Конус $K \subseteq V$ называется воспроизводящим, если

$$K - K = V.$$

Двойственным для выпуклого конуса K называется выпуклый конус K^*, определенный равенством:

$$K^* = \{y \in V : (\forall x \in K)(x, y) \geq 0\}.$$

Доказывается, что K^* действительно является выпуклым конусом.

Для случая, когда выпуклый конус K является векторным подпространством, двойственный ему конус K^* совпадает с ортогональным дополнением подпространства K : $K^* = K^{\perp}$. Выпуклый конус, двойственный для K^* , обозначается K^{**}.

Соответствие между K и K^{**} устанавливает следующая **теорема 4.9**:

1. Для любого конуса $K \subseteq V_n$ имеет место включение
   $K \subseteq K^{**}$.
2. Равенство $K = K^{**}$ имеет место тогда и только тогда, когда конус K замкнут.

Изучаются конечно-порожденные и многогранные конусы.

Выпуклый конус, порожденный конечным множеством векторов, называется конечно-порожденным конусом.

Конус, порожденный конечным множеством вектором $X \subseteq V$, состоит из всевозможных неотрицательных линейных комбинаций векторов из X.

Определение 4.7. Выпуклый конус, являющийся пересечением конечного числа полупространств (т.е. полупространств, ограниченных проходящими через $\mathbf{0}$ гиперплоскостями), называется многогранным или полиэдральным.

Теорема Фаркаша - Минковского - Вейля. В конечномерном евклидовом пространстве конус тогда и только тогда является многогранным, когда он конечно- порожденный [9].

Из теоремы Фаркаша - Минковского - Вейля, получаем **следствие 4.20**:

1. Выпуклый конус, являющийся пересечением двух конечно-порожденных конусов, конечно-порожден.
2. Выпуклый конус, являющийся суммой двух конечно-порожденных конусов, конечно-порожден.

В главе 5 изучаются квазипорядки и порядки в линейном пространстве.

Определение 5.1. Отношением квазипорядка на произвольном множестве называется бинарное отношение $\lesssim$, удовлетворяющее аксиомам рефлексивности и транзитивности.

Определение 5.2. Бинарное отношение называется отношением порядка (или отношением частичного порядка), если оно рефлексивно, транзитивно и антисимметрично[10].

Для векторного пространства представляют интерес квазипорядки, согласованные с линейными операциями. Условия согласованности квазипорядка $\lesssim$ с линейными операциями состоят в следующем:

1. Для любых $x, y, z \in V$ из условия $x \lesssim y$ следует $x + z \lesssim y + z$ (регулярность отношения $\lesssim$ относительно сложения);
2. Для любых $x, y \in V, \lambda \geq 0$ из условия $x \lesssim y$ следует $\lambda x \lesssim \lambda y$ (регулярность отношения $\lesssim$ относительно умножения на неотрицательные скаляры).

Дано полное доказательство следующей теоремы.

Теорема 5.2.

1. Пусть $\lesssim$ отношение квазипорядка на векторном пространств V, согласованное с его линейной структурой. Тогда подмножество

$$K = \{x \in V : x \gtrsim \mathbf{0}\}$$

[9]Схрейвер, А. Теория линейного и целочисленного программирования / А. Схрейвер. М.: Мир, 1991. 360 с.

[10]Розен, В. В. Структура отношений предпочтения / В. В. Розен. Саратов: Изд-во Сар. ун-та, 2007. 51 с.

является выпуклым конусом.

2. Пусть K – некоторый выпуклый конус в векторном пространстве V. Определим на V бинарное отношение по правилу:

$$x \lesssim^{\sigma_K} y \Leftrightarrow (y - x) \in K.$$

Тогда σ_K будет отношением квазипорядка на V, согласованным с его линейной структурой (σ_K называется коническим квазипорядком, наведенным конусом K).

3. Положительный конус квазипорядка σ_K есть K; квазипорядок, наведенный положительным конусом квазипорядка $\lesssim$, совпадает с квазипорядком $\lesssim$.

Квазипорядок называется коническим, если он наведен некоторым выпуклым конусом. Квазипорядками на векторном пространстве, согласованными с его линейной структурой, являются конические квазипорядки и только они; в силу этого обстоятельства изучение квазипорядков векторного пространства сводится к изучению соответствующих им выпуклых конусов.

Конические квазипорядки имеют достаточно простую структуру. Для конического квазипорядка, наведенного конусом K, множество мажорант произвольного элемента $x \in V$ есть $x + K$, то есть оно представляет собой положительный конус K, сдвинутый в точку x.

Определение 5.3. Квазиупорядоченное векторное пространство – это векторное пространство, на котором задано отношение квазипорядка, согласованное с его линейной структурой.

Утверждение 5.6. Конический квазипорядок σ_K, наведенный выпуклым конусом K, является отношением эквивалентности тогда и только тогда, когда K есть линейное подпространство.

Заключение. Основные результаты выпуклого анализа базируются на свойствах отделимости выпуклых множеств, а также связаны с выпуклыми множествами специального вида, к которым, в частности, относятся выпуклые конусы.

Изучение наиболее существенных свойств выпуклых множеств требует введения в линейных пространствах дополнительных структур, важнейшими из которых являются скалярная произведение, норма и топология.