Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.
ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра теоретических основ
компьютерной безопасности и
криптографии

ИНДЕКСЫ И ПЕРИОДЫ ОРИЕНТИРОВАННЫХ ГРАФОВ

АВТОРЕФЕРАТ

НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ

аспиранта 3 курса
направления _02.06.01 _ – Компьютерные и информационные науки
направленности «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ»

Артемова Наталья Александровна

Научный руководитель
к.ф.-м.н., профессор _______________ В.Н. Салий

Зав. кафедрой
д.ф.-м.н., доцент _______________ М. Б. Абросимов

Саратов 2018

I. ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. При изучении дискретных систем, в частности систем преобразования информации, необходимо строить некоторые математические модели, которые будут описывать структуру или функционирование этих систем. Одним из важных и распространенных понятий, имеющих отношение к структуре дискретных систем, является понятие графа. Графы, описывающие структуру связей между отдельными частями системы, используется в большом числе математических моделей.

Графы очень часто используются в приложениях, так как они возникают как модель при изучении множества объектов. Например, графом является структура молекулы (в качестве вершин – атомы, а ребра – это их валентные связи). Блок-схемы алгоритмов тоже представимы в виде ориентированных графов, в которых вершинами служат операторы, а дуги указывают переходы между данными операторами. Так же в виде графов можно изобразить схемы электрических цепей, схемы дорог, группы людей с указанием их психологической совместимости, структуры управления с указанием объектов и их подчиненности друг другу, совокупность предприятий с указанием двухсторонних связей между ними и так далее.

Тематика исследований, связанных с графами, очень обширна. Она включает исследование структуры и свойств различных графов, построение быстрых и/или эффективных алгоритмов для решения разнообразных задач на графах, изучение каких либо определенных классов графов и т. д.

В данной работе будем рассматривать такие важные параметры, связанные с графами, как индексы и периоды. Впервые эти понятия были введены в работе А. Клиффорда и Г. Престона «The algebraic theory of semigroups» в 1964 году.

Под *конечной динамической системой* будем понимать пару (S,δ), где S – конечное непустое множество, элементы этого множества будем называть *состояниями системы*, $\delta : S \rightarrow S$ – отображение множества состояний в себя, называемое *эволюционной функцией* этой системы. Таким образом, каждой конечной динамической системе можно сопоставить карту, представляющую собой граф с множеством вершин S и дугами, проведенными из каждой вершины $s \in S$ в вершину $\delta(s)$. Компоненты связности графа, которые задают динамическую систему, называются *бассейнами* этой системы. Получается, что каждый бассейн представляет собой контур с входящими в него деревьями. Контуры будем называть предельными циклами или *аттракторами*. *Индексом состояния* называют его расстояние до аттрактора, а *периодом* – длину принимающего аттрактора.

Индексы и периоды графов зададим следующим образом.

Рассмотрим последовательность различных степеней матрицы A – $A, A^2, A^3, \dots$. Так как матрица A является двоичной булевой матрицей, то эта последовательность будет конечна. Если A^m – ее последний элемент, то $A^{m+1} = A^l$ для некоторого $l \leq m$. Число $ind(A) = l - 1$ будем называть *индексом матрицы* A, а число $p(A) = ((m+1) - l)$ – *периодом* этой матрицы. Так определенные индекс и период матрицы $A -$ это ее индекс и период в динамической системе двоичных булевых матриц соответствующей размерности с эволюционной функцией $\delta(A^k) = A^{k+1}$. Для графа G с матрицей смежности A положим $ind(G) = ind(A)$ и $p(G) = p(A)$ (индекс и период графа). Под *типом* графа G будем понимать пару $t(G) = \big(ind(G), p(G)\big)$.

Одной из основных проблем теории конечных динамических систем является задача нахождения эволюционных параметров без проведения самой динамики. К числу таких параметров можно отнести индекс состояния и глубину бассейна (наибольший из индексов состояний). Динамические системы рассматриваются в работах таких авторов как V. C. Barbosa (см. [1]), В. Н. Салий (см. [2]), А. В. Жаркова (см. [3-8]).

Минимально возможный тип (0, 1) имеют двоичные булевые матрицы, называемые идемпотентными матрицами. В работе [9] на языке матриц охарактеризованы графы с типом (0, 1). Матрица A называется *идемпотентной*, если $AA = A^2 = A$. Идемпотентным матрицам посвящены работы (см. [10-16]).

Граф называется *примитивным*, если существует целое число $r \geq 1$ такое, что каждая вершина этого графа достижима из любой другой вершины за r шагов (иначе говоря, если в матрице A^r все элементы равны 1).

Таким образом, все примитивные графы имеют минимально возможный период равный 1. Но не все графы, имеющие период 1, являются примитивными. Например, граф $G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ не является примитивным и его период равен 1.

Исследованиям примитивных графов посвящены работы В. М. Фомичева, Я. Э. Авезовой, Р. И. Бар-Гнара (см. [17-21]).

Связный граф с $n \geq 3$ вершинами, полученный из контура C_n путем переориентации некоторых его дуг, называется *многоугольным графом*.

Вершина графа называется *источником*, если в нее не входит ни одна дуга, и *стоком*, если ни одна дуга из нее не исходит. В многоугольном графе количество источников равно количеству стоков. Пусть φ – некоторая биекция между множеством стоков и множеством источников данного многоугольного графа G. Присоединив к графу G все дуги вида $v\varphi(v)$, где v – сток, получим сильно связный граф, который будем называть *φ-графом.*

Турниром называется граф, у которого отношение смежности является антирефлексивным, антисимметричным и полным, т. е. это такой граф, у которого между любыми двумя различными вершинами имеется дуга и притом в одном направлении.

Цель и задачи работы. Изучение таких классов графов как φ-графы и турниры, исследование основных характеристик таких графов, нахождение для данных графов индексов и периодов и вычисление максимальных значений указанных параметров.

Объект и предмет исследования. В данной работе исследуются φ-графы и турниры.

Теоретическая и методологическая основы исследования. При выполнении работы использовались методы исследования теории графов, теории дискретных систем, теории вычислительных экспериментов и теории алгоритмов.

Обоснованность и достоверность результатов исследования. Достоверность и обоснованность научных положений, выводов и практических рекомендаций исследования обеспечивается достаточно полным анализом работ авторов по исследуемой тематике, материалов специализированных журналов, а также подтверждена корректным теоретическим обоснованием приведенных утверждений. Все результаты, представленные в работе, подтверждены компьютерными исследованиями.

Основные выводы исследования подготовлены к публикации и докладывались на научных семинарах.

Научная новизна работы. Приведем перечень научных результатов, содержащихся в работе.

1. Доказана теорема, позволяющая понять структуру φ-графов, имеющих максимальный индекс в своей размерности, и существенно сократить процесс нахождения таких графов.
2. Доказана теорема, позволяющая вычислить период любого φ-графа не прибегая к возведению матрицы смежности в степень.
3. Найдено значение максимального периода n-вершинных φ-графов при четном n и дана оценка максимального периода при нечетном n. Доказана корректность данной оценки.
4. Получены различные статистические данные для φ-графов и турниров с помощью написанных автором программ для ЭВМ. А именно: подсчитаны значения индексов и периодов для все неизоморфных φ-графов (с числом вершин до 13) и турниров (с числом вершин до 11).
5. В приложениях 1-2 приведены каталоги φ-графов с максимальными значениями параметров (индекс и период).

Теоретическая и практическая значимость исследования. Работа носит теоретический характер. Полученные в работе результаты могут быть использованы при построении и анализе различных дискретных систем, моделируемых графами.

Структура работы. Работа состоит из введения, трёх глав, заключения, списка использованных источников, включающего 37 наименований, и двух приложений. Научно-квалификационная работа изложена на 57 листах.

Соответствие паспорту специальности. Научно-квалификационная работа выполнена в соответствии с паспортом специальности 05.13.18 «Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ» и включает оригинальные результаты в этой области. Исследование, представленное в работе, соответствует следующим разделам паспорта специальности: п. 1 (Разработка новых математических методов моделирования объектов и явлений), п. 2 (Развитие качественных и приближенных аналитических методов исследования математических моделей), п. 3 (Реализация эффективных численных методов и алгоритмов в виде комплексов проблемно-ориентированных программ для проведения вычислительного эксперимента), п. 6 (Разработка новых математических методов и алгоритмов проверки адекватности математических моделей объектов на основе данных натурного эксперимента).

II. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ, ВЫНОСИМЫЕ НА ЗАЩИТУ

Содержание работы.

Введение. Во введении обосновывается актуальность темы исследования, формулируется цель работы, приводится описание задач, решаемых для достижения поставленной цели, приводится краткое содержание работы по главам, перечень полученных результатов.

Глава I. В первом параграфе данной главы формулируются необходимые понятия теории графов, используемые в работе. Так, под ориентированным графом (или графом) понимается пара $G = (V, \alpha)$, где V – конечное непустое множество, а $\alpha \subseteq V^2$ – бинарное отношение на множестве V. Элементы множества V называются вершинами графа, а пары, входящие в отношение смежности α, – его дугами.

Во втором параграфе рассматриваются известные результаты исследования индексов и периодов различных классов графов, даются некоторые тривиальные ответы на открытые вопросы для конкретных видов графов. Далее вводятся основные определения, связанные с φ-графами и турнирами.

Глава II. Вторая глава посвящена исследованию φ-графов. В первом параграфе вводится описание данных графов. Приводятся статистические таблицы распределения индексов и периодов φ-графов с числом вершин до 13.

Например, для числа вершин $n = 9$ имеем:

Индекс \ Период	1	2	3	Всего по индексу
1	0	0	0	0
2	0	0	0	0
3	0	0	0	0
4	0	0	1	1
5	0	0	0	0
6	0	0	0	0
7	0	0	0	0
8	0	0	0	0
9	2	0	0	2
10	11	0	0	11
11	1	0	0	1
12	21	0	0	21
13	11	0	0	11
14	22	0	0	22
15	9	0	0	9
16	13	0	0	13
17	4	0	0	4
18	5	0	0	5
19	5	0	0	5
20	4	0	0	4
21	0	0	0	0
22	1	0	0	1
23	0	0	0	0
24	1	0	0	1
25	0	0	0	0
26	1	0	0	1
27	0	0	0	0
28	2	0	0	2
Всего по периоду	113	0	1	Всего: 114

Также составлена таблица, содержащая максимальные значения индексов и периодов в каждой размерности до 17 вершин.

Во втором параграфе исследуются индексы φ-графов, формулируется и доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.

1. Все φ-графы с числом вершин $n > 4$, имеющие максимальный индекс в своей размерности, являются примитивными.

2. Любой φ-граф, имеющий максимальный индекс в своей размерности, получен из многоугольного графа с одним источником и одним стоком.

В третьем параграфе рассмотрены периоды φ-графов, доказана следующая теорема.

Теорема 4.

Период φ-графа равен наибольшему общему делителю длин его контуров.

Теорема 5. Максимальный период φ-графа с числом вершин n не превышает $\lfloor n / 2 \rfloor + 1$. Причем эта оценка достигается при n четном.

Далее вводятся пояснения на примере конкретного графа.

Глава III. В третьей главе рассматриваются турниры. Вводится описание данных графов. Приводятся статистические таблицы распределения индексов и периодов турниров с числом вершин до 11.

В частности, для числа вершин $n = 9$ имеем:

Период / Индекс	1	2	3	Всего по индексу
0	0	0	2	2
1	0	0	6	6
2	62866	0	6	62872
3	104834	0	36	104870
4	19503	0	22	19525
5	3133	0	30	3163
6	707	0	20	727
7	234	0	2	236
8	104	0	12	116
9	18	0	0	18
10	1	0	0	1
Всего по периоду	191400	0	136	Всего: 191536

Также составлена таблица, содержащая максимальные значения индексов и периодов в каждой размерности до 11 вершин.

Сформулированы следующие гипотезы.

Гипотеза 1. Периоды произвольного турнира принимают значения 1 или 3.

Гипотеза 2. Максимальный период любого турнира равен 3.

Гипотеза 3. Турниры с числом вершин $n > 7$ имеют максимальный индекс, равный $n + 1$. Такие графы имеют тип $(n + 1, 1)$ и такой граф единственен в своей размерности.

Гипотеза 4. Турниры размерностей $n > 6$ с максимальным периодом имеют максимальный индекс, равный 8.

Гипотеза 5. Индексы сильно связных турниров имеют оценку $ind \geq 2$.

Заключение. В заключении подводятся итоги и формулируются основные результаты, полученные в работе.

Приложение 1. Содержит каталог φ-графов, имеющих максимальный индекс в своей размерности с числом вершин до 13.

Приложение 2. Содержит каталог φ-графов, имеющих максимальный период в своей размерности с числом вершин до 13.

III. ВЫВОДЫ И РЕКОМЕНДАЦИИ

Для нахождения поставленных целей работы решались следующие задачи. Были рассмотрены и изучены φ-графы и турниры. Построены все неизоморфные φ-графы и турниры с числом вершин до 13. Для все неизоморфных φ-графов (с числом вершин до 13) и турниров (с числом вершин до 11) были вычислены значения индексов и периодов. Полученные данные сведены в статистические таблицы. Вычисленные значения были проанализированы и на их основе выдвинут ряд гипотез о значениях индексов и периодов исследуемых графов и максимальных оценок этих параметров. Сформулированные гипотезы для φ-графов были доказаны. А именно, доказаны теоремы об индексах и периодах, даны оценки максимальных значений периода, приведено обоснование корректности данных оценок. Представлен каталог φ-графов, имеющих максимальные индекс и период в своей размерности с числом вершин до 13.

Дальнейшим направлением работы является доказательство сформулированных гипотез для турниров.

IV. ОСНОВНЫЕ НАУЧНЫЕ ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ НАУЧНО-КВАЛИФИКАЦИОННОЙ РАБОТЫ И АПРОБАЦИЯ РАБОТЫ

Приведем сведения об апробации результатов работы. Результаты исследований представлялись на научных семинарах кафедры теоретических основ компьютерной безопасности и криптографии Саратовского национального исследовательского государственного университета имени Н. Г. Чернышевского (г. Саратов, 2017 год). Результаты, полученные в данной работе также были представлены на 56-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе», Всероссийской молодежной научно-инновационной конференции «Физико-математические науки: актуальные проблемы и их решения» (МФТИ, г. Долгопрудный, 2013 год).

Некоторые результаты опубликованы в работе [32]. Получено положительное решение о публикации статьи в научном журнале «Прикладная дискретная математика», включенном в «Перечень ведущих рецензируемых научных журналов и изданий» ВАК.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Barbosa, V.C. An atlas of edge-reversal dynamics. – London: Chapman&Hall / CRC. 2001. 385 pp.

2. Салий, В.Н. Об одном классе конечных динамических систем // Приложение: Доклады IV Сибирской научной школы-семинара

с международным участием «Проблемы компьютерной безопасности и криптографии» - SIBECRYPT'05, 2005. № 14. С. 23–26.

3. Власова, А.В. Индексы в динамической системе (B, δ) двоичных векторов // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика, 2011. Т. 11. Вып. 3. С. 116–122.

4. Жаркова, А.В. О количестве аттракторов и индексах состояний в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями цикла // Ломоносов–2012: Материалы XIX Международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ, 2012. С. 95–96.

5. Жаркова, А.В. Индексы в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями циклов //Прикладная дискретная математика, 2012. № 2. С. 79–85.

6. Жаркова, А.В. Об индексах в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями циклов // Прикладная дискретная математика. Приложение, 2012. № 5. С. 91–93.

7. Жаркова, А.В. Об индексах состояний в конечных динамических системах двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Компьютерные науки и информационные технологии: Материалы Междунар. науч. конф. – Саратов: Издат. центр «Наука», 2016. С. 163–166.

8. Жаркова, А.В. Индексы состояний в динамической системе двоичных векторов, ассоциированных с ориентациями пальм // Изв. Сарат. Ун-та. Нов. сер. Сер. Математика Механика. Информатика, 2016. Т. 16, вып. 4. С. 475–484.

9. Chaudhuri, R., Mukherdjea, A. Idempotent Boolean matrices // Semigroup Forum. 1980. Vol. 21. P. 273–282.

10. Rosenblatt, D. On the graphs of finite idempotent Boolean relation matrices // J. Res. Nat. Bureau of Standards. 1963. Vol. 67B. P. 249–256.

11. Schein, B. A construction for idempotent binary relations // Proc.Japan Acad. 1970. Vol. 46. P. 246–247.

12. Rao, P.S.S.N.V.P., Rao, K.P.S.B. On generalized inverses of Boolean matrices // Linear Algebra Appl. 1975. Vol. 11. P. 135–153.

13. Kim, K.H. Boolean matrix theory and applications. – New York: Marcel Dekker. 1982. (Pure Appl. Math., Vol. 70).

14. Gregory, D., Kirkland, S., Pullman, N. Power convergent Boolean matrices // Linear Algebra Appl. 1993. Vol. 179. P. 105–117.

15. Flor, P. On groups of nonnegative matrices // Compositio Math. 1969. Vol. 21. P. 376–382.

16. Beasley, L.B., Guterman, A.E., Kang, K.-T., Song, S.-Z. Idempotent Boolean matrices and majorization // Journal of Mathematical Sciences. 2008. Vol. 152, № 4. P. 456–474.

17. Фомичев, В.М. О минимальных примитивных матрицах // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 7–9.

18. Фомичев, В.М. Свойства минимальных примитивных орграфов // Прикладная дискретная математика. 2015. № 2(28). С. 86–96.

19. Фомичев, В.М. Новая универсальная оценка экспонентов графов // Прикладная дискретная математика. 2016. № 3. С. 78–84.

20. Авезова, Я.Э., Фомичев, В.М. Условия примитивности и оценки экспонентов множеств ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2017. № 35. С. 89–101.

21. Бар-Гнар, Р.И., Фомичев, В.М. О минимальных примитивных матрицах // Прикладная дискретная математика. Приложение. 2014. № 7. С. 7–9.

22. Богомолов, А.М. Алгебраические основы теории дискретных систем / А. М. Богомолов, В.Н. Салий. М.: Наука, 1997. 386 с.

23. Зыков, А.А. Основы теории графов / А.А. Зыков. М.: Наука, 1987. 380 с.

24. Харари, Ф. Теория графов / Ф. Харари ; перевод с англ. В.П. Козырева; под ред. Г.П. Гаврилова. М.: Мир, 1987. 300 с.

25. Богомолов, А.М. Аналитические методы в задачах контроля и анализа дискретных устройств / А.М. Богомолов, Д.В. Сперанский. Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 1986. 238 с.

26. Грин, Д. Математические методы анализаа лгоритмов / Д. Грин, Д. Кнут. М.: Мир, 1987. 120 с.

27. Салий, В.Н. Отказоустойчивость и оптимизация дискретных систем с заданными индексом и периодом // Вестник Томского государственного ун-та. Приложение. 2006. № 17. С. 222–225.

28. Максимов, А.А., Салий, В.Н. Индексы и периоды нечетких матриц и графов // Теоретические проблемы информатики и ее приложения. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. 2006. Вып. 7. С. 87–95.

29. Максимов, А.А. Об индексе и периоде нечеткой матрицы. Саратов. гос. ун-т. Саратов. 2005. 11 с. Деп. в ВИНИТИ 20.01.05., № 78-В, 2005.

30. Мовчан, Н.П. Турниры и циркулярные графы: индексы, периоды и примитивность // Инновационные технологии XXI века в управлении, информатике и образовании: I Всероссийская научно-практическая конференция студентов, аспирантов и молодых ученых. Нальчик: Изд-во М. и В. Котляровых. 2008. С. 161–165.

31. Miller, W. The maximum order of an element of a finite symmetric group // Amer. Math. Monthly. 1987. v. 94. P. 497–506.

32. Артемова, Н.А. Индексы и периоды φ-графов // Труды 56-й научной конференции МФТИ: Всероссийской научной конференции «Актуальные проблемы фундаментальных и прикладных наук в современном информационном обществе», Всероссийской молодежной научно-инновационной конференции «Физико-математические науки: актуальные проблемы и их решения». М.: МФТИ. 2013. С.26–27.

33. Поплавский, В.Б. Обертоны осцилляторных булевых матриц // Известия Саратовского университета. Нов серия. Серия Математика. Механика. Информатика. 2006. Т. 6, вып. 1/2. С. 29–37.

34. Салий, В.Н. Минимальные примитивные расширения ориентированных графов // Прикладная дискретная математика. 2008. Т. 1. № 1. С. 116–119.

35. http://pallini.di.uniroma1.it/ – Nauty and Traces: Graph Canonical Labeling and Automorphism Group Computation. 2016.

36. McKay, B.D. Nauty User's Guide (version 2.5) [Электронный ресурс] / B. D. McKay. Tech. Rpt., Dept. Computer Science [Электронный ресурс] // Austral. Nat. Univ., 1990. 94 P. URL: http://cs.anu.edu.au/~bdm/nauty/nug26.pdf (дата обращения: 03.05.2018).

37. McKay, B.D., Piperno, A. Practical graph isomorphism // J. Symbolic Computation. 2013. V. 2. No. 60. P. 94–112.