Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

# Оценка константы скейлинга перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в слабодиссипативных системах

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 411 группы
направления 03.03.01 Прикладные математика и физика
факультета нелинейных процессов
Фисенко Ольги Андреевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент ..... А.В. Савин

Зав. кафедрой нелинейной физики
к.ф.-м.н., доцент ..... Е.Н. Бегинин

Саратов 2018 г.

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

# Оценка константы скейлинга перехода к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода в слабодиссипативных системах

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 411 группы
направления 03.03.01 Прикладные математика и физика
факультета нелинейных процессов
Фисенко Ольги Андреевны

Научный руководитель
к.ф.-м.н., доцент _____ А.В. Савин

Зав. кафедрой нелинейной физики
к.ф.-м.н., доцент _____ Е.Н. Бегинин

Саратов 2018 г.

## Введение

Движение в пространстве параметров вдоль некоторого направления позволяет наблюдать последовательность бифуркаций, в результате которой может формироваться хаотический аттрактор. Такие типичные бифуркационные последовательности объединяются понятием сценариев перехода к хаосу. Один из сценария перехода к хаосу - каскад бифуркаций удвоения периода [1,2]. Сценарий перехода к хаосу через каскад удвоений периода очень часто наблюдается в динамических системах как с непрерывным, так и с дискретным временем и является одним из основных механизмов развития хаоса.

Модельной системой, демонстрирующей такой сценарий, является логистическое отображение, оно является необратимым и поэтому не может служить моделью реальной системы. Более реалистичной системой является отображение Эно [1].

В настоящей работе используя отображение Эно, мы найдем точки удвоения периодов и рассмотрим, как себя ведет график зависимости констант скейлинга $\delta(n)$ при разных параметрах диссипации. При условии, что параметр диссипации много меньше 1.

В первой главе моей работы рассказывается основные понятия о диссипативной и консервативной системе. Как происходят удвоения периода и переход к хаосу в логистическом отображение

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 \tag{1}$$

Так же описывается универсальная константа Фейгенбаума и как происходит скейлинг.

Во второй главе рассматривается отображение Эно

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - b y_n \tag{2}$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

которое широко используется в нелинейной динамике. В этом отображение аналитически можно найти 2-цикл и неподвижную точку. По теореме Виета следует

$$x^2 - \frac{1+b}{\lambda} x + \frac{(1+b)^2 - \lambda}{\lambda^2} \tag{3}$$

Из этого уравнения легко находятся элементы цикла:

$$x_{1,2} = \frac{(1+b) \pm \sqrt{\lambda - 3(1+b)^2/4}}{2\lambda} \tag{4}$$

Нетрудно видеть, в частности, что корни уравнения существуют только при условии $\lambda > \frac{3(1+b)^2}{4}$, откуда следует, что 2 цикл рождается при условии $\lambda = \frac{3(1+b)^2}{4}$.

В третьей главе используя отображение Эно мы сроим бифуркационные деревья при разных параметрах диссипации b, в интервале от 0.1 до 0.9.

На полученных графиков можно видеть рождение устойчивого 2-цикла из неподвижной точки, каскад бифуркаций удвоения периода и переход к

хаосу. Но по нашим рисункам очень трудно определить точные значения удвоения периода, для этого мы проведем численный анализ нашего отображения и получим значения.

В последней главе мы проводим численный поиск удвоения периода в отображение Эно. Для нахождения точки удвоения периода мы сначала найдем неподвижные точки с помощью метода Ньютона для системы нелинейных уравнений.

В качестве системы нелинейных уравнений мы будем использовать отображение Эно следующего вида:

$$x_{n+1} = 1 - \lambda x_n^2 - b y_n \tag{5}$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

Пусть $x_{n+1} = F_1(x, y)$ , а $y_{n+1} = F_2(x, y)$. Выберем нулевое приближение $X^0 = (x^0, y^0)$, принадлежащее области приближенной к точному решению. Построим систему линейных алгебраических уравнений, которая будет иметь вид

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}(x - x^0) + \frac{\partial F_1}{\partial x}(y - y^0) = -F_1(x^0, y^0) \tag{6}$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x - x^0) + \frac{\partial F_2}{\partial x}(y - y^0) = -F_2(x^0, y^0)$$

Обозначим

$$x - x^0 = \Delta x^0 \tag{7}$$

$$y - y^0 = \Delta y^0$$

Решим систему (6) относительно неизвестных $\Delta x^0, \Delta y^0$, методом Крамера. Запишем формулы Крамера в виде

$$\Delta x^0 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \tag{8}$$

$$\Delta y^0 = \frac{\Delta_2}{\Delta}$$

где основной определитель системы (15)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x^0,y^0)}{\partial x} & \frac{\partial F_1(x^0,y^0)}{\partial y} \\ \frac{\partial F_2(x^0,y^0)}{\partial x} & \frac{\partial F_2(x^0,y^0)}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{9}$$

а вспомогательные определители системы (6) имеют вид

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -F_1(x^0,y^0) & \frac{\partial F_1(x^0,y^0)}{\partial y} \\ -F_2(x^0,y^0) & \frac{\partial F_2(x^0,y^0)}{\partial y} \end{vmatrix} \tag{10}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1(x^0,y^0)}{\partial x} & -F_1(x^0,y^0) \\ \frac{\partial F_2(x^0,y^0)}{\partial x} & -F_2(x^0,y^0) \end{vmatrix} \tag{11}$$

Найденные значения $\Delta x^0, \Delta y^0$ подставим в уравнения (7) и найдем компоненты $x = x^0 + \Delta x^0$, $y = y^0 + \Delta y^0$[9].

Будем решать уравнения (6)-(11) до тех пор пока значения переменных $x$ и $x^0$ не станут отличаться на маленькую величину. Так мы находим неподвижную точку.

Найдя не подвижную точку, мы можем найти точку удвоения периода, так же с помощью метода Ньютона.

Для этого найдем след и определитель отображения Эно.

Функция f(λ)=1+S+J=0.

$$\lambda_{n+1} = \lambda_n - \frac{f(\lambda_n)}{f\prime(\lambda_n)} \tag{12}$$

Где $f'(\lambda_n) = \frac{f(\lambda_n+\Delta\lambda)-f(\lambda_n-\Delta\lambda)}{2*\Delta\lambda}$

*Таблица 1*

| b | $\lambda_2$ | $\lambda_4$ | $\lambda_8$ | $\lambda_{16}$ | $\lambda_{32}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.1 | 1.112500 | 1.216125 | 1.238319 | 1.244506 | 1.245831 |
| 0.2 | 1.000000 | 1.116121 | 1.141012 | 1.146346 | 1.147489 |
| 0.3 | 0.912500 | 1.025855 | 1.050131 | 1.055332 | |
| 0.4 | 0.850000 | 0.960426 | 0.983896 | 0.988892 | |
| 0.5 | 0.812500 | 0.920749 | 0.943414 | 0.948219 | |
| 0.6 | 0.800000 | 0.907699 | 0.927512 | 0.931699 | |
| 0.7 | 0.805224 | 0.922022 | 0.940125 | 0.943981 | |
| 0.8 | 0.850000 | 0.964286 | 0.981000 | 0.983899 | |
| 0.9 | 0.912499 | 1.035001 | 1.052099 | | |

Вычислив параметр удвоения периода λ, мы можем оценить константу скейлинга δ(n), по формуле:

$$\delta_n = \frac{\lambda_n-\lambda_{n-1}}{\lambda_{n+1}-\lambda_n} \quad (13)$$

*Таблица 2*

| b | $\delta_4$ | $\delta_8$ | $\delta_{16}$ |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 4.66905 | 4.66699 | 4.66908 |
| 0.2 | 4.66518 | 4.66648 | 4.6667 |
| 0.3 | 4.66943 | 4.66756 | |
| 0.4 | 4.70499 | 4.69776 | |
| 0.5 | 4.77604 | 4.71696 | |
| 0.6 | 5.43577 | 4.73203 | |
| 0.7 | 6.45186 | 4.6476 | |
| 0.8 | 6.83774 | 5.76544 | |
| 0.9 | 7.1647 | | |

Из полученных результатов мы видим, что константа скейлинга стремится к 4.669. При маленьких параметрах b можно увидеть, что не зависимо какое период цикла, то константа скейлинга все равно находится приблизительно одинаково. Так же видно, что с ростом параметра b, константа скейлинга возрастает и система переходит из диссипативной в консервативную.

## Заключение

В ходе работы мы разработали программу, которая находила точки удвоения периода в слабо диссипативных системах. Полученные результаты смогли показать, что чем больше период цикла, тем больше значение параметра удвоения периода становится больше. Оценивая константу скейлинга в точке удвоения периода, мы видим, что константа скейлинга стремится к константе Фейгенбаума, а значит при больших параметрах диссипации мы увидим, что система переходит из консервативной в диссипативную. При маленьких параметрах b можно увидеть, что не зависимо какое период цикла константа скейлинга все равно находится приблизительно равна $\delta$=4,669, так как параметр диссипации близок к 0, а значит система диссипативна.

**Список литературы**

1) Кузнецов С. П. «Динамический хаос (курс лекций)». Москва: Физматлит, 2001.

2) Кузнецов А.П. «Динамические системы и бифуркации». Саратов: Наука, 2015.

3) Кузнецов А.П., Савин А.В., Тюрюкина Л.В. «Введение в физику нелинейных отображений». Саратов: Научная книга, 2010.

4) Андронов А. А и др. «Теория бифуркаций динамических систем на плоскости». Москва: Наука, 1967.

5) Е. В. Никульчев. «Идентификация динамических систем на основе симметрий реконструированных аттракторов». Москва: Мир. 2010.

6) Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В. «Бифуркации отображений». Саратов: Наука, 2012.

7) П. Берже, И. Помо, К. Видаль «Порядок в хаосе». Москва: Мир. 1991.

8) Henon M.A «two-dimensional mapping with a strange attractor» Commun. Math. Phys 1976

9) Волков Е. А. Численные методы. — М.: Физматлит, 2003

10) Шашихин В.Н. «Хаос и нелинейная динамика, регулярная и хаотическая динамика». Санкт-Петербург: Издательство Политехнического университета, 2010