

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Численные иллюстрации диффузии в фазовом пространстве
консервативного стандартного отображения**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 411 группы

направления 03.03.01 Прикладные математика и физика

Факультет нелинейных процессов

Корниенковой Марины Владимировны

Научный руководитель

доцент, к.ф. – м.н.



Савин А.В.

Заведующий кафедрой

доцент, к.ф. – м.н.



Бегинин Е.Н.

Саратов 2018 год

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Численные иллюстрации диффузии в фазовом пространстве
консервативного стандартного отображения**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 411 группы

направления 03.03.01 Прикладные математика и физика

Факультет нелинейных процессов

Корниенковой Марины Владимировны

Научный руководитель

доцент, к.ф. – м.н.

Савин А.В.

Заведующий кафедрой

доцент, к.ф. – м.н.

Бегинин Е.Н.

Саратов 2018 год

Содержание

Введение	3
1. Диффузия в фазовом пространстве	4
2. Пример системы стандартного отображения	5
3. Иллюстрации устройства фазового пространства	6
4. Численные иллюстрации диффузии	9
Заключение	11
Список использованной литературы	12

Введение

Динамический хаос – явление, при котором поведение нелинейной системы выглядит случайным, несмотря на то, что оно определяется детерминистическими законами.

Сосуществование участков устойчивой динамики и хаоса в фазовом пространстве – одно из самых поразительных и знаменательных открытий. Оно делает возможным анализ возникновения и появления минимальных участков хаоса.

Причиной появления хаоса является неустойчивость по отношению к начальным условиям и параметрам: малое изменение начального условия со временем приводит к сколь угодно большим изменениям динамики системы [1].

В реальных системах из-за случайных внешних возмущений при любых начальных условиях имеет место обычная диффузия. Она приводит систему к ближайшему стохастическому слою. Диффузия вдоль стохастических слоев может быть связана не только с внутренней динамикой системы, но и с внешним шумом, эффект которого значительно усиливается на резонансах. [2].

Целью данной работы является изучение фазового пространства двумерного отображения на примере системы «прыгающий шарик». Исследуем структуру фазового отображения, сохраняющего площадь в окрестности островков устойчивости, а также диффузию в фазовом пространстве консервативной системы.

1. Диффузия в фазовом пространстве

Одним из основных понятий при изучении нелинейных систем является понятие нелинейного резонанса, который играет важную роль при возникновении стохастичности в гамильтоновых системах. Сложность динамики системы при взаимодействии нелинейных резонансов может привести к различным эффектам.

Примером диффузии вдоль слоя перекрывающихся резонансов является модуляционная диффузия. В этом случае медленные колебания одной из основных частот приводят к появлению «боковых» резонансов, которые могут перекрываться в определенной области параметров. Эта диффузия не универсальна, то есть существует определенная величина возмущения, ниже которой боковые резонансы не перекрываются.

Диффузия вдоль стохастических слоев может быть связана не только с внутренней динамикой системы, но и с внешним шумом, эффект которого значительно усиливается на резонансах.

За достаточно большое время резонансы могут оказать сильное влияние на диффузию даже под действием слабого шума. Так, например, если в системе есть большие (неперекрывающиеся) резонансы, то малое внешнее возмущение может перевести траекторию с нерезонансной инвариантной кривой на резонансную. Средняя скорость диффузии близка к медленной между резонансами, если только они не занимают значительную часть фазового пространства. Это связано с непрерывностью диффузионного потока, так что градиент плотности больше там, где локальная скорость диффузии меньше, и обратно [3].

2.Пример системы стандартного отображения

Одним из примеров стандартного отображения является система «прыгающий шарик» или «гравитационная машина» Заславского.

Рассмотрим задачу о шарике, падающем на горизонтальный стол. Решение состоит в том, чтобы заставить поверхность стола вибрировать, например, по гармоническому закону (Рис.1).

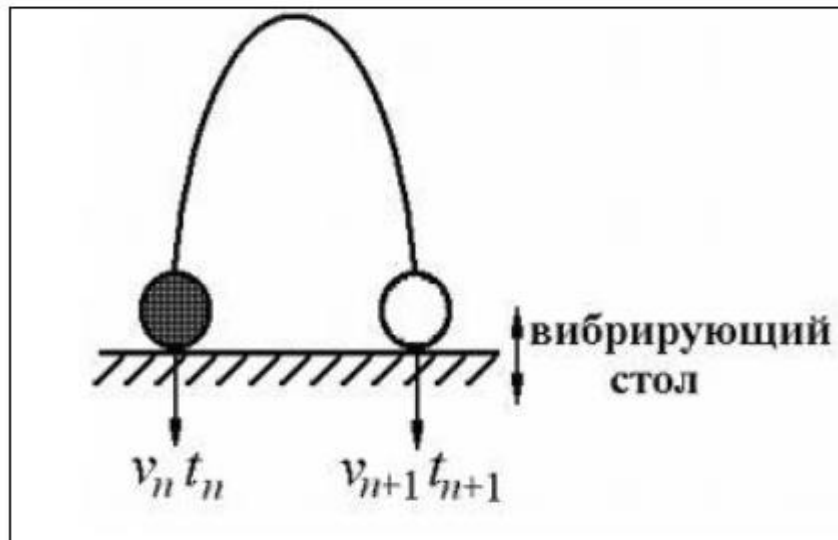


Рис.1 Модель «прыгающего шарика».

Для такой системы довольно просто построить дискретное отображение. Дискретными переменными будут скорость шарика перед n -ым ударом v_n и момент его удара о стол t_n .

$$V_{n+1} = (1 - \varepsilon)V_n + k \sin \varphi_n \quad (1)$$

$$\varphi_{n+1} = (\varphi_n + V_{n+1}) \bmod 2\pi$$

где $k = \frac{2(2-\varepsilon)V_0\omega}{g}$ – амплитуда колебаний стола.

В безразмерном виде это отображение характеризуется величиной диссипации ε и безразмерно амплитудой колебаний стола k [4].

Далее для анализа полученного отображения перейдем к иллюстрации структуры фазового пространства.

3. Иллюстрации устройства фазового пространства

Для начала, мы построили фазовые портреты при разных начальных условиях, меняя значение параметра амплитуды колебаний k . Рассмотрим фазовый портрет и последовательное увеличение островков устойчивости при $k < 1$.

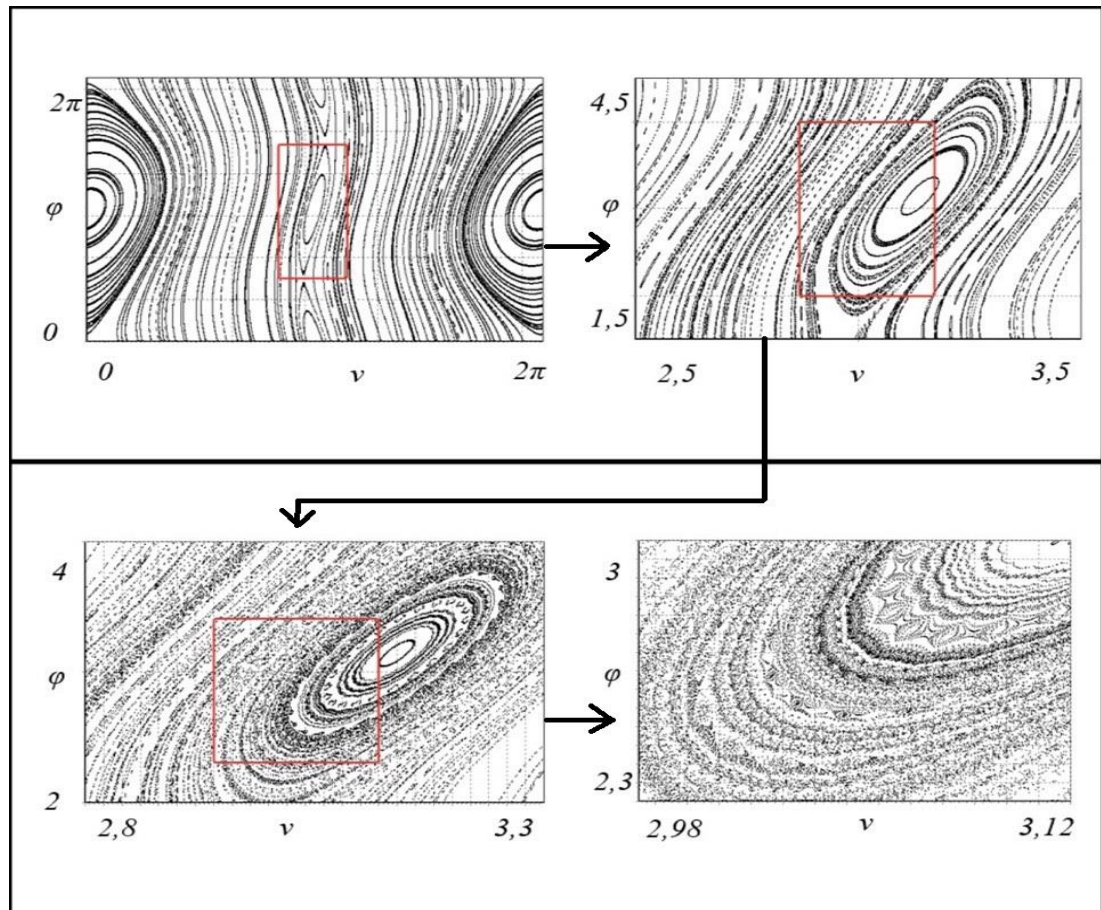


Рис.2 фазовые портреты отображения (1) и последовательные увеличения области островков устойчивости при значении параметра амплитуды $k=0.3$; прямоугольником обозначена область увеличения.

На рис.2 заметно, что, на фазовых портретах наблюдаются вложенные островки устойчивости, а также при увеличении параметра амплитуды увеличивается количество островков устойчивости.

Далее рассмотрим увеличение островков устойчивости при $k > 1$.

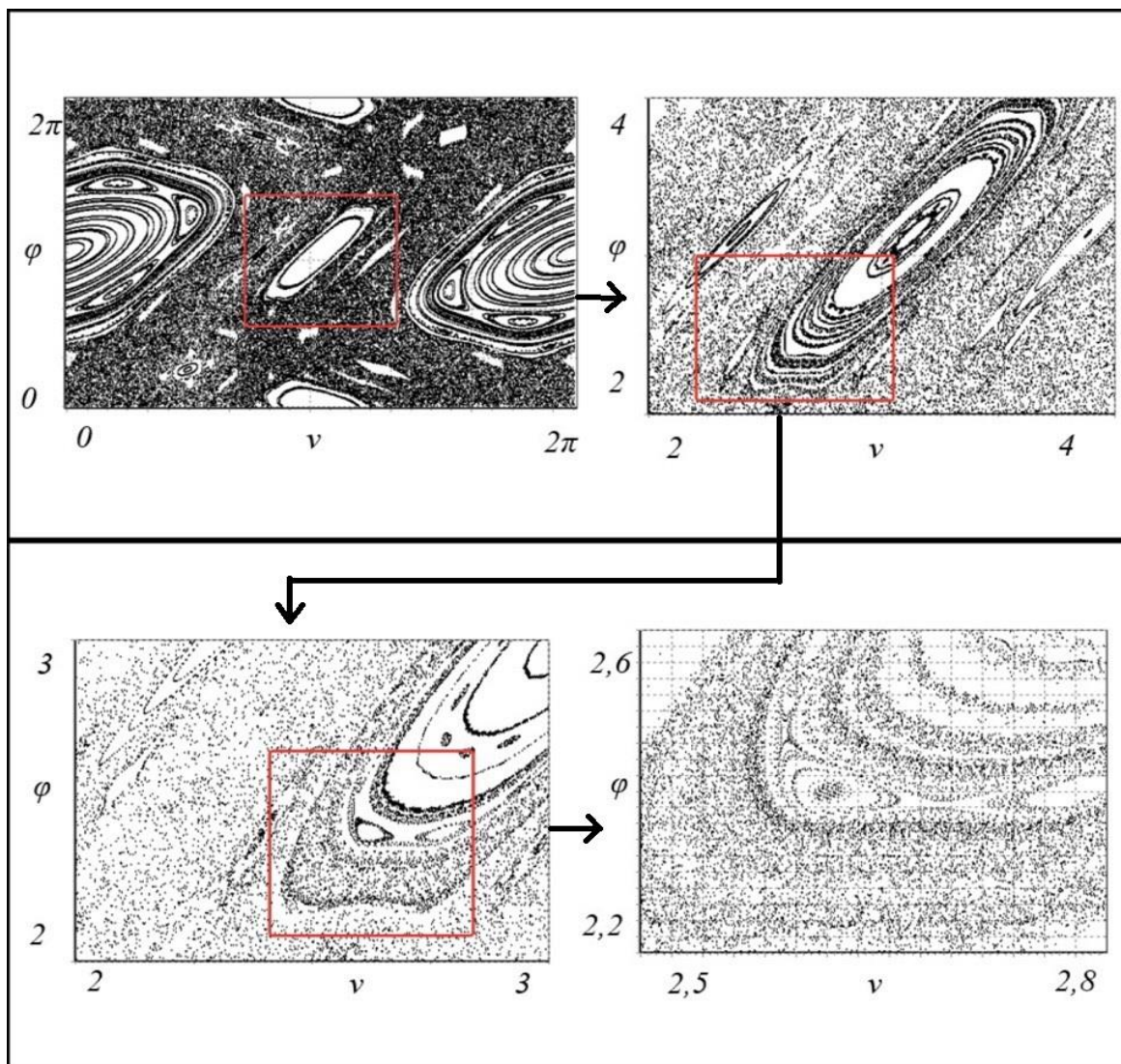


Рис.3 фазовый портрет отображения (1) и последовательные увеличения островков устойчивости при значении параметра амплитуды $k=1.3$; прямоугольником обозначена область увеличения.

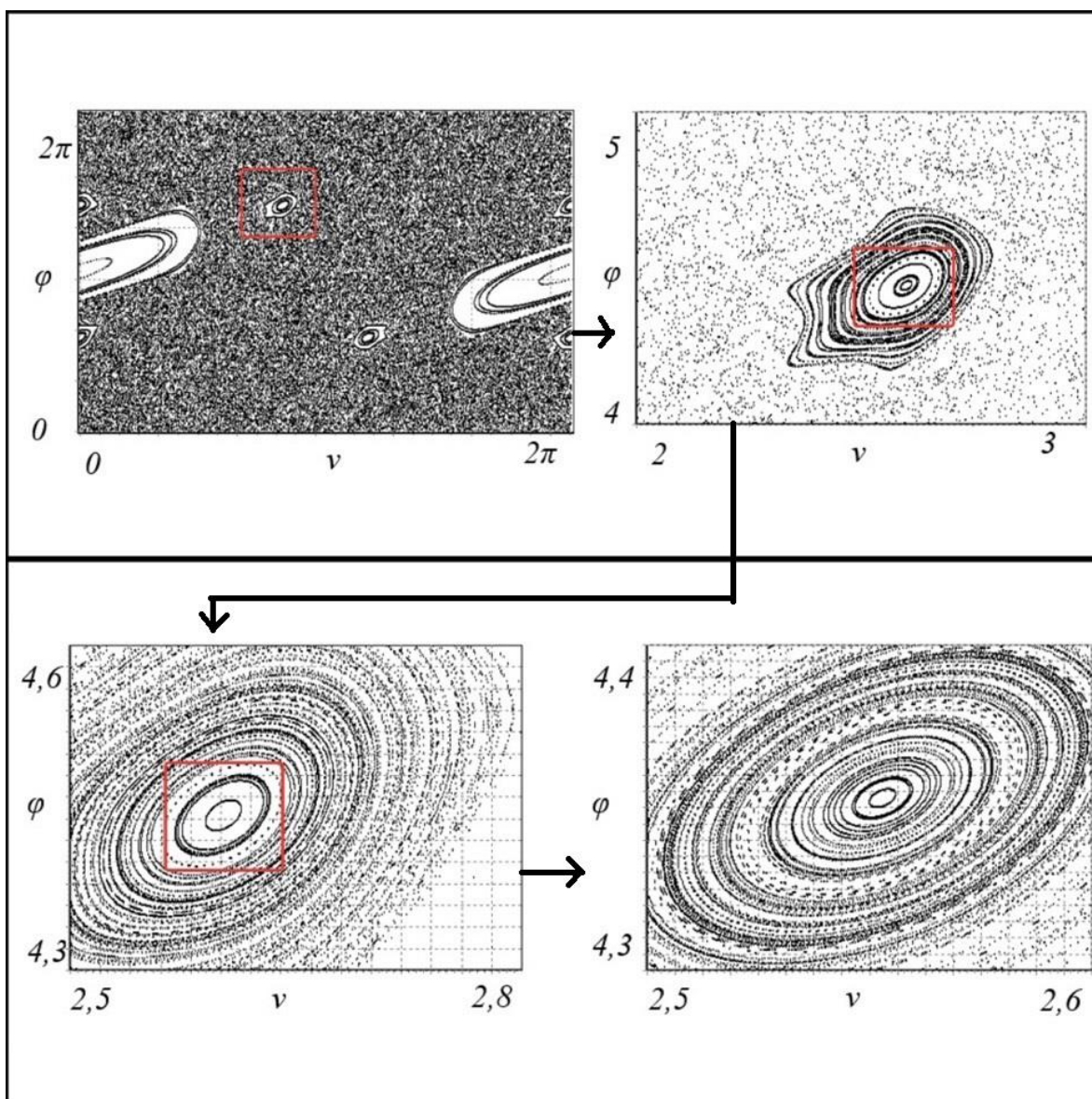


Рис.4 фазовый портрет отображения (1) и последовательные увеличения островков устойчивости при значении параметра амплитуды $k=2.7$; прямоугольником обозначена область увеличения.

На рис.3 и рис.4 становится видно, что при изменении управляющего параметра происходит видоизменение островков, а также видимый размер островков уменьшается и в «стохастическом море» видны только самые крупные из них. Распределение точек произвольной траектории в стохастическом море выглядит довольно равномерным, если мы исключим островки.

4. Численные иллюстрации диффузии

Далее мы исследовали диффузию в фазовом пространстве при фиксированном значении управляющего параметра k .

Вероятность попадания траектории в область, содержащую островок и его граничный слой, пропорциональна относительной плотности этой области. Количество времени, которое траектория может провести в граничном слое островка, зависит от глубины проникновения в этот слой, и это время может быть чрезвычайно долгим.

Для начала мы в программе задали множество точек в малой области фазового пространства, затем запускается итерационный процесс до тех пор, пока, импульс не увеличится на единицу, то есть сколько времени точки проведут в окрестности при различных начальных условиях. После чего рассчитывали среднее значение количества итераций для каждого начального условия. Из полученных данных мы нашли дисперсию, как средний квадрат отклонений.

При $k=1.5$

x	y	$\langle n \rangle$	D
0.1	1.5	5402	9168.5
0.6	0.3	639	787.177
2	3.6	2222	4120,902
3.3	3.1	149769	399953.15
4	3.1	934	308,7299
6	6	913	925.856

При $k=2.3$

x	y	$\langle n \rangle$	D
0	1	72	43,12463
1	3	67	55,76588
2	6	48	36,16336
3	4	48	40,59611
5	1	320439	395771,1

При $k=2.7$

x	y	$\langle n \rangle$	D
1	3	69	40,424
2.2	4.5	33	20,715
4	2	270	91,562
5	5	62	13,13858
6	2	133	46,54759

По полученным результатам видно, что в зависимости от положения точки в фазовом пространстве, движение точки может происходить с существенно с разной скоростью. Характерное время захватывания иногда называют «клейкостью». Она связана с существованием очень сложной топологии фазового пространства вблизи границы островка. Уровень клейкости зависит от внешнего параметра, такого как k .

Заключение

В данной работе мы исследовали стандартное отображение на примере системы «прыгающий шарик».

С помощью программы, были построены фазовые портреты при фиксированном значении диссипации, но при различных значениях нелинейного параметра. По получившимся последовательным увеличениям островков устойчивости можно видеть, что при увеличении значения параметра амплитуды, размер островков видоизменяется, а также увеличивается их количество. Множество островков обладает сложной топологией, которая может изменяться с помощью управляющего параметра.

Продемонстрировано, что скорость диффузии может значительно отличаться в различных областях фазового пространства.

Список использованной литературы

1. Кузнецов С.П., Динамический хаос – М: Физмалит, 2001.
2. Тихонов В. И. Миронов М. А. Марковские процессы. – М: Советское радио, 1977.
3. Лихтенберг А, Либерман М. Регулярная и стохастическая динамика. – М: Мир, 1984.
4. Кузнецов А.П., Савин А.В., Седова Ю.В., Тюрюкина Л.В., Введение в физику нелинейных отображений – Саратов: Научная книга, 2010.