ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной физики и метаматериалов
на базе Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН

ХАОТИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР С ИНВАРИАНТНЫМ ЗАКОНОМ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕЙБУЛЛА

АВТОРЕФЕРАТ ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ
(БАКАЛАВРСКОЙ) РАБОТЫ
студента 4 курса 432 группы
направления 03.03.02 «Физика» физического факультета
Абдряшитова Эльнура Марсельевича

Научный руководитель –
заведующий кафедрой
компьютерной физики и метаматериалов
д.ф.-м.н. профессор ______________________________ В.М. Аникин

Саратов
2018

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуализация проблемы. При проектировании и эксплуатации радиоэлектронной аппаратуры, включая вычислительную технику, важно знать надежностные характеристики изделий, дающие представление о продолжительности их безотказной работы и вероятности отказа. Момент отказа является случайной величиной, поэтому рассмотрение проблемы надежности (безотказной работы) ведется в рамках вероятностных представлений; соответственно, математическим аппаратом предсказания и компьютерного моделирования процесса рабочего функционирования изделий и их отказов являются такие дисциплины, как теория вероятностей, математическая статистика, теория случайных процессов, теория массового обслуживания.

При прогнозировании надежности функционирования изделия и отдельных его компонент исходными параметрами служат данные о проведенных испытаниях с учетом физики и механизмов отказов (например, усталостного разрушения или деградации от физико-химической коррозии) и структуры изделия. В качестве вероятностных распределений, с помощью которых решается проблема моделирования безотказной работы изделий, используется ряд специальных вероятностных распределений:

экспоненциальное с одним параметром, имеющим смысл интенсивности отказов;

распределение Вейбулла, являющееся двухпараметрическим (с параметрами формы и масштаба графика плотности распределения) и позволяющим (в отличие от экспоненциального распределения) подбором значений параметров корректнее соотнести опытные и расчетные данные;

лог-нормальное распределение (двухпараметрическое, логарифм величины распределен по нормальному закону).

При машинном (имитационном) моделирования процесса отказов используются названные вероятностные распределения. Машинный датчик дает равномерно распределенные величины на интервале (0,1). Если функция, определяющая закон распределения, обратима, то по методу обратных функции можно получить представление значение требуемой величины. Применение метода обратных функций возможно для получения датчиков случайных величин с экспоненциальным распределением и распределением Вейбулла. Настоящая работа посвящена моделированию случайной величины, распределенной по закону Вейбулла.

Цель выпускной квалификационной работы* (*ВКР*)** – разработка хаотических датчиков случайной величины, имеющей распределение Вейбулла, т.е. построение хаотических отображений, обладающих инвариантным распределением в форме закона Вейбулла. Отличительной особенностью этих отображений является возможность получения выборок значений вейбулловской случайной величины без обращения к датчикам псевдослучайных машинных чисел. В этом состоит ***новизна рассматриваемого подхода к моделированию надежностных задач. Соответственно сформулированные алгоритмы составляют ***предмет защиты*** ВКР.

Достижение сформулированной цели достигается в процессе решения следующих ***задач***:

построение хаотических отображений, сопряженных с базовыми хаотическими отображениями, имеющими равномерное инвариантное распределение (построение сопрягающей функции, нахождение подобластей определения нового отображения, точек разрыва итеративных функций, запись аналитического выражения для итеративной функции);

Практическая направленность работы. Построение хаотического генератора (певдо)случайных величин с распределением Вейбулла позволяет моделировать время жизни различных устройств. Кроме того, наличие параметров в этом отображении заставляет взглянуть на него и с точки зрения построения схем хаотического кодирования – наличие параметров усложняет задачу криптоанализа.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В трех главах работы решены следующие задачи:

отработка метода обратных функций построения хаотических отображений с заданными вероятностными характеристиками и сопряженных некоторому базовому отображению с известным инвариантным распределением, на примере построения датчиков случайных чисел с экспоненциальным распределением (глава 1);

практическая реализация построения сопряженного отображения с инвариантной плотностью в форе вейбулловского закона с выбором сопрягающей функции и получения вида двух отображений на базе кусочно-линейных с равномерной инвариантной плотностью отображений (сдвига Бернулли и пирамидального отображения) (глава 2);

нахождение решения спектральной задачи (собственных функции и собственных чисел) для оператора Перрона-Фробениуса двух видов сопряженного отображения с вейбулловским инвариантным распределением с заданной инвариантной плотностью (глава 3).

Случайная величина X распределена по закону Вейбулла, если ее плотность распределения представляется в виде:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{k}{\lambda}\left(\dfrac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (1)$$

Соответствующий закон распределения имеет вид:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k}, \; x \ge 0. \qquad (2)$$

Здесь k – параметр формы кривой распределения; λ – параметр масштаба кривой распределения.

Интенсивность отказов $\lambda(x)$ определяется соотношением:

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{1 - F(x)}.$$

На практике выявлены три периода поведения интенсивности отказа (в статистическом смысле). На первом из них, называемом «периодом наработки» («обкатки»), функция $\lambda(x)$ имеет наиболее высокие значения и явную тенденцию к монотонному убыванию. Это объясняется естественным наличием экземпляров продукции с дефектами – явными и (или) скрытыми, которые и обусловливают выход изделия из строя. Как правило, с периодом наработки соотносится гарантийный срок на изделие. Затем, когда наступает период нормальной эксплуатации, величина $\lambda(x)$ уменьшается и ее можно считать постоянной. Природа отказов в этот период носит, как правило, внезапный характер («человеческий фактор», аварии и т.д.). Наконец, третий период эксплуатации изделия – это период старения и износа, необратимых физико-механических и химических изменений материалов, приводящих к прогрессирующему ухудшению качества изделия.

Вид распределения Вейбулла следует из предположения степенной зависимости интенсивности отказов $\lambda(x)$ от времени, так что интенсивность отказов оказывается пропорциональной времени. Вариация $\lambda(x)$ при моделировании определяется значением параметра k:

первому периоду соответствует значение $k < 1$ (происходит уменьшение интенсивности отказов);

второму периоду отвечает значение $k = 1$ (постоянство интенсивности отказов);

третьему периоду отвечает значение $k > 1$ (увеличение интенсивности отказов).

На рисунках 1 и 2 представлены графики плотности распределения и интегрального закона распределения Вейбулла. С ростом параметра k распределение стремится к нормальному закону.

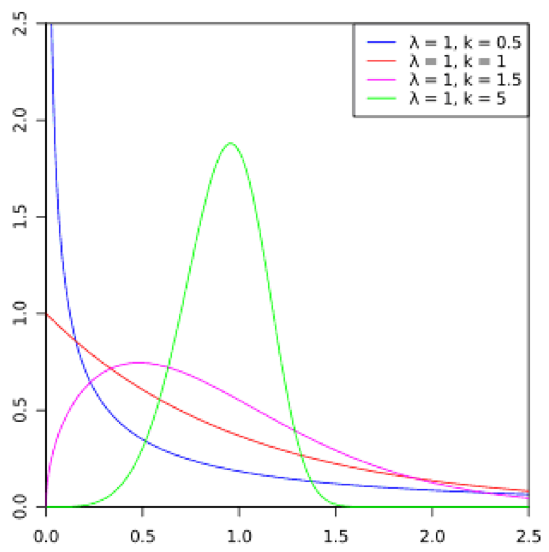

Рисунок 1. Дифференциальный закон распределения Вейбулла ($\lambda = 1$): $1 - k = 0{,}5$; $2 - k = 1$; $3 - k = 1{,}5$; $4 - k = 5$

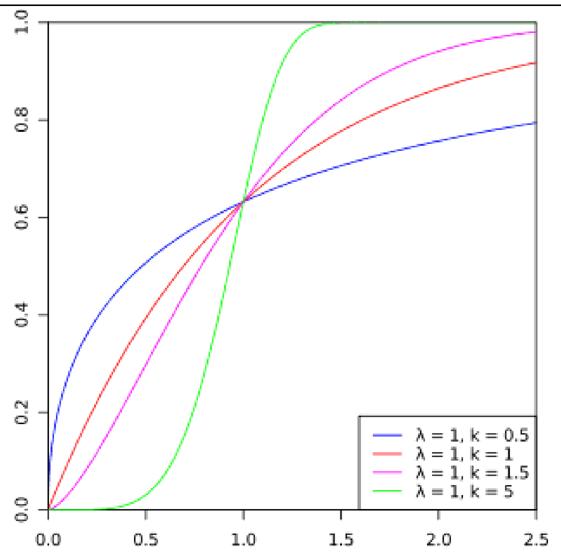

Рисунок 2. Интегральный закон распределения Вейбулла ($\lambda = 1$): $1 - k = 0{,}5$; $2 - k = 1$; $3 - k = 1{,}5$; $4 - k = 5$

Построение хаотических отображений
с инвариантной плотностью в виде распределения Вейбулла

Отображение, сопряженное сдвигу Бернулли. Построим хаотическое отображение, обладающее инвариантной плотностью в форме распределения Вейбулла на базе двоичного сдвига Бернулли

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} 2\alpha_n, & 0 \le \alpha_n < 1/2, \\ 2\alpha_n - 1, & 1/2 \le \alpha_n < 1. \end{cases} \qquad (3)$$

Для этого в (1.16а) проводится замена переменных по правилу:

$$\xi = 1 - e^{-(\mu x)^k}, \ \mu = \frac{1}{\lambda} \qquad (4)$$

В результате преобразовании получим искомое отображение:

$$x_{n+1} = \begin{cases} \lambda\left(-\ln(2e^{-(\mu x_n)^k} - 1)\right)^{1/k}, & 0 \le x_n \le \lambda(\ln 2)^{1/k}; \\ \left(\mu x_n\right)^{1/k} - \ln 2, & \lambda(\ln 2)^{1/k} \le x_n < \infty. \end{cases} \qquad (5)$$

Отображение (5) показано на рисунке 3.

Отображение, сопряженное пирамидальному отображению. В пирамидальном отображении

$$\alpha_{n+1} = 1 - |2\alpha_n - 1| = \begin{cases} 2\alpha_n, & 0 \le \alpha_n \le 1/2, \\ 2 - 2\alpha_n, & 1/2 \le \alpha_n < 1, \end{cases} \quad \alpha_n \in (0,1), \qquad (6)$$

проводится замена переменных (4). Отображение с искомой инвариантной плотностью (1) будет иметь вид:

$$x_{n+1} = \lambda\left(-\ln|2e^{-(\mu x_n)^k} - 1|\right)^{1/k}, \quad 0 \le x_n < \infty \ . \qquad (7)$$

Соответствующий график представлен на рисунке 4.

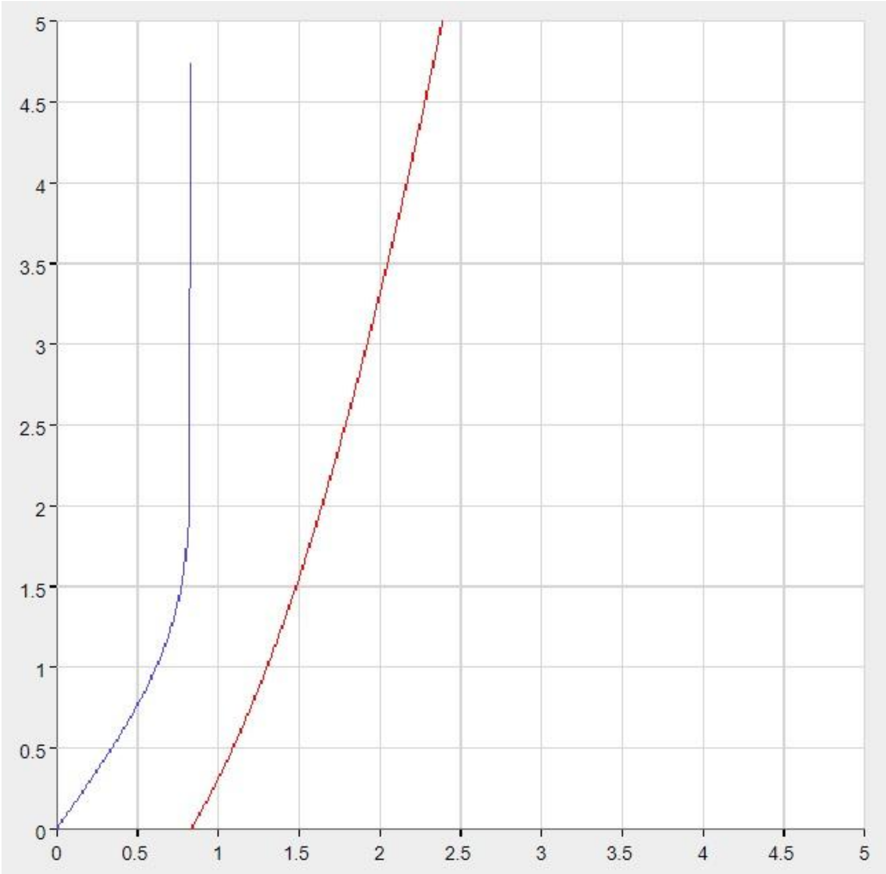

Рисунок 3. Отображение (2.9), обладающее инвариантной плотностью
в форме закона Вейбулла на базе сдвига Бернулли для случая $\lambda = 1, k = 2$

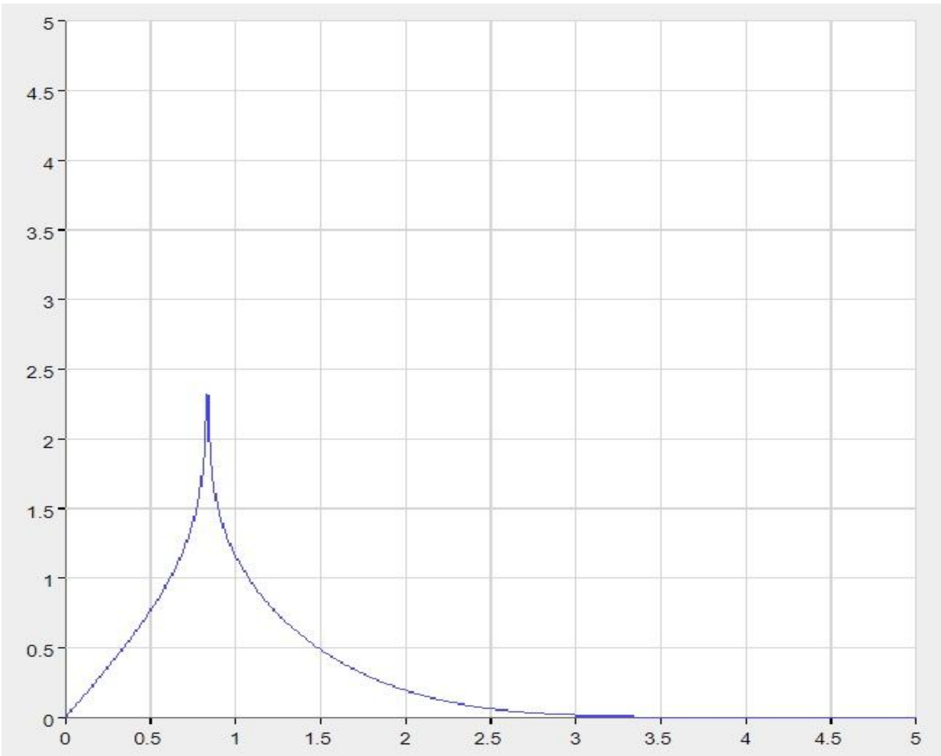

Рисунок 4. Отображение (2.12) с инвариантной плотностью
в форме закона Вейбулла на базе пирамидального отображения
для значений параметров $\lambda = 1, k = 2$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идея построения сопряженных хаотических отображений математически одновременно и проста, и очень продуктивна. При изучении новых отображений становится возможным использование результатов траекторного, множественного и спектрального анализа известных отображений. Построение конкретных примеров сопряженных отображений способствует более углубленному пониманию проблем детерминированного хаоса. Идея топологического сопряжения открывает перспективу построения новых нелинейных хаотических генераторов с разнообразными статистическими характеристиками – различными точными инвариантными плотностями, гладкими или разрывными итеративными функциями, различными по значению ляпуновскими показателями. Вид отображения с заданной инвариантной плотностью зависит от вида базового отображения, другими словами, каждым базовым отображением можно связать разнообразные сопряжённые хаотические отображения.

В результате выполнения работы были построены новые отображения, обладающие инвариантной плотностью в форме распределения Вейбулла и, важный частный случай, - экспоненциального распределения. Построено два типа таких отображений – на базе сдвигов Бернулли и на базе пирамидального отображения. Были произведены соответствующий выбор сопрягающей функции, расчет области определения отображения, получения аналитического вида нового отображения. Инвариантность показателя Ляпунова для сопряженных отображений предопределяет появления топологических "клонов" (таковыми могут быть и разнообразные эргодические отображения с нулевым показателем Ляпунова, порожденные дробно-линейным отображением).

К общим свойствам сопряженных отображений, независимо от использованного базового отображения, заключаются в возможности записи оператора Перрона-Фробениуса по единому правилу и определения собственных чисел и собственных функций оператора по характеристикам оператора Перрона-Фробениуса базового отображения. В работе записаны аналитические выражения для собственных функций операторов новых отображений.

Полученные отображения могут рассматриваться как новые генераторы псевдослучайных величин, имеющих релеевское распределение на положительном полуинтервале числовой оси и использоваться при моделировании надёжностных задач и задач криптографии.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.

2. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. – 88 с.

3. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.

4. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М. : Мир, 1984. 528 с.

5. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М. : Мир, 1988. 240 с.

6. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 360 с.

7. Биллингслей П. Эргодическая теория и информация. М. : Мир, 1969. 239 с.

8. *Гласс Л.,Мэки М.* От часов к хаосу. Ритмы жизни. М.:Мир, 1991. 248с.

9. *Кнут Д. Э.* Искусство программирования. В 3т. Т.2: Получисленные алгоритмы. 3-е изд. – М.: Вильямс, 2000.-832 с.

10. *Weibull W.* A statistical distribution function of wide applicability", J. Appl. Mech.-Trans. ASME. 1951. Vol. 18, no. 3. Pp. 293–297.

11. *Dobson B.* The Weibull analysis handbook. ASQ Quality Press, 2006. 167 p.

12. *Rinne H.* The Weibull distribution. A Handbook. CRC Press, 2009. 762 p.