Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

.
*Кафедра компьютерной физики и метаматериалов
на базе Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН*

СИНТЕЗ ХАОТИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ
С ИНВАРИАНТНОЙ ПЛОТНОСТЬЮ В ФОРМЕ ЗАКОНА РЕЛЕЯ

Автореферат
выпускной квалификационной бакалаврской работы
по направлению 03.03.02 «Физика»
студента 4 курса 432 группы
физического факультета
Емельяненко Алексея Аркадьевича

Научный руководитель –
д. ф.-м. н., профессор В. М. Аникин

Заведующий кафедрой –
д. ф.-м. н., профессор В. М. Аникин

Саратов 2018

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность работы. При моделировании случайных процессов в различных областях науки и техники нашло широкое применение вероятностное распределение Релея. В 1880 г. лорд Релей рассматривал задачу сложения множества независимых колебаний со случайными фазами и получил вероятностную функцию распределения для результирующей амплитуды. Это распределение и получило его имя. Помимо задачи о сложении независимых колебаний со случайными фазами, амплитудных флуктуаций сигналов, вероятностный закон Релея описывает распределение энергии по частотам излучения абсолютно черного тела, используется в теории надежности, в решении артиллерийских задач и даже в ткацком производстве при оценке нецилиндричности ткацкого навоя (катушки, предназначенной для навивки нитей при выработке тканей).

Важность распределения Рэлея определяется также его связью с другими распределениями. Так, модуль вектора точки с нормально распределенными декартовыми координатами описывается распределением Релея. Плотность распределения квадрата релеевской случайной величины определяет распределением хи-квадрат с двумя степенями свободы.

Важность данного распределения для задач моделирования и предопределила главную задачу выпускной квалификационной работы по синтезу хаотических отображений с инвариантной плотностью в форме релеевского закона.

Целью дипломной работы является построение хаотических отображений как генераторов псевдослучайных величин с заданными вероятностными характеристиками, в частности – с инвариантным распределением в форме закона Релея.

Задачи работы – проработка корректных математических операций на различных стадиях построения новых отображений (выбор сопрягающей функции, расчет области определения отображения, получения аналитического вида нового отображения), а также нахождение решения спектральной задачи для оператора Перрона-Фробениуса [8–11] этих отображений.

Этим определяется ***новизна и практическая направленность*** работы: Нахождение такого генератора имеет значение в теории надежности для моделирования времени жизни различных устройств. Кроме того, наличие параметра в этом отображении заставляет взглянуть на него и с точки зрения построения схем хаотического кодирования – наличие параметра усложняет задачу криптоанализа.

Структура работы: Введение, 3 главы, заключение, список использованных источников.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В главе 1расматриваются общие понятия, связанные с построением топологически эквивалентных (сопряженных) хаотических отображений. Общий алгоритм основан на замене переменных в исходном отображении, хаотическое поведение которого не вызывает сомнения. Эта замена производится, исходя из вида требуемого закона распределения. Замена переменных, как правило, ведет к изменению области определения отображения (грниц изменения итерируемой переменной).

В главе 2 проводится непосредственное построение хаотических отображений, обладающих инвариантным релеевским законом. Построено два отображения, различающиеся выбором базового отображения с равномерным инвариантным распределением (сдвиги Бернулли, пирамидальное отображение). Единичных интервал действия исходных отображений в результате замены переменных переводится в полубесконечный интервал (положительную полуось).

Инвариантное распределение с позиции операторного ананлиза хаотических отображений – это неподвижная точка ассоциированного с отображением оператором Перрона-Фробениуса. В главе 3 просматривается, какой вид имеют собственные функции этого оператора в случае отображений с инвариантным распределением в виде закона Релея.

Распределение Релея определяется следующими соотношениями – соответственно дифференциальным и интегральным законами:

$$f(x;\sigma)=\frac{x}{\sigma^2}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ ,\quad x>0\ ,\quad \sigma>0 \tag{1}$$

(плотность вероятности, рисунок 1) и

$$F(x;\sigma)=1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\quad x>0 \tag{2}$$

(закон распределения, рисунок 2). Здесь σ – параметр распределения.

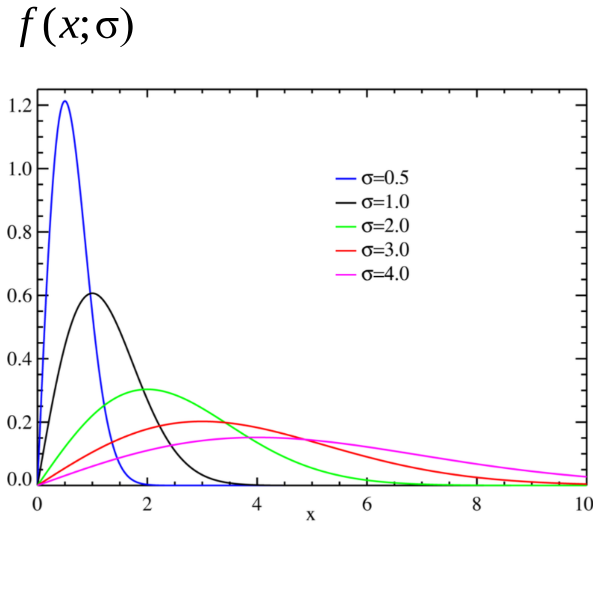

Рисунок 1. Плотность распределения Релея

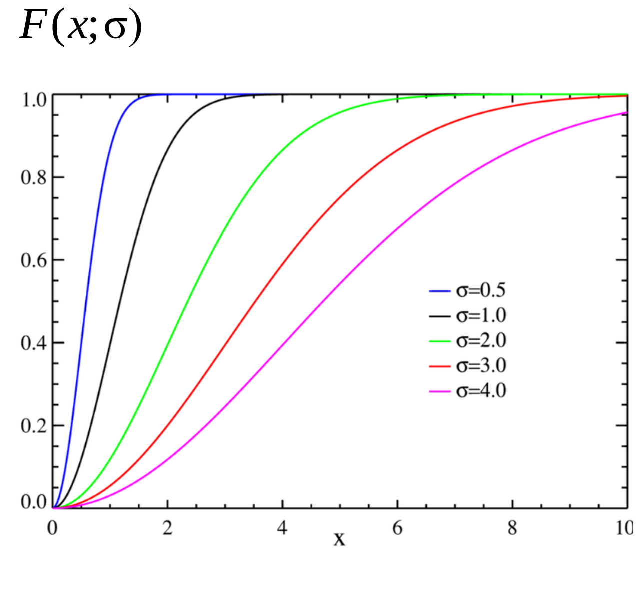

Рисунок 2. Закон распределения Релея

Выражение (2) используется для для определения необходимой замены переменных в хаотических отображениях с равномерным инвариантным распределением:

$$\xi=1-e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\ ,\ \ 0\le\xi\le1\ ,\ \sigma>0\ , \tag{3}$$

так что

$$x=\sqrt{-2\sigma^2\ln\eta}=\sqrt{-2\sigma^2\ln(1-\xi)}\ \ ,\ x>0 \tag{4}$$

Если в качестве исходного отображения использовать сдвиг Бернулли

$$\xi_{n+1} = 2\xi_n, \quad 0 \le \xi_n \le 1/2,$$
$$\xi_{n+1} = 2\xi_n - 1, \quad 1/2 \le \xi_n \le 1,$$

(рисунок 3) или пирамидальное отображение

$$\begin{cases} \xi_{n+1} = 2\xi_n, & 0 \le \xi_n \le 1/2, \\ \xi_{n+1} = 2 - 2\xi_n, & 1/2 \le \xi_n \le 1. \end{cases}$$

(рисунок 4),

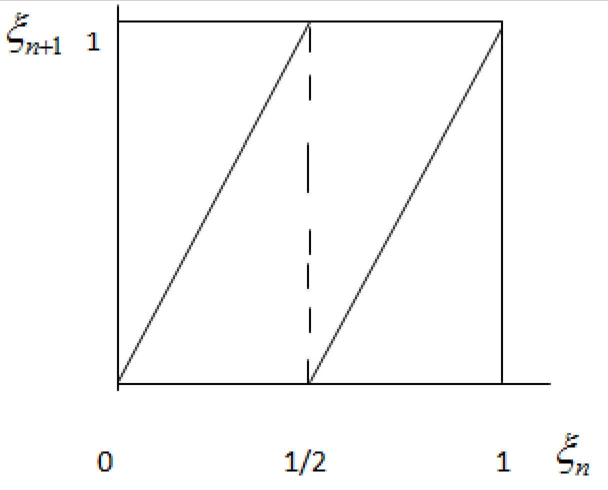

Рисунок 3. Сдвиг Бернулли

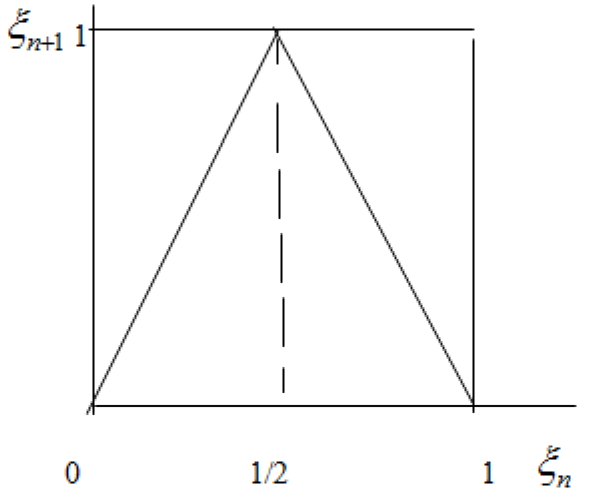

Рисунок 4. Пирамидальное отображение

то соответствующие хаотические отображения с инвариантной плотностью в форме релеевского распределения будут иметь вид:

$$x_{n+1} = g(\mathrm{x}_n) = \begin{cases} \sqrt{-2\sigma^2 \ln(2e^{-\frac{x_n^2}{(2\sigma^2)}} - 1)}, 0 \le x_n \le \sqrt{2\sigma^2 \ln 2}; \\ x_{n,} \sqrt{2\sigma^2 \ln 2} \le x_n \le \infty. \end{cases}$$

(рисунок 5) и

$$x_{n+1} = \sqrt{2\sigma^2 \ln\left|2e^{-\frac{x_n^2}{2\sigma^2}} - 1\right|}, \qquad 0 \le x_n \le \infty.$$

(рисунок 6). Аналогично строятся другие разновидности отображения, обладающего инвариантным распределением в форме закона Релея.

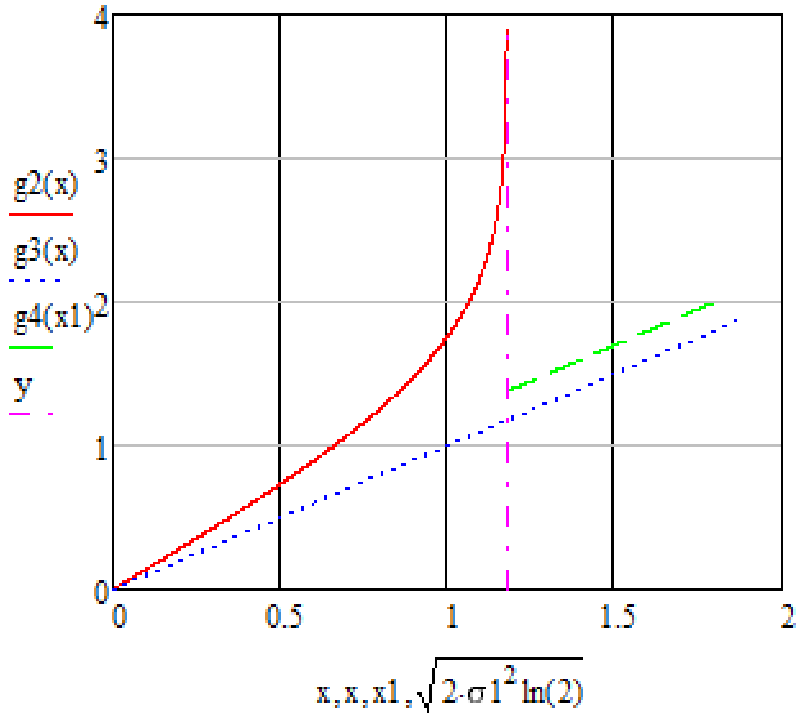

Рисунок 5. Отображение, обладающее инвариантной плотностью
в форме закона Релея на базе сдвига Бернулли

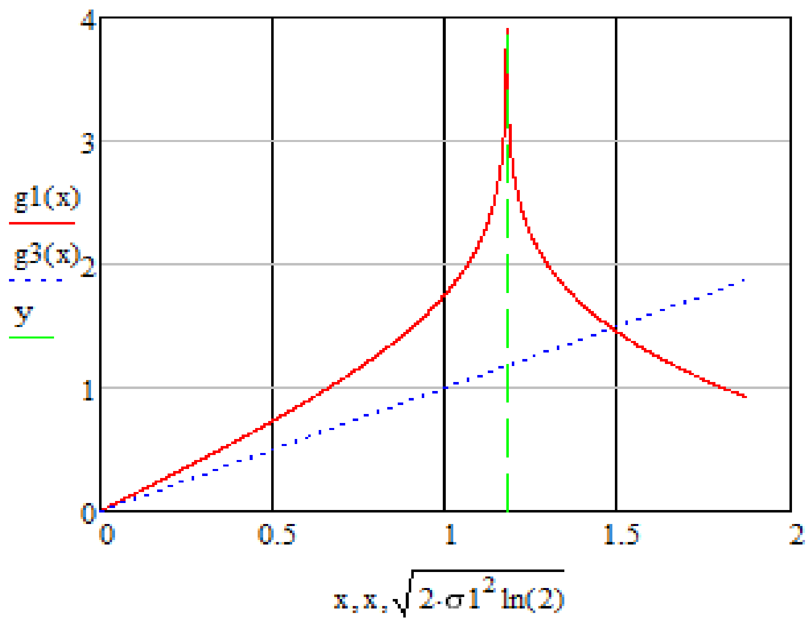

Рисунок 6. Отображение с инвариантной плотностью
в форме закона Релея на базе пирамидального отображения

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Идея построения сопряженных хаотических отображений математически одновременно и проста, и очень продуктивна. При изучении новых отображений становится возможным использование результатов траекторного, множественного и спектрального анализа известных отображений. Построение конкретных примеров сопряженных отображений способствует более углубленному пониманию проблем детерминированного хаоса. Идея топологического сопряжения открывает перспективу построения новых нелинейных хаотических генераторов с разнообразными статистическими характеристиками – различными точными инвариантными плотностями, гладкими или разрывными итеративными функциями, различными по значению ляпуновскими показателями. Вид отображения с заданной инвариантной плотностью зависит от вида базового отображения, другими словами, каждым базовым отображением можно связать разнообразные сопряженные хаотические отображения.

К общим свойствам сопряженных отображений, независимо от использованного базового отображения, заключаются в возможности записи оператора Перрона-Фробениуса по единому правилу и определения собственных чисел и собственных функций оператора по характеристикам оператора Перрона-Фробениуса базового отображения.

Инвариантность показателя Ляпунова для сопряженных отображений предопределяет появления топологических «клонов» (таковыми могут быть и разнообразные эргодические отображения с нулевым показателем Ляпунова, порожденные дробно-линейным отображением.)

В результате выполнения работы были построены новые отображения, обладающие инвариантной плотностью в форме распределения Релея. Построено два типа таких отображения – на базе сдвигов Бернулли и на базе пирамидального отображения. Были произведены: соответствующий выбор сопрягающей функции, расчет области определения отображения, получение аналитического вида нового отображения. Полученные отображения могут рассматриваться как новые генераторы псевдослучайных величин, имеющих релеевское распределение на положительном полуинтервале числовой оси.

Кроме того, в работе получены аналитические выражения:

а) для оператора Перрона-Фробениуса сопряженного отображения;

б) для собственных функций оператора Перрона-Фробениуса, соотнесенного с сопряженным отображением.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Аникин В.М., Голубенцев А.Ф.* Аналитические модели детерминированного хаоса. М. : ФИЗМАТЛИТ, 2007. 328 с.

2. *Аникин В.М., Аркадакский С.С., Ремизов А.С.* Несамосопряженные линейные операторы в хаотической динамике. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2015. 88 с.

3. *Шустер Г.* Детерминированный хаос. М.: Мир, 1988. 240 с.

4. *Лихтенберг А., Либерман М.* Регулярная и стохастическая динамика. – М.: Мир, 1984. 528 с.

5. *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. Курс лекций. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.

6. *Grossmann S., Thomae S.* Invariant distributions and stationary correlation functions of one-dimensional discrete processes // Z. Naturforsh. 1997. V. 32a. P. 1353-1363.

7. *Tsuchia T., Szabo A., Saito N.* Exact solutions of simple nonlinear difference equation systems that show chaotic behavior // Z. Naturforsh. 1983. V. 38a. P. 1035-1039.

8. *Lasota A., Mackey M.C.* Probabilistic properties of deterministic systems. Cambridge: Cambridge University Press, 1985. 360 c.

9. *Goloubentsev A.F., Anikin V.M.* The explicit solutions of Frobenius-Perron equation for the chaotic infinite maps // Int. J. of Bifurcation and Chaos. 1998.V. 8, № 5. P. 1049. DOI: 10.1142/S0218127498000863 2 .

10. *Голубенцев А. Ф., Аникин В. М., Аркадакский С.С.* О некоторых свойствах оператора Фробениуса-Перрона для сдвигов Бернулли // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2000. Т.8, №2. С. 67 – 73.

11. *Аникин В.М.* Спектральные задачи для оператора Перрона-Фробениуса // Изв. вузов. Прикладная нелинейная динамика. 2009. Т. 17, № 4. С. 61-74.