Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

.

Кафедра компьютерной физики и метаматериалов
на базе Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
им. В. А. Котельникова РАН

УЧЕТ ОСОБЕННОСТЕЙ МАШИННОЙ АРИФМЕТИКИ В ЗАДАЧАХ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Автореферат
выпускной квалификационной бакалаврской работы
по направлению 03.03.02 «Физика»
студента 4 курса 432 группы
физического факультета
Овчарова Алексея Анатольевича

Научный руководитель –
д. ф.-м. н., профессор В. М. Аникин

Заведующий кафедрой –
д. ф.-м. н., профессор В. М. Аникин

Саратов 2018

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуализация работы. На фоне грандиозных прикладных успехов ЭВМ объективная оценка их вычислительных возможностей ЭВМ в плане корректности получаемых результатов не теряет своей актуальности. Достаточно привести основной довод: множество чисел, с которыми оперирует машина, имеет меру нуль, в то время как мера множества чисел, геометрическим образом которых выступает числовая прямая, имеет меру континуума! Это придает машинной арифметике свойства, отличающиеся от свойств теоретической арифметики (математики), что проявляется в нарушении законов для арифметических операций.

Компьютер освобождает человека от большого объема рутинной вычислительной работы. Но он лишь только «инструмент», который неукоснительно выполнит порученную ему работу согласно инструкции (программе). И даже если задача поставлена грамотно, математическая модель сформулирована корректно (в рамках принятых допущений), программа с формальной точки зрения написана без ошибок, абсолютной страховки от компьютерных ошибок нет. Главной причиной является особая структура множества машинных чисел, представляющего собой конечное дискретное подмножество рациональных чисел степени числа 2. Остальные рациональные и все иррациональные числа в двоичной системе представляются приближенно, и именно это может служить и служит источником как мелких вычислительных погрешностей, так и грандиозных ошибок в компьютерных расчетах. Это и обусловливает необходимость тщательного анализа корректности получаемых численных результатов.

Для представления числовой информации в компьютере широко распространен специальный стандарт IEEE 754, разработанный ассоциацией IEEE (Institute of Electrical and Electronics Engineers) и используемый для представления подмножества действительных чисел (часто используют не совсем корректный термин – чисел с плавающей точкой) в двоичном коде. Этот стандарт используется многими микропроцессорами и логическими устройствами, а также программными средствами.

Стандарт IEEE 754-1985 определяет, в частности, четыре формата представления машинных чисел:

- с одинарной точностью (single-precision), 32 бита;

- с двойной точностью (double-precision), 64 бита;
- с одинарной расширенной точностью (single-extended precision) , не менее 43 бит; используется редко);
- с двойной расширенной точностью (double-extended precision) (не менее 79 бит, обычно используется 80 бит).

Целью выпускной квалификационной бакалаврской работы является анализ генезиса машинных ошибок и систематизация ситуаций, в которых эти ошибки проявляются наиболее очевидным и опасным образом.

Соответственно в число обсуждаемых ***задач*** входят:

- классификация типов машинных ошибок (глава 1);
- рассмотрение особенностей машинной арифметики во множестве машинных чисел и причин появления вычислительных ошибок (глава 2; с примерами);
- рассмотрение конкретных последствий особенностей машинной арифметики на результаты компьютерных расчетов и способов верификации правильности расчетов и минимизации возникающей погрешности на примере задачи определения собственных чисел оператора Перрона-Фробениуса для хаотического отображения Гаусса (глава 3). ***Научная новизна*** соотносится с процедурой верификации точности решения спектральной задачи для несамосопряженного оператора Перрона-Фробениуса.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Машинное число. Структура множества машинных чисел

В машинных вычислениях участвуют числа целые и вещественные числа (числа с плавающей точкой), при этом, как уже указывалось во введении, все (!) машинные числа представляются конечным количеством разрядов. Отсюда следует первая характеристика множества машинных *чисел:* ***множество машинных чисел конечно, дискретно и ограничено.***

Машинными числами принято называть вещественные числа вида [5]:

$$z = \pm\gamma^{p(z)}\left(\frac{z_1}{\gamma}+\frac{z_2}{\gamma^2}+\ldots+\frac{z_k}{\gamma^k}\right) = \pm\gamma^{p(z)}\sum_{l=1}^{k}\frac{z_l}{\gamma^l} = \pm\gamma^{p(z)}m(z), \qquad (1)$$

где γ – основание системы счисления (для двоичной системы $\gamma = 2$), $p(z)$ – показатель числа, $m(z) = \sum_{l=1}^{k} \frac{z_l}{\gamma^l}$ – мантисса числа, z_m – цифры мантиссы числа, причем мантисса числа не может начинаться с нуля: $1 \le z_1 \le \gamma - 1$, $0 \le z_l \le \gamma - 1$ ($2 \le l \le k$). Оговариваемая конечность числа разрядов, отводимых в памяти компьютера для записи числа, означает и конечность значения показателя числа (под его запись отводится ограниченное число разрядов):

$$p^- \le p(z) \le p^+ .$$

Выражение для мантиссы числа означает, что для ее записи отводится не более k разрядов. Таким образом, машинное число – это такое γ- ичное число с плавающей точкой, мантисса которого в своем γ- ичном представлении содержит не более k γ- ичных цифр, а порядок может принимать значения в интервале целых значений $\left[p^-,\ p^+\right]$. Под запись кодов знака числа (знака мантиссы) и знака порядка отводится определенное количество разрядов.

Из представления (1) следует:

1) в компьютере возможно точное представление только тех чисел, которые изначально имеют форму (1), т.е. являются степенями основания системы счисления;

2) все иррациональные числа, а также рациональные числа, отличные от степеней основания системы счисления, не могут быть точно представлены в памяти компьютера и представляются с потерей разрядов;

3) минимальным положительным числом, представимым в компьютере, является величина

$$\varepsilon_0 = \gamma^{p^- - 1} = \frac{\gamma^{p^-}}{\gamma};$$

4) максимальным положительным число, представимым в компьютере, является величина

$$\varepsilon_\infty = \gamma^{p^+}\left(1 - \gamma^{-k}\right);$$

5) в интервалах $\left(-\varepsilon_0, 0\right)$, $\left(0,\ \varepsilon_0\right)$ нет машинных чисел;

6) для числа 0 $p(0) = 0, m(0) = 0$;

7) для числа 1 $p(1) = 1$, $m(1) = 1/\gamma$, т.е. число 1 представляется как

$$1 = \gamma^1 \frac{1}{\gamma};$$

8) конечное множество машинных чисел является дискретным, расположенным в интервале значений $\left[-\varepsilon_\infty, \varepsilon_\alpha\right]$; числа вне этого интервала не могут быть представлены в памяти компьютера;

9) на интервалах вида $[\gamma^{q-1}, \gamma^q]$ машинные числа расположены равномерно с шагом $\gamma^{q-1} \cdot \varepsilon_1$; здесь

$$\varepsilon_1 = \gamma^{1-k} = \gamma \cdot \frac{1}{\gamma^k}.$$

10) минимальным машинным числом, для которого возможно сложение с единицей является число $\varepsilon_1 = \gamma^{1-k}$;

11) минимальным машинным числом, для которого возможно сложение с числом γ^q (q – целое), является число $\gamma^q \cdot \varepsilon_1$.

Свойства 1–8 являются очевидными и следуют непосредственно из вида (2.1). Некоторых пояснений заслуживает отмеченные свойства 9–11. Компьютерное сложение определено (см. также далее) для чисел с одинаковыми порядками. Если порядки различны, то происходит их выравнивание, что влечет за собой заполнение соответствующим числом нулей первых разрядов мантиссы меньшего (по порядку) из чисел («сдвинутые» разряды мантиссы при этом теряются!). Рассмотрим, к примеру, как происходит сложение с единицей числа $\varepsilon_q = \gamma^{1-q} = \gamma^1 \cdot \gamma^{-q}$:

$$1 + \varepsilon_q = \gamma \cdot \frac{1}{\gamma} + \gamma \cdot \frac{1}{\gamma^q} = \gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^q}\right).$$

Возможны три случая:

а) когда $q = k$, то $\varepsilon_q = \varepsilon_1$, и происходит сложение: $1 + \varepsilon_1 > 1$;

б) когда $q < k$, то сложение возможно: $1 + \varepsilon_q = \gamma\left(\frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\gamma^q}\right) > 1$;

в) когда $q > k$, результатом сложения двух машинных чисел 1 и остается 1, т.к. число не попадает в мантиссу суммы (другими словами сложение невозможно!).

Множество машинных чисел естественным образом упорядочено согласно представлению (2.1), так что каждое из них имеет (при условии попадания в интервал $\left[-\varepsilon_\infty, \varepsilon_\alpha\right]$) «соседей» слева и справа – предыдущее и последующее машинные числа [5]. Последующее число суть

$$
succ(z)=\begin{cases} -\gamma^{p(z)}(m(z)-\varepsilon_1/\gamma), & -\gamma^p\le z\le-\gamma^{p-1}, \\ 0, & z=-\varepsilon_0, \\ \varepsilon_0, & z=0, \\ \gamma^{p(z)}(m(z)+\varepsilon_1/\gamma), & \gamma^{p-1}\le z\le\gamma^p. \end{cases}
$$

Предыдущее число – это

$$
pred(z)=\begin{cases} -\gamma^{p(z)}(m(z)+\varepsilon_1/\gamma), & -\gamma^p\le z\le-\gamma^{p-1}, \\ -\varepsilon_0, & z=0, \\ 0, & z=\varepsilon_0, \\ \gamma^{p(z)}(m(z)-\varepsilon_1/\gamma), & \gamma^{p-1}\le z\le\gamma^p. \end{cases}
$$

Вещественное число, принадлежащее интервалу $[-\varepsilon_\infty, \varepsilon_\alpha]$, в памяти компьютера заменяется ближайшим к нему (слева – *under*(*z*) или справа – *over*(*z*)) машинным числом. Алгоритм такой замены следующий [5]:

$$
under(z)=\begin{cases} 0,\ z\in[0,\varepsilon_0), \\ -\varepsilon_0,\ z\in[-\varepsilon_0,0), \\ \gamma^{p(z)-k}[\gamma^k\cdot m(z)],\ z\in[-\varepsilon_\infty,-\varepsilon_0)\bigcup[\varepsilon_0,\varepsilon_\infty]; \end{cases}
$$

$$
over(z)=\begin{cases} 0,\ z\in(-\varepsilon_0,0], \\ \varepsilon_0,\ z\in(0,\varepsilon_0], \\ \gamma^{p(z)-k}[\gamma^k\cdot m(z)]_+,\ z\in[-\varepsilon_\infty,-\varepsilon_0)\bigcup[\varepsilon_0,\varepsilon_\infty]. \end{cases}
$$

Здесь квадратные скобки, внутри которых заключено выражение, означают операцию выделения дробной части этого отображения: $[x]=\max\limits_{m\le x} m,\quad [x]_+ \min\limits_{m\ge x} m$ (максимум и минимум берутся по множеству целых чисел). Очевидно, что $\max\limits_{m\le x} m+1=\min\limits_{m\ge x} m$.

При такой замене, естественно, возникает погрешность, которая является фундаментальным свойством машинной арифметики. Относительную точность представления чисел в компьютере в диапазоне $|z|\ge\varepsilon_0$ определяет число ε_1 [5]:

$$
\frac{|z-z_m|}{z}\le\varepsilon_1 .
$$

В основе машинных действий сложения и умножения лежит операция усечения мантиссы до определенного количества значащих цифр *r* [5]:

$$
tranc(z,r)=\operatorname{sgn}(z)\cdot\gamma^{p(z)-r}[\gamma^r\cdot m(z)],
$$

где, как и раньше, $[x] = \max_{m \le x} m, \quad [x]_+ \min_{m \ge x} m$. При $r \le 0$ $trunc(z,r) = 0$. Таким образом, в числе $trunc(z,r)$ первые r цифр мантиссы совпадают с соответствующими цифрами числа z, а остальные цифры – нули.

Машинные операции умножения и деления могут определяться как

$$z_1 \otimes z_2 = \text{trunc } (z_1 \times z_2, k); \quad z_1 / z_2 = \text{trunc } (z_1 / z_2, k).$$

Операции сложения (верхний знак) и вычитания (нижний знак) определяются как

$$z_1 \pm z_2 = \text{trunc}\,(\text{trunc}\,(z_1, k+1+p(z_1)-p(z_2)) \pm \text{trunc}(\text{z}_2, k+1+p(z_2-p(z_1)), k).$$

Таким образом, для сложения двух чисел с одинаковыми порядками точно вычисляется их сумма, которая содержит не более k+1 значащих цифр, а затем в точной сумме оставляются k первых значащих цифр. При сложении чисел с разными порядками непосредственно перед операцией сложения в меньшем по модулю числе происходит усечение мантиссы. Часть младших цифр меньшего числа при этом теряется. Точное сложение двух чисел, одно из которых усечено, даст результат, содержащий не более k+2 значащих цифр. При втором усечении в мантиссе результат остается k цифр, т.е. результат приводится к машинному числу.

Ошибки при расчете собственных чисел несамосопряженных операторов

Данный тип ошибок рассмотрим на примере конкретной задачи численного расчета собственных чисел оператора Перрона-Фробениуса для отображения Гаусса, применяемого в космологической модели Большого взрыва для описания эволюции Вселенной на самом раннем этапе – планковском интервале времени [8]. Нелинейное преобразование

$$x_{n+1} = Tx_n = \left\{ \frac{1}{x_n} \right\}, x \in \Omega \in (0,1), n = 0,1,2,..., \qquad (2)$$

носит название отображения Гаусса (отображения для непрерывных дробей, Gauss' map, continued fraction map). Через T обозначен оператор исчисления дробной части от обратной величины x_n. Это отображение однозначным образом ставит в соответствие каждому (иррациональному) числу из единичного интервала число из того же интервала (рисунок 1).

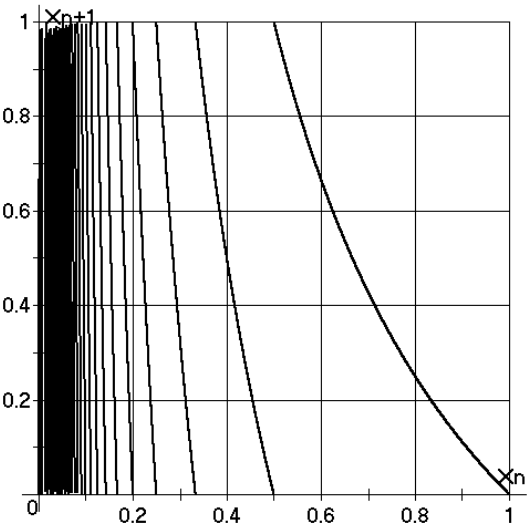

Рисунок 1. Итеративная функция отображения Гаусса (3.1). Точки разрыва — рациональные числа //*n*//, *n*=1,2,…

Чувствительная зависимость траекторий отображения от начальных условий позволяет и обусловленная этим невозможность предсказания точного значения переменной x_n на любом шаге итераций обусловливают рассмотрение величин x_n и x_{n+1} как случайных. С этими случайными величинами необходимо соотнести соответствующие вероятностные распределения, а закон их трансформации при итерациях описывается специальным уравнением, которое принято называть уравнение Перрона–Фробениуса. В общем виде оно имеет вид:

$$Pf(x) = \int_0^1 f(\xi)\delta(x - T\xi)d\xi, \tag{3}$$

где T – преобразование, определяющее отображение. Доказанные эргодические и перемешивающие свойства отображения Гаусса [9] обусловливают наличие у него инвариантной меры и сходимость произвольного начального распределения для стартового значения X_0 к инвариантной плотности. Эволюция вероятностных распределений – от начальной плотности $f_0(x)$ к инвариантной плотности $f^*(x)$ – определяется нестационарным уравнением Перрона–Фробениуса [9]:

$$f_{n+1}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}\,f_n\left(\frac{1}{x+k}\right), \qquad (4)$$

и, следовательно, оператор Перрона–Фробениуса (правило преобразования вероятностных плотностей) для отображения Гаусса имеет вид

$$Pf(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(x+k)^2}\,f\left(\frac{1}{x+k}\right). \qquad (5)$$

Характер эволюционных процессов, протекающих в динамической системе (2), определяется решением спектральной задачи для этого оператора – собственными числами и собственными функциями. Определяющее их уравнение имеет вид

$$P\psi_k(x)=\lambda_k\psi_k(x),$$

где $\psi_n(x)$ - собственная функция оператора, λ_n - соответственное собственное число.

Необыкновенная сложность организации корректных машинных вычислений характеристик хаотических отображений, граничащая с поистине драматической ситуацией, проявилась при первых численных расчетах собственных функций и собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса для отображения Гаусса – компьютер, "отрабатывая" традиционный алгоритм для решения конечномерных задач, выдал ***несуществующее собственное число***! Этот факт "битвы в пути" за знание собственных чисел зафиксирован в препринте [10] и монографии [2] (в последнем случае – с обсуждением полученного эффекта). Результаты первого расчета собственных чисел приведены в таблице.

В этой таблице собственных значений наблюдается "сбой" в знаках собственных чисел. Машина выдала ошибочный результат: ***четвертое число – машинный "фантом", такого собственного значения оператор не имеет!*** Комментируя "нарушение гармонии" в указанном ряду собственных значений, К.И. Бабенко отмечает: "Это удивительно, если учесть, сколь совершенна аппроксимация, примененная нами" [2, с. 590]. Объяснение и одновременно предостережение крупнейшего специалиста в области численного анализа на будущее: «Для *самосопряженных* операторов такие "казусы" *невозможны*, и данный пример является предупреждением, что в *несамосопряженном* случае при дискретизации следует ожидать всяческих подвохов» [2, с. 590].

Таблица1 . Собственные числа операторов Перрона–Фробениуса для отображения Гаусса [10]

Собственное число	λ_1	λ_2	λ_3	λ_4
Значение	0,9999999998	- 0,3036630028	0,1008815090	**- 0,0408458378**

Собственное число	λ_5	λ_6	λ_7	λ_8
Значение	- 0,0354962199	0,012843805	- 0,0047168861	0,0017486737

Результат повторного расчета собственных чисел отражается таблица 6. В ней в качестве второй строки для сравнения приведены собственные числа оператора Перрона-Фробениуса для инверсного сдвига Бернулли, обладающего тремя линейными ветвями (рисунок 2):

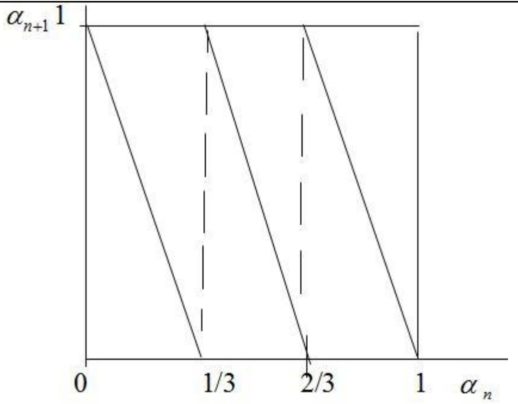

Рисунок 2. Инверсный сдвиг Бернулли (три ветви)

$$\alpha_{n+1} = \begin{cases} -3\alpha_n + 1, \ \alpha_n \in (0, 1/3), \\ -3\alpha_n + 2, \ \alpha_n \in (1/3, 2/3), \\ -3\alpha_n + 3, \ \alpha_n \in (2/3, 1). \end{cases}$$

Интересно, что не только интерпретация полученных расчетов, но и очень простые *точные* результаты и аналогии могли бы помочь избежать этой коллизии без непосредственного анализа численного алгоритма. Речь идет об общих свойствах интегралов от собственных функций по мере Лебега и характере смены знаков у собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса.

Таблица 2. Собственные числа операторов Перрона–Фробениуса для отображения Гаусса [2] и инверсного сдвига Бернулли с тремя ветвями

Отображение	λ_2	λ_3	λ_4	λ_5	λ_6	λ_7
Гаусса	–0.303663	0.10088	–0.03550	0.01284	–0.00472	0.00175
Инверсный сдвиг	–0,(3)	0,(1)	–0,0(370)	0,01234567	–0,0041115	0,001372

Первое собственное число $\lambda_1 = 1$; оно соответствует собственной функции в виде инвариантной плотности отображения. Из первой строки таблицы видно, что собственные числа оператора Перрона–Фробениуса *знакопеременны*. Во второй строке таблицы приведены величины $(-1)^{n-1}3^{-(n-1)}$, являющиеся собственными числами оператора Перрона–Фробениуса для инверсного сдвига Бернулли с тремя линейными ветвями.

Несмотря на крохотное отличие этих величин от первых собственных чисел оператора Перрона–Фробениуса для отображения Гаусса, речь не идет о буквальной эмуляции отображения Гаусса простым кусочно-линейным отображением. Здесь интересен качественный аспект: хаотические отображения с полными ветвями, имеющими "отрицательный" наклон, обладают в дискретном спектре оператора Перрона–Фробениуса ***знакопеременными*** собственными числами.

В контексте рассмотрения влияния объективных свойств машинной арифметики на результаты анализа хаотических отображений, обратим внимание на один универсальный и удобный в практическом использовании критерий проверки правильности как аналитических, так и численных расчетов собственных функций оператора Перрона–Фробениуса.

Пусть $\psi_k(x)$ и λ_k, k=1,2,…, – соответственно собственные функции и собственные числа оператора Перрона–Фробениуса $Pf(x)$ некоего хаотического отображения (сохраняющего меру на некотором сегменте), так что $P\psi_k(x) = \lambda_k \psi_k(x)$. Нетрудно показать, что интеграл по мере Лебега от собственных функций $\psi_k(x)$, начиная со второй, на области определения отображения равен нулю:

$$\int_A \psi_k(x)dx = 0,\, k = 2,3,\ldots\ . \qquad (6)$$

Инвариантная же плотность $\psi_1(x)$ всегда нормирована: $\int_A \psi_1(x)dx = 1$.

На рисунке. 3 представлены графики первых собственных функций оператора Перрона–Фробениуса отображения Гаусса [10]. Для каждой собственной функции площади криволинейных трапеций, образованных кривыми выше и ниже оси абсцисс, представляются равными, что, согласно (3.6), свидетельствует в пользу правильности проведенных вычислений.

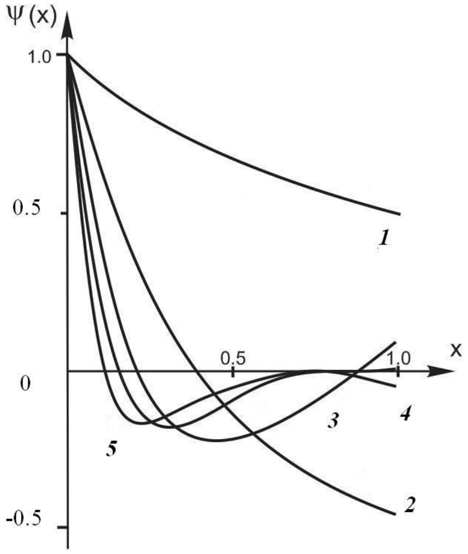

Рисунок 3. Собственные функции отображения Гаусса [10]: *1*– инвариантная плотность, *2–5* – собственные функции следующих порядков (ординаты показаны с масштабным коэффициентом ln2)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе проанализирована структура множества машинных чисел – множества чисел с плавающей точкой. Это множество ограничено, конечно, дискретно и представляет собой подмножество рациональных чисел, являющихся степенями числа 2 – основания системы счисления. Интервал между соседними числами зависит от величины числа и увеличивается с ее ростом.

Во множестве не выполняются правила арифметических действий с вещественными числами: результат зависит от порядка вычислений. Для операций с машинными числами существенно возникновение погрешностей, которые возникают сразу же, при аппроксимации чисел в памяти машины. В процессе вычислений эти погрешности могут накапливаться. Возможно существенное нарастание погрешности в результате дискретизации непрерывных математических моделей.

Существует класс плохо обусловленных задач [11], решение которых сильно зависит от начальных условий. Для этих задач наличие погрешностей машинных вычислений может привести и приводит к невозможности без соответствующих исследований и модификации вычислительных процедур найти приемлемый ответ.

В качестве фундаментального примера рассмотрены итоги решения задачи на собственные функции и собственные числа оператора Перрона-Фробениуса, который задает правило преобразования вероятностных плотностей при преобразовании отвечающих им случайных величин. Показано, что проверка решения в сложных случаях может быть осуществлена при сравнении решения с аналогичными, но более простыми моделями, при учете общих свойств изучаемых объектов. Так, в случае с решение спектральной задачи на названного оператора отображения Гаусса оказались продуктивными сравнение с решением аналогичной задачи для отображения «инверсный сдвиг Бернулли» и общим свойством обращения интеграла от собственных функций в ноль. Сравнение помогло установить знакопеременный характер собственных чисел, а названное условие помогает проверить точность расчета собственных функций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Гинзбург В.Л.* Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными // УФН. 1999. Т. 169, № 4. С. 419–441.

2. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М. : Наука, 1986 . 744 с.

3. *Пайерлс Р.* Построение физических моделей // УФН. 1983. Т. 140, вып. 3. С. 315–332.

4. *Хемминг В.Р.* Численные методы для научных работников и инженеров. М. : 1972. 400 с.

5. *Годунов С.К., Антонов А.Г., Кирилюк О.П., Костин В.И.* Гарантированная точность решения систем линейных уравнений в евклидовых пространствах. Новосибирск : Наука. Сибирское отделение, 1988. – 456 с.

6. *Каханер Д., Моулер К., Нэш С.* Численные методы и программное обеспечение. М. : Мир, 1998. 575 с.

7. *Мак-Кракен Д., Дорн У.* Численные методы и программирование на Фортране. М. : Наука, 1977. 584 с.

8. *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М. : Наука, 1973. Гл. 14. Релятивистская космология.

9. *Аникин В.М.* Отображение Гаусса: эволюционные и вероятностные свойства. Саратов : Изд-во Сарат. ун-та, 2007. 80 с.

10. *Бабенко К.И., Юрьев С.П.* Об одной задаче Гаусса. Препринт. М.: ИПМ АН СССР. 1977. № 63. 70 с.

11. Плохо обусловленные задачи. URL : http://radiomaster.ru/cad/mc12/glava_08/index08.php