

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Переход «когерентность–некогерентность» в ансамблях  
нелокально связанных хаотических осцилляторов с  
негиперболическими и гиперболическими аттракторами**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы  
направления 03.03.03 «Радиофизика»  
физического факультета

**Рыбаловой Елены Владиславовны**

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Анищенко В.С.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор \_\_\_\_\_ Анищенко В.С.

Саратов 2018

## ВВЕДЕНИЕ

Весь мир представляет из себя большой набор сетей с различной природой парциальных элементов, с различной топологией связи между ними, что приводит к большому количеству наблюдаемых в них типов динамики. Примером таких структур могут служить косяки рыб и стаи птиц в животном мире, технические сети такие, как энергосистемы стран и сети авиалиний, различные социальные и биологические сети. Данный факт притягивает множество ученых к изучению коллективной динамики сложных систем взаимосвязанных нелинейных осцилляторов, образования различных пространственно-временных структур и их синхронизации.

До 2002 года считалось, что в сетях связанных идентичных осцилляторов могут наблюдаться только два явления: фазовая синхронизация и медленное перемещение (дрейф). Работа Йошики Курамото и Дорсурен Баттогтох<sup>1</sup>, в которой изучалась система нелокально связанных фазовых осцилляторов, показала, что в таких сетях могут возникать сложные структуры, представляющие собой сосуществование кластеров осцилляторов с синхронной динамикой и кластеров с асинхронной динамикой, которые четко разделены в пространстве. В дальнейшем в работе Стивена Строгатса<sup>2</sup> динамика в ансамблях с такой пространственной структурой была названа «химерной структурой» или просто «химера». Как и в мифологии, в сети одинаковых осцилляторов химера представляет собой сочетание несочитаемого.

Недавние работы показали, что появление химерных состояний не ограничивается фазовыми осцилляторами, они наблюдаются в ансамблях с различными типами парциальных элементов: начиная от дискретных во времени и непрерывных во времени хаотических систем, осцилляторов Ван дер Поля до моделей популяций и автономных булевых сетей. На данный момент этот эффект наблюдался в реальных экспериментах: в химических реакциях и лазерных решетках. Сейчас ведутся работы по возможному применению химерных состояний к описанию динамики ансамблей в живой природе. Химерные состояния исследуются применительно к анализу болезни Паркинсо-

---

<sup>1</sup>Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.*, 4:380-385. 2002.

<sup>2</sup>Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators // *Physical review letters*. 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102.

на, поочередного сна полушарий головного мозга, частичной синхронизация в нейронной активности при движении глаза, динамике сердечной мышцы (фибрилляция желудочков) и др. Особенность химерных состояний, исследуемых в экспериментах и численном моделировании, заключается в том, что они возникают в ансамблях идентичных парциальных элементов с симметричной топологией связи.

Химерные структуры исследуются с точки зрения как временной, так и пространственной динамики. Анализируются автокорреляционные функции и коэффициенты диффузии, ляпуновские показатели и функций взаимной корреляции. Однако не так много работ, в которых исследуется влияние свойств именно парциальных элементов на возникновение химерных состояний. В работе Семеновой<sup>3</sup> предпринята попытка сделать обобщение уже имеющихся результатов применительно к ансамблям элементов с хаотической динамикой. Были предложены свойства, которыми должны обладать парциальные элементы, чтобы ансамбли, состоящие из них, демонстрировали химерные состояния. В частности, было сделано предположение о возникновении химерных состояний только в ансамблях связанных систем с негиперболическим хаотическим аттрактором. Это предположение было подтверждено для таких негиперболических систем, как логистическое отображение, отображение Эно, система Рёсслера, генератор Анищенко-Астахова. Для почти гиперболических систем было показано, что химерные состояния в них не наблюдаются. В качестве примеров таких парциальных систем приводятся отображение Лози и система Лоренца. В ансамблях элементов с гиперболическим аттрактором переход «синхронизация-рассинхронизация» осуществляется через уединенные состояния (solitary state).

**Целью** данной выпускной квалификационной работы было изучить сходства и различия характеристик перехода «когерентность–некогерентность» в ансамбле нелокально связанных хаотических осцилляторов с негиперболическими и гиперболическими аттракторами.

---

<sup>3</sup>Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators? / N. Semenova, A. Zakharova, E. Schöll et al. // EPL (Europhysics Letters). 2015. Vol. 112, no. 4. P. 40002.

Для достижения целей были поставлены следующие **задачи**:

1. Изучить мгновенные профили колец при различных типах парциальных элементов и различной силе связи между элементами;
2. Проанализировать влияние слагаемого связи в ансамблях;
3. Сравнить полученные результаты.

Для выполнения поставленных задач применялось компьютерное моделирование, которое включало в себя написание программного кода на языке программирования C, и визуализацию полученных данных с помощью программы Gnuplot.

Данная работа включает в себя введение (3-5 стр), три главы: «Исследуемая модель. Ансамбли не локально связанных отображений Эно и Лози» (6-9 стр); «Ансамбль связанных систем с негиперболическими аттракторами» (10-20 стр), включающая в себя два пункта: «Особенности перехода "синхронизация–рассинхронизация" в ансамбле связанных систем с негиперболическими аттракторами» (10-16 стр), «Анализ влияния слагаемого связи в ансамбле негиперболических систем» (16-20 стр); «Ансамбль связанных систем с гиперболическими аттракторами» (21-31 стр), включающая в себя два пункта: «Особенности перехода "синхронизация–рассинхронизация" в ансамбле связанных систем с гиперболическими аттракторами» (21-26 стр), «Анализ влияния слагаемого связи в ансамбле гиперболических систем» (26-31 стр); заключение (32-34 стр) и список использованных источников (35-38 стр).

## ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе рассматривается математическая модель исследуемого ансамбля нелокально связанных парциальных элементов с периодическими граничными условиями:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= (1 - \sigma)f_x(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P; j \neq i}^{i+P} f_x(x_j^t, y_j^t) \\ y_i^{t+1} &= f_y(x_i^t, y_i^t), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $t$  обозначает дискретное время,  $i = 1, 2 \dots N$  – номер осциллятора,  $N$  – число элементов в кольце,  $\sigma$  – коэффициент связи,  $P$  число соседних элементов слева и справа, связанных с  $i$ -ым элементом,  $f_x(x, y)$  есть первое уравнение двумерного отображения:  $f_x(x, y) = 1 - \alpha x^2 + y$ ,  $f_y(x, y) = \beta x$  – второе уравнение. Было введено обозначение  $r = P/N$  – радиус нелокальной связи.

Как видно из системы уравнений (1), второе слагаемое в первом уравнении отражает влияние соседей  $i - P \leq j \leq i + P$  на  $i$ -ый осциллятор. Мы обозначили его как  $\Phi_i = \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P; j \neq i}^{i+P} f(x_j^t, y_j^t)$  и назвали слагаемым связи.

В качестве базовых моделей в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов рассматриваются дискретные системы Эно и Лози.

Отображение Эно<sup>4</sup>:

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= 1 - \alpha(x^t)^2 + y^t \\ y^{t+1} &= \beta x^t, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $t$  – дискретное время ( $t = 1, 2, \dots$ ),  $\alpha$  и  $\beta$  – параметры. Отображение Эно (2) описывает динамику достаточно широкого класса хаотических систем. Его аттрактор относится к классу негиперболических и по определению Афраймовича–Шильникова<sup>5</sup> являются квазиаттракторами, для которых типична мультистабильность.

---

<sup>4</sup>Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // The Theory of Chaotic Attractors. Springer, 1976. P. 94–102.

<sup>5</sup>Sil'nikov L. A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1970. Vol. 10, no. 1. P. 91.

Отображение Лози <sup>6</sup>:

$$\begin{aligned}x^{t+1} &= 1 - \alpha|x^t| + y^t \\y^{t+1} &= \beta x^t.\end{aligned}\quad (3)$$

Отображение Лози было специально введено для описания структуры и свойств аттрактора Лоренца в области значений параметров, отвечающих случаю почти гиперболического хаотического аттрактора. Аттрактор Лози в системе (3) так же описывает достаточно широкий круг хаотических систем с аттракторами гиперболического типа.

Таким образом модели (2) и (3) могут быть использованы для описания основных характеристик переходов связанных хаотических осцилляторов с указанными выше типами хаотических аттракторов.

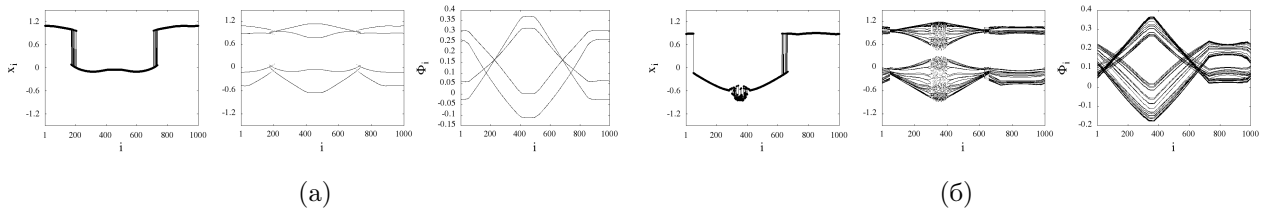


Рисунок 1 – Эволюция мгновенных и пространственно-временных профилей ансамбля (1) при изменении коэффициента связи  $\sigma$ . Слева приведены мгновенные пространственные профили в момент времени  $t = 100000$ , в центре – последние 50 мгновенных снимков пространственных профилей  $x_i^t$ , справа – последние 50 мгновенных снимков слагаемого связи  $\Phi_i^t$ . (а) – фазовая химера, (б) – фазовая и амплитудная химеры. Параметры:  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $r = 0.32$ ; (а) –  $\sigma = 0.372$ , (б) –  $\sigma = 0.323$ .

Вторая глава посвящена ансамблю связанных систем с негиперболическим аттрактором. В первом пункте показано, что переход «синхронизация-рассинхронизация» в такой система осуществляется через химерные структуры (рисунок 1). Было определено, что для формирования химерных состояний основным условием является периодическое во времени решение с периодом колебаний  $\geq 4$ . Возникновение амплитудной химеры сопровождается резкой хаотизацией колебаний соответствующего кластера элементов ансамбля и функции связи.

<sup>6</sup>Lozi R. Un attracteur etrange (?) du type attracteur de Henon // Le Journal de Physique Colloques. 1978. Vol. 39, no. C5. P. C5-9.

Резюмируя результаты режимы функционирования ансамбля (1) можно обобщить следующим образом. Динамики парциальных элементов во времени может быть периодической и хаотической. С точки зрения пространственных профилей можно выделить синхронизацию, когерентность и некогерентность. Режим полной хаотической синхронизации совмещает в себе хаотичность во времени и полную синхронизацию в ансамбле. Режимы когерентности совмещают в себе когерентность и периодичность во времени. Фазовые химеры совмещают когерентность и некогерентность с периодичностью во времени. Амплитудные химеры также совмещают когерентность и некогерентность с хаотичностью во времени.

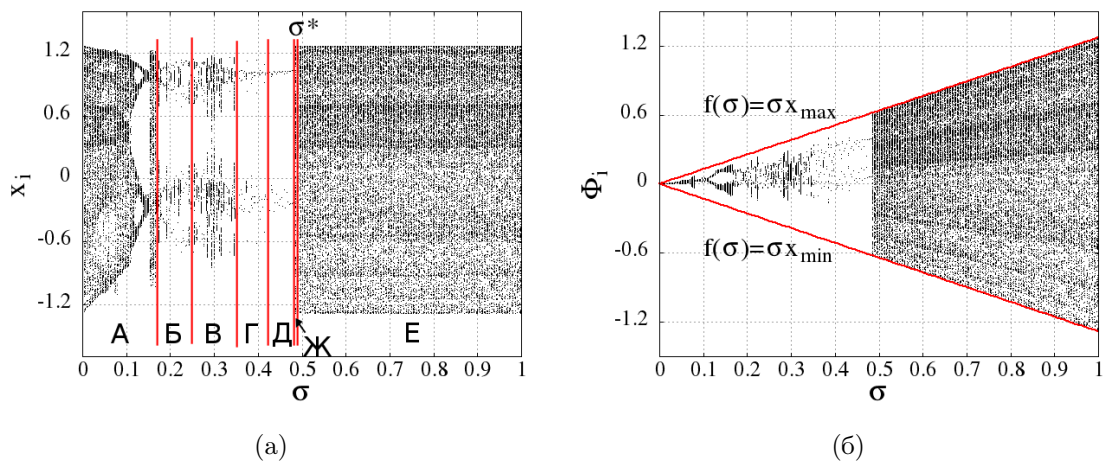


Рисунок 2 — (а) Зависимость множества амплитуд  $x_i^t$  для  $99000 \leq t \leq 100000$  от величины коэффициента связи  $\sigma$  для  $i$ -го осциллятора. (б) Зависимость значений функции связи  $\Phi_i^t$  для 1000 итераций ( $99000 \leq t \leq 100000$ ) от величины коэффициента связи  $\sigma$ , рассчитанных для ансамбля (1) отображений Эно. Верхняя и нижняя границы значений  $\Phi_i(\sigma)$  аппроксимированы линейной функцией  $f(\sigma) = x \cdot \sigma$  ( $x_{\max} = 1.272$ ,  $x_{\min} = -1.283$ ). Параметры:  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $r = 0.36$ .

Во втором пункте второй главы приведены фазо-параметрические диаграммы для амплитуд ансамбля и слагаемых связи (рисунок 2). Обозначение областей характерных режимов: А – пространственно-временной хаос (полная некогерентность); Б – переходная область, наблюдаются пространственно-временной хаос и пространственная некогерентность, но периодичность во времени; В – область реализации химерных состояний; Г, Д – области когерентных профилей с периодичностью колебаний во времени с увеличивающимся периодом при уменьшении  $\sigma$ ; Е – область полной хаотической синхронизации; Ж – область частичной хаотической синхронизации,

которая при  $\alpha = 1.4$  и  $\beta = 0.3$  реализуется в узком интервале  $\sigma$  между областями Д и Е.  $\sigma^*$  – точка blowout бифуркации, когда режим полной хаотической синхронизации с уменьшением  $\sigma$  теряет устойчивость.

В областях полной и частичной хаотической синхронизации динамика определяется исключительно слагаемым связи. При этом значения, которые соответствуют первому слагаемому уравнения (1) много меньше, чем максимальные значения, которые принимает  $\Phi_i$ . В области некогерентности ситуация обратная: первое слагаемое имеет бóльшее значение, чем второе.

Третья глава посвящена ансамблю связанных систем с гиперболическим аттрактором. В первом пункте показано, что переход «синхронизация-рассинхронизация» в такой система осуществляется через уединенные состояния (рисунок 3). Независимо от начальных условий при уменьшении силы связи  $\sigma$  число solitary states плавно увеличивается, что показано на рисунке 4.

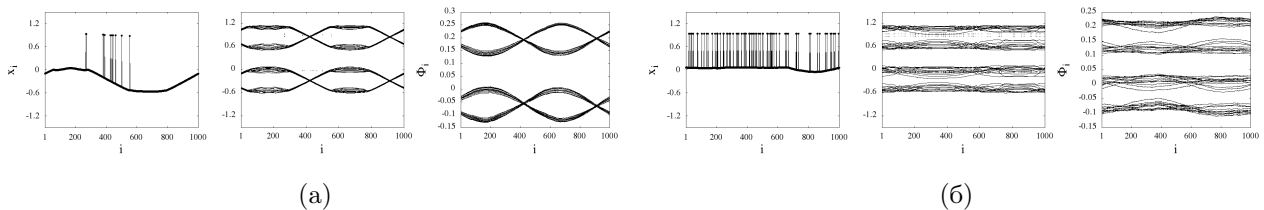


Рисунок 3 – Эволюция мгновенных и пространственно-временных профилей ансамбля (1) при изменении коэффициента связи  $\sigma$ . Слева приведены мгновенные пространственные профили в момент времени  $t = 100000$ , в центре – последние 50 мгновенных снимков пространственных профилей  $x_i^t$ , справа – последние 50 мгновенных снимков слагаемого связи  $\Phi_i^t$ . Параметры:  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $r = 0.193$ ; (а) –  $\sigma = 0.231$ , (б) –  $\sigma = 0.214$ .

Таким образом в системе реализуется переход к некогерентности через последовательное нарастание числа solitary states. Химерных состояний при этом мы не наблюдаем.

Во втором пункте третьей главы приведены фазо-параметрические диаграммы для амплитуд ансамбля и слагаемых связи (рисунок 5). Обозначение областей характерных режимов: А – пространственно-временной хаос (полная некогерентность); Б – область реализации уединенных состояний (solitary state); В – область квазипериодического режима колебаний; Г – области когерентных профилей с хаотической динамикой во времени; Д – область полной хаотической синхронизации.



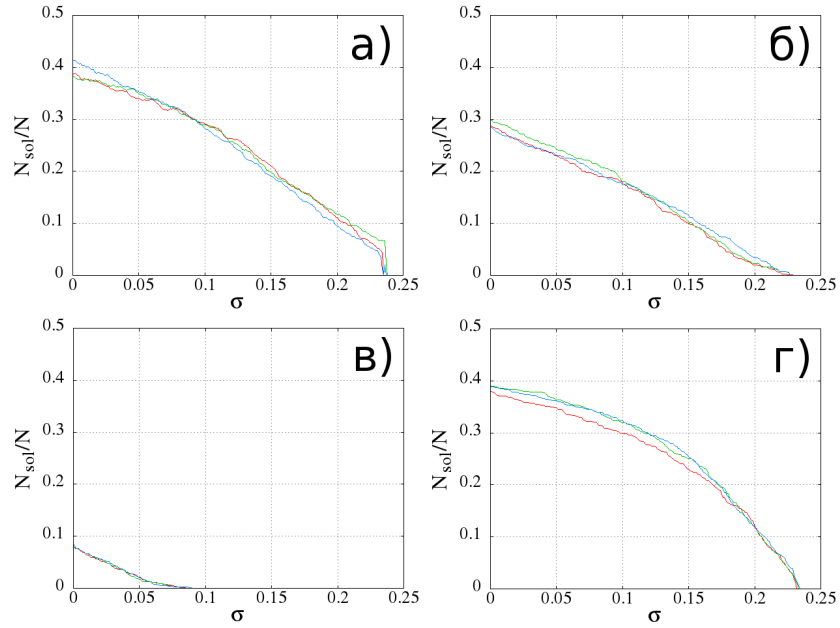


Рисунок 4 – Зависимость числа solitary states  $N_{sol}$  от параметра  $\sigma$ . Параметры:  $r = 0.193$ ,  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $N = 1000$ . Начальные условия случайным образом выбраны из интервала а) –  $[0; 1]$ , б) –  $[-0.5; -0.5]$ , в) –  $[0; 0.5]$ , г) –  $[0; -0.5]$ .

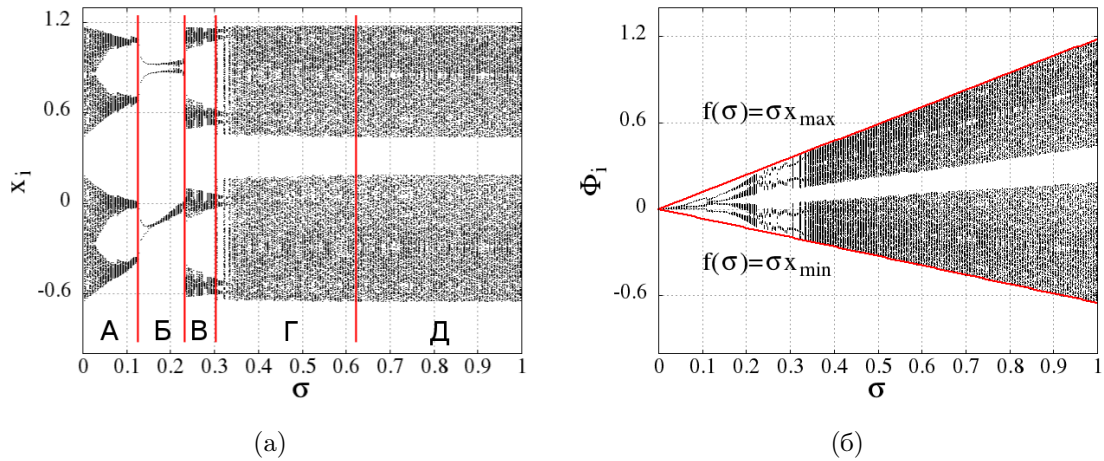


Рисунок 5 – (а) Зависимость множества амплитуд  $x_i^t$  для  $99000 \leq t \leq 100000$  от величины коэффициента связи  $\sigma$  для  $i$ -го осциллятора. (б) Зависимость значений функции связи  $\Phi_i^t$  для 1000 итераций ( $99000 \leq t \leq 100000$ ) от величины коэффициента связи  $\sigma$ , рассчитанных для ансамбля (1) отображений Лози. Верхняя и нижняя границы значений  $\Phi_i(\sigma)$  аппроксимированы линейной функцией  $f(\sigma) = x \cdot \sigma$  ( $x_{max} = 1.18$ ,  $x_{min} = -0.65$ ). Параметры:  $\alpha = 1.4$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $r = 0.193$ .

Еще одной интересной особенностью динамики ансамбля отображений Лози является возможность появления бегущих волн. Этот режим имеет место при малых значениях радиуса связи  $r \leq 0.05$  и больших значениях силы связи  $\sigma \geq 0.7$ . На рисунке 6 представлен такой режим. Как мы видим динамика во времени всех элементов является периодической с периодом 4, поэтому для лучшей иллюстрации существования бегущих волн в системе на пространственно-временные диаграммы нанесены только каждые четвертые итерации, т.е. мы отбрасываем период.

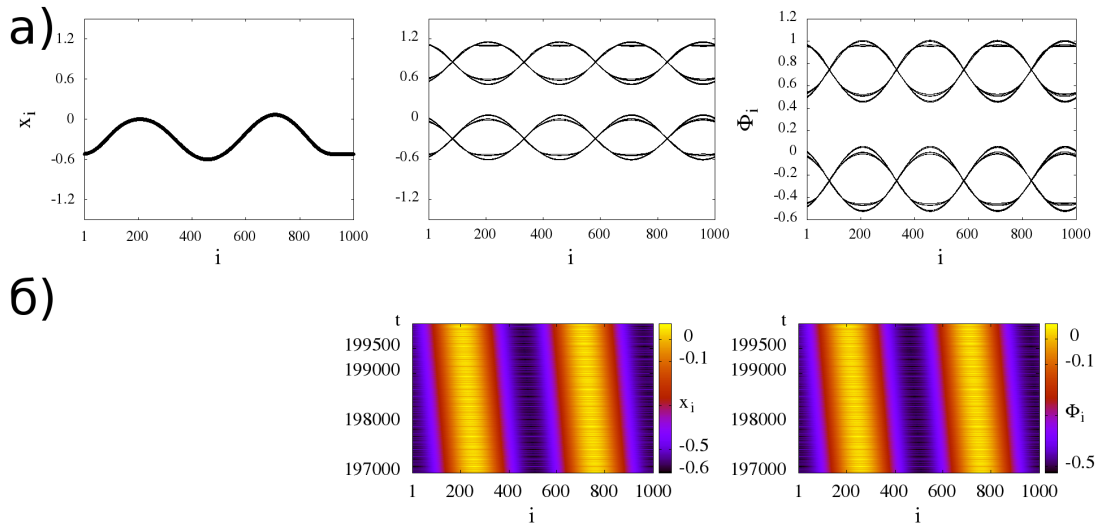


Рисунок 6 — Режим бегущих волн. (а) Слева приведен мгновенный пространственный профиль, в центре — пространственно-временной профиль, справа — пространственно-временные профили функции связи  $\Phi_i^t$ ; (б) в центре — пространственно-временная диаграмма, справа — пространственно-временная диаграмма функции связи  $\Phi_i^t$  (с учетом периодической составляющей — отображается каждая 4 итерация). Начальные условия случайным образом выбраны из интервала  $[-0.5; 0.5]$ . Значения параметров:  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.87$ .

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно сделать следующие основные выводы: режимы полной хаотической синхронизации и когерентности не зависят от парциальных элементов, а определяются исключительно нелокальной связью. Влияние парциальных элементов заключается лишь в динамике во времени и в распределении амплитуд. Если парциальные элементы являются хаотическими, то и синхронизация или когерентность будет хаотической, если периодическими – периодической. Случай пространственной некогерентности – наоборот, в основном определяется влиянием парциальных элементов, а не связи. Парциальные системы определяют временную динамику и распределение амплитуд. При переходе между этими режимами как раз наблюдаются различия. В основном различия заключаются в изменении приоритета связи или динамики парциальных элементов. Таким образом режимы, которые реализуются между когерентностью и некогерентностью включают в себя как влияние нелокальной связи, так и влияние свойств парциальных элементов. В случае негиперболических систем (отображение Эно) с точки зрения временной динамики система претерпевает бифуркации удвоения периода и переход к хаосу, а с точки зрения пространственных распределений переход осуществляется через химерные состояния. Если же в качестве парциальных элементов рассматриваются почти гиперболические системы (отображение Лози) бифуркации удвоения периода отсутствуют и на протяжении всего перехода осцилляторы случайно распределены в окрестностях некоторых состояний. Положения этих состояний, судя по всему, определяются нелокальной связью. Временная динамика является хаотической или близкой к квазипериодической. А с точки зрения изменения в пространственных распределениях переход от когерентности к некогерентности реализуется не через химерные состояния, а через *solitary states*. Количество которых, как было показано на рисунке 4, увеличивается плавно и изменяется в малых пределах при изменении начальных условий выбранных из одного интервала (при фиксированном значении  $\sigma$ ).

Кроме того, стоит отметить, что в ансамбле отображений Лози реализуется режим бегущих волн (рисунок 6), который не реализуется в ансамбле отображений Эно. Этот режим имеет место при малом значении радиуса

связи и большом значении силы связи, то есть реализуется вдали от перехода “когерентность–некогерентность”. Также стоит отметить, что этот режим уже наблюдался в кольце нелокально связанных систем Лоренца. А в ансамблях нелокально связанных отображений Эно, логистических отображений, систем Ресслера это эффект не был обнаружен. Отсюда можно сделать некоторое обобщение: ансамбль нелокально связанных систем с почти гиперболическим аттрактором (отображение Лози или система Лоренца) может демонстрировать такие режимы как бегущие волны и *solitary states*, которые не могут быть получены в ансамблях с негиперболическими аттракторами. А отличительной особенностью ансамблей систем с негиперболическим аттрактором (отображение Эно, логистическое отображение, кубическое отображение, система Ресслера) является переход “когерентность–некогерентность”, который реализуется не через *solitary states*, а через химерные состояния.

Материалы выпускной квалификационной работы содержатся в двух опубликованных статьях:

- Rybalova, E., Semenova, N., Strelkova, G., and Anishchenko, V. Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors //The European Physical Journal Special Topics;
- Semenova, N. I., Rybalova, E. V., Strelkova, G. I., and Anishchenko, V. S. “Coherence–incoherence” transition in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators with nonhyperbolic and hyperbolic attractors //Regular and Chaotic Dynamics.

Основные результаты данной работы были представлены на следующих конференциях:

- Студенческая научная конференция физического факультета, Саратовского государственного университета, 20 апреля 2016<sup>7</sup>;
- Международная конференция «Saratov Fall Meeting», (27–30 сентября 2016, г.Саратов)<sup>8</sup>.

---

<sup>7</sup>Рыбалова Е.В. Влияние типа парциальных элементов на динамику кольца нелокально связанных осцилляторов // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета. 20 апреля, 2016. С. 25–27.

<sup>8</sup>Rybalova E., Semenova N. Transition from spatial synchronization to desynchronization in the ring of nonlocally coupled chaotic oscillators // Saratov Fall Meeting. 27–30 september, 2016. P. 46.