

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Переход «когерентность–некогерентность» в ансамблях
нелокально связанных хаотических осцилляторов с
негиперболическими и гиперболическими аттракторами**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 4 курса 421 группы
направления 03.03.03 «Радиофизика»
физического факультета

Рыбаловой Елены Владиславовны

Научный руководитель

зав. кафедрой, д.ф.-м.н., профессор _____ Анищенко В.С.

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор _____ Анищенко В.С.

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Весь мир представляет из себя большой набор сетей с различной природой парциальных элементов, с различной топологией связи между ними, что приводит к большому количеству наблюдаемых в них типов динамики. Примером таких структур могут служить косяки рыб и стаи птиц в животном мире, технические сети такие, как энергосистемы стран и сети авиалиний, различные социальные и биологические сети. Данный факт притягивает множество ученых к изучению коллективной динамики сложных систем взаимосвязанных нелинейных осцилляторов, образования различных пространственно-временных структур и их синхронизации.

До 2002 года считалось, что в сетях связанных идентичных осцилляторов могут наблюдаться только два явления: фазовая синхронизация и медленное перемещение (дрейф). Работа Йошики Курамото и Дорсурен Баттогтох¹, в которой изучалась система нелокально связанных фазовых осцилляторов, показала, что в таких сетях могут возникать сложные структуры, представляющие собой сосуществование кластеров осцилляторов с синхронной динамикой и кластеров с асинхронной динамикой, которые четко разделены в пространстве. В дальнейшем в работе Стивена Строгатса² динамика в ансамблях с такой пространственной структурой была названа «химерной структурой» или просто «химера». Как и в мифологии, в сети одинаковых осцилляторов химера представляет собой сочетание несочитаемого.

Недавние работы показали, что появление химерных состояний не ограничивается фазовыми осцилляторами, они наблюдаются в ансамблях с различными типами парциальных элементов: начиная от дискретных во времени и непрерывных во времени хаотических систем, осцилляторов Ван дер Поля до моделей популяций и автономных булевых сетей. На данный момент этот эффект наблюдался в реальных экспериментах: в химических реакциях и лазерных решетках. Сейчас ведутся работы по возможному применению химерных состояний к описанию динамики ансамблей в живой природе. Химерные состояния исследуются применительно к анализу болезни Паркинсо-

¹Kuramoto Y., Battogtokh D. Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // *Nonlinear Phenom. Complex Syst.*, 4:380-385. 2002.

²Abrams D. M., Strogatz S. H. Chimera states for coupled oscillators // *Physical review letters*. 2004. Vol. 93, no. 17. P. 174102.

на, поочередного сна полушарий головного мозга, частичной синхронизация в нейронной активности при движении глаза, динамике сердечной мышцы (фибрилляция желудочков) и др. Особенность химерных состояний, исследуемых в экспериментах и численном моделировании, заключается в том, что они возникают в ансамблях идентичных парциальных элементов с симметричной топологией связи.

Химерные структуры исследуются с точки зрения как временной, так и пространственной динамики. Анализируются автокорреляционные функции и коэффициенты диффузии, ляпуновские показатели и функций взаимной корреляции. Однако не так много работ, в которых исследуется влияние свойств именно парциальных элементов на возникновение химерных состояний. В работе Семеновой³ предпринята попытка сделать обобщение уже имеющихся результатов применительно к ансамблям элементов с хаотической динамикой. Были предложены свойства, которыми должны обладать парциальные элементы, чтобы ансамбли, состоящие из них, демонстрировали химерные состояния. В частности, было сделано предположение о возникновении химерных состояний только в ансамблях связанных систем с негиперболическим хаотическим аттрактором. Это предположение было подтверждено для таких негиперболических систем, как логистическое отображение, отображение Эно, система Рёсслера, генератор Анищенко-Астахова. Для почти гиперболических систем было показано, что химерные состояния в них не наблюдаются. В качестве примеров таких парциальных систем приводятся отображение Лози и система Лоренца. В ансамблях элементов с гиперболическим аттрактором переход «синхронизация-рассинхронизация» осуществляется через уединенные состояния (solitary state).

Целью данной выпускной квалификационной работы было изучить сходства и различия характеристик перехода «когерентность–некогерентность» в ансамбле нелокально связанных хаотических осцилляторов с негиперболическими и гиперболическими аттракторами.

³Does hyperbolicity impede emergence of chimera states in networks of nonlocally coupled chaotic oscillators? / N. Semenova, A. Zakharova, E. Schöll et al. // EPL (Europhysics Letters). 2015. Vol. 112, no. 4. P. 40002.

Для достижения целей были поставлены следующие **задачи**:

1. Изучить мгновенные профили колец при различных типах парциальных элементов и различной силе связи между элементами;
2. Проанализировать влияние слагаемого связи в ансамблях;
3. Сравнить полученные результаты.

Для выполнения поставленных задач применялось компьютерное моделирование, которое включало в себя написание программного кода на языке программирования C, и визуализацию полученных данных с помощью программы Gnuplot.

Данная работа включает в себя введение (3-5 стр), три главы: «Исследуемая модель. Ансамбли не локально связанных отображений Эно и Лози» (6-9 стр); «Ансамбль связанных систем с негиперболическими аттракторами» (10-20 стр), включающая в себя два пункта: «Особенности перехода "синхронизация–рассинхронизация" в ансамбле связанных систем с негиперболическими аттракторами» (10-16 стр), «Анализ влияния слагаемого связи в ансамбле негиперболических систем» (16-20 стр); «Ансамбль связанных систем с гиперболическими аттракторами» (21-31 стр), включающая в себя два пункта: «Особенности перехода "синхронизация–рассинхронизация" в ансамбле связанных систем с гиперболическими аттракторами» (21-26 стр), «Анализ влияния слагаемого связи в ансамбле гиперболических систем» (26-31 стр); заключение (32-34 стр) и список использованных источников (35-38 стр).

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

В первой главе рассматривается математическая модель исследуемого ансамбля нелокально связанных парциальных элементов с периодическими граничными условиями:

$$\begin{aligned} x_i^{t+1} &= (1 - \sigma)f_x(x_i^t, y_i^t) + \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P; j \neq i}^{i+P} f_x(x_j^t, y_j^t) \\ y_i^{t+1} &= f_y(x_i^t, y_i^t), \end{aligned} \quad (1)$$

где t обозначает дискретное время, $i = 1, 2, \dots, N$ – номер осциллятора, N – число элементов в кольце, σ – коэффициент связи, P число соседних элементов слева и справа, связанных с i -ым элементом, $f_x(x, y)$ есть первое уравнение двумерного отображения: $f_x(x, y) = 1 - \alpha x^2 + y$, $f_y(x, y) = \beta x$ – второе уравнение. Было введено обозначение $r = P/N$ – радиус нелокальной связи.

Как видно из системы уравнений (1), второе слагаемое в первом уравнении отражает влияние соседей $i - P \leq j \leq i + P$ на i -ый осциллятор. Мы обозначили его как $\Phi_i = \frac{\sigma}{2P} \sum_{j=i-P; j \neq i}^{i+P} f(x_j^t, y_j^t)$ и назвали слагаемым связи.

В качестве базовых моделей в ансамблях нелокально связанных хаотических осцилляторов рассматриваются дискретные системы Эно и Лози.

Отображение Эно⁴:

$$\begin{aligned} x^{t+1} &= 1 - \alpha(x^t)^2 + y^t \\ y^{t+1} &= \beta x^t, \end{aligned} \quad (2)$$

где t – дискретное время ($t = 1, 2, \dots$), α и β – параметры. Отображение Эно (2) описывает динамику достаточно широкого класса хаотических систем. Его аттрактор относится к классу негиперболических и по определению Афраймовича–Шильникова⁵ являются квазиаттракторами, для которых типична мультистабильность.

⁴Henon M. A two-dimensional mapping with a strange attractor // The Theory of Chaotic Attractors. Springer, 1976. P. 94–102.

⁵Sil'nikov L. A contribution to the problem of the structure of an extended neighborhood of a rough equilibrium state of saddle-focus type // Mathematics of the USSR-Sbornik. 1970. Vol. 10, no. 1. P. 91.

Отображение Лози ⁶:

$$\begin{aligned}x^{t+1} &= 1 - \alpha|x^t| + y^t \\y^{t+1} &= \beta x^t.\end{aligned}\quad (3)$$

Отображение Лози было специально введено для описания структуры и свойств аттрактора Лоренца в области значений параметров, отвечающих случаю почти гиперболического хаотического аттрактора. Аттрактор Лози в системе (3) так же описывает достаточно широкий круг хаотических систем с аттракторами гиперболического типа.

Таким образом модели (2) и (3) могут быть использованы для описания основных характеристик переходов связанных хаотических осцилляторов с указанными выше типами хаотических аттракторов.

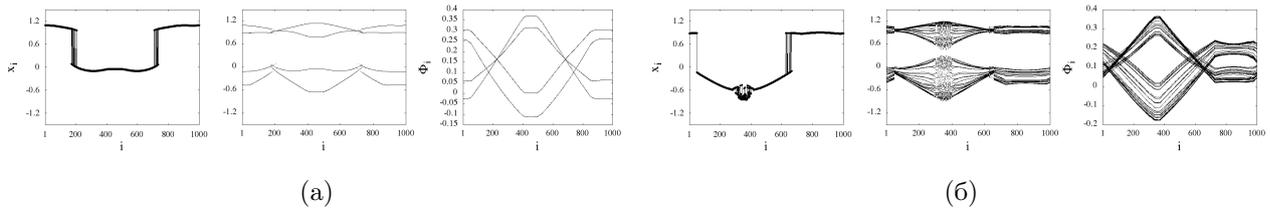


Рисунок 1 – Эволюция мгновенных и пространственно-временных профилей ансамбля (1) при изменении коэффициента связи σ . Слева приведены мгновенные пространственные профили в момент времени $t = 100000$, в центре – последние 50 мгновенных снимков пространственных профилей x_i^t , справа – последние 50 мгновенных снимков слагаемого связи Φ_i^t . (а) – фазовая химера, (б) – фазовая и амплитудная химеры. Параметры: $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, $r = 0.32$; (а) – $\sigma = 0.372$, (б) – $\sigma = 0.323$.

Вторая глава посвящена ансамблю связанных систем с негиперболическим аттрактором. В первом пункте показано, что переход «синхронизация-рассинхронизация» в такой система осуществляется через химерные структуры (рисунок 1). Было определено, что для формирования химерных состояний основным условием является периодическое во времени решение с периодом колебаний ≥ 4 . Возникновение амплитудной химеры сопровождается резкой хаотизацией колебаний соответствующего кластера элементов ансамбля и функции связи.

⁶Lozi R. Un attracteur etrange (?) du type attracteur de Henon // Le Journal de Physique Colloques. 1978. Vol. 39, no. C5. P. C5-9.

Резюмируя результаты режимы функционирования ансамбля (1) можно обобщить следующим образом. Динамики парциальных элементов во времени может быть периодической и хаотической. С точки зрения пространственных профилей можно выделить синхронизацию, когерентность и некогерентность. Режим полной хаотической синхронизации совмещает в себе хаотичность во времени и полную синхронизацию в ансамбле. Режимы когерентности совмещают в себе когерентность и периодичность во времени. Фазовые химеры совмещают когерентность и некогерентность с периодичностью во времени. Амплитудные химеры также совмещают когерентность и некогерентность с хаотичностью во времени.

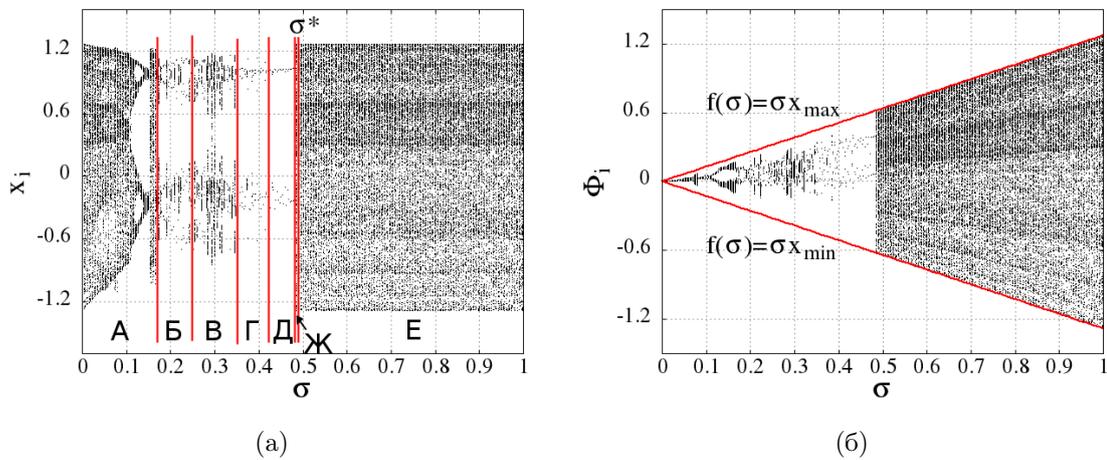


Рисунок 2 — (а) Зависимость множества амплитуд x_i^t для $99000 \leq t \leq 100000$ от величины коэффициента связи σ для i -го осциллятора. (б) Зависимость значений функции связи Φ_i^t для 1000 итераций ($99000 \leq t \leq 100000$) от величины коэффициента связи σ , рассчитанных для ансамбля (1) отображений Эно. Верхняя и нижняя границы значений $\Phi_i(\sigma)$ аппроксимированы линейной функцией $f(\sigma) = x \cdot \sigma$ ($x_{\max} = 1.272$, $x_{\min} = -1.283$). Параметры: $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, $r = 0.36$.

Во втором пункте второй главы приведены фазо-параметрические диаграммы для амплитуд ансамбля и слагаемых связи (рисунок 2). Обозначение областей характерных режимов: А — пространственно-временной хаос (полная некогерентность); Б — переходная область, наблюдаются пространственно-временной хаос и пространственная некогерентность, но периодичность во времени; В — область реализации химерных состояний; Г, Д — области когерентных профилей с периодичностью колебаний во времени с увеличивающимся периодом при уменьшении σ ; Е — область полной хаотической синхронизации; Ж — область частичной хаотической синхронизации,

которая при $\alpha = 1.4$ и $\beta = 0.3$ реализуется в узком интервале σ между областями Д и Е. σ^* – точка blowout бифуркации, когда режим полной хаотической синхронизации с уменьшением σ теряет устойчивость.

В областях полной и частичной хаотической синхронизации динамика определяется исключительно слагаемым связи. При этом значения, которые соответствуют первому слагаемому уравнения (1) много меньше, чем максимальные значения, которые принимает Φ_i . В области некогерентности ситуация обратная: первое слагаемое имеет бóльшее значение, чем второе.

Третья глава посвящена ансамблю связанных систем с гиперболическим аттрактором. В первом пункте показано, что переход «синхронизация-рассинхронизация» в такой система осуществляется через уединенные состояния (рисунок 3). Независимо от начальных условий при уменьшении силы связи σ число solitary states плавно увеличивается, что показано на рисунке 4.

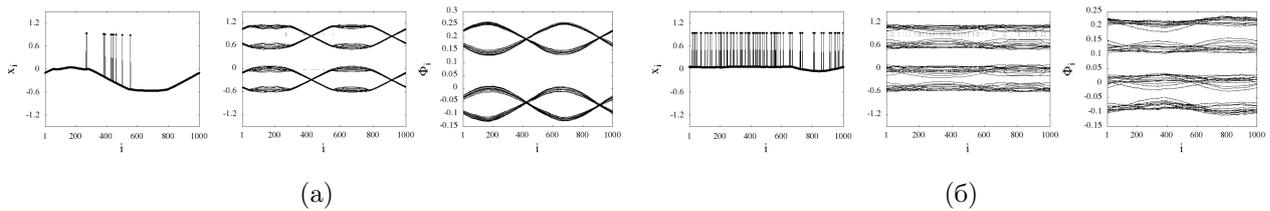


Рисунок 3 – Эволюция мгновенных и пространственно-временных профилей ансамбля (1) при изменении коэффициента связи σ . Слева приведены мгновенные пространственные профили в момент времени $t = 100000$, в центре – последние 50 мгновенных снимков пространственных профилей x_i^t , справа – последние 50 мгновенных снимков слагаемого связи Φ_i^t . Параметры: $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, $r = 0.193$; (а) – $\sigma = 0.231$, (б) – $\sigma = 0.214$.

Таким образом в системе реализуется переход к некогерентности через последовательное нарастание числа solitary states. Химерных состояний при этом мы не наблюдаем.

Во втором пункте третьей главы приведены фазо-параметрические диаграммы для амплитуд ансамбля и слагаемых связи (рисунок 5). Обозначение областей характерных режимов: А – пространственно-временной хаос (полная некогерентность); Б – область реализации уединенных состояний (solitary state); В – область квазипериодического режима колебаний; Г – области когерентных профилей с хаотической динамикой во времени; Д – область полной хаотической синхронизации.

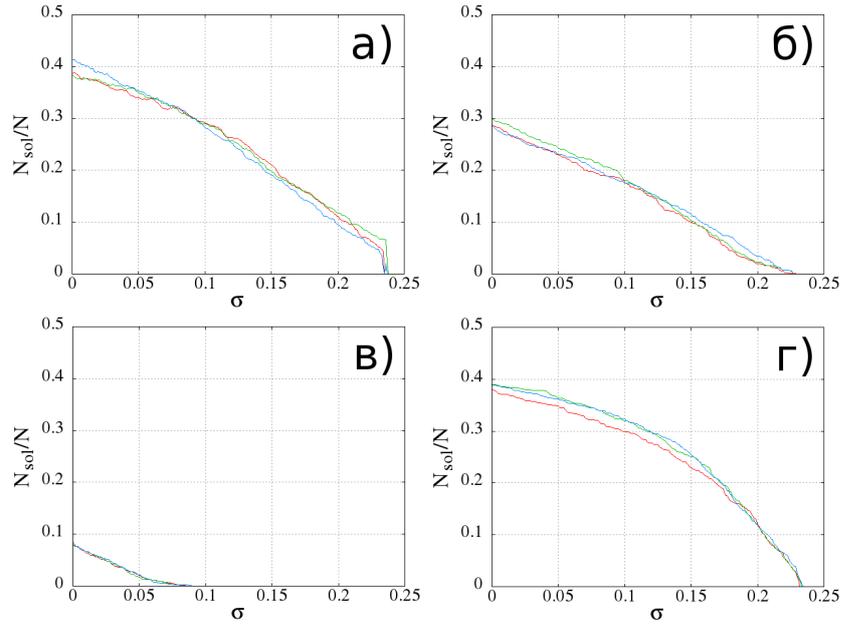


Рисунок 4 – Зависимость числа solitary states N_{sol} от параметра σ . Параметры: $r = 0.193$, $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, $N = 1000$. Начальные условия случайным образом выбраны из интервала а) – $[0; 1]$, б) – $[-0.5; -0.5]$, в) – $[0; 0.5]$, г) – $[0; -0.5]$.

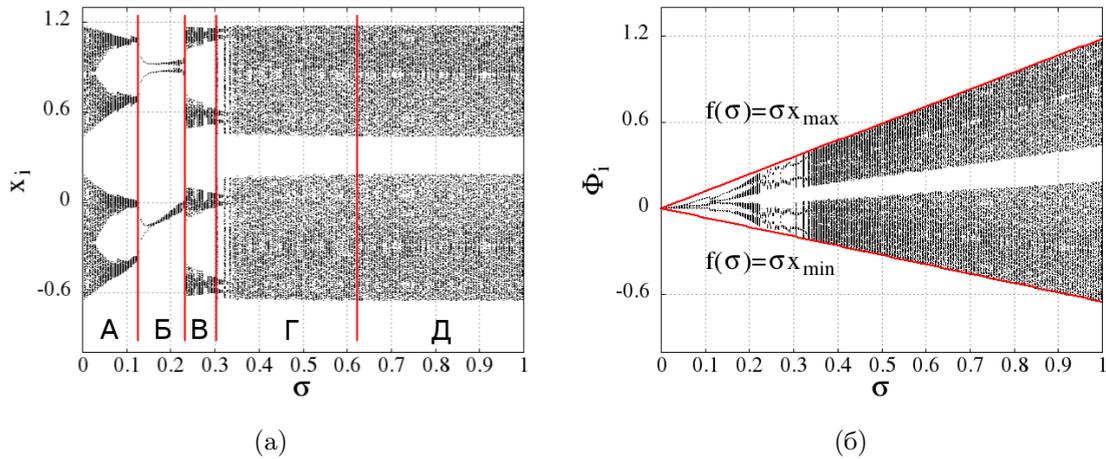


Рисунок 5 – (а) Зависимость множества амплитуд x_i^t для $99000 \leq t \leq 100000$ от величины коэффициента связи σ для i -го осциллятора. (б) Зависимость значений функции связи Φ_i^t для 1000 итераций ($99000 \leq t \leq 100000$) от величины коэффициента связи σ , рассчитанных для ансамбля (1) отображений Лози. Верхняя и нижняя границы значений $\Phi_i(\sigma)$ аппроксимированы линейной функцией $f(\sigma) = x \cdot \sigma$ ($x_{max} = 1.18$, $x_{min} = -0.65$). Параметры: $\alpha = 1.4$, $\beta = 0.3$, $r = 0.193$.

Еще одной интересной особенностью динамики ансамбля отображений Лози является возможность появления бегущих волн. Этот режим имеет место при малых значениях радиуса связи $r \leq 0.05$ и больших значениях силы связи $\sigma \geq 0.7$. На рисунке 6 представлен такой режим. Как мы видим динамика во времени всех элементов является периодической с периодом 4, поэтому для лучшей иллюстрации существования бегущих волн в системе на пространственно-временные диаграммы нанесены только каждые четвертые итерации, т.е. мы отбрасываем период.

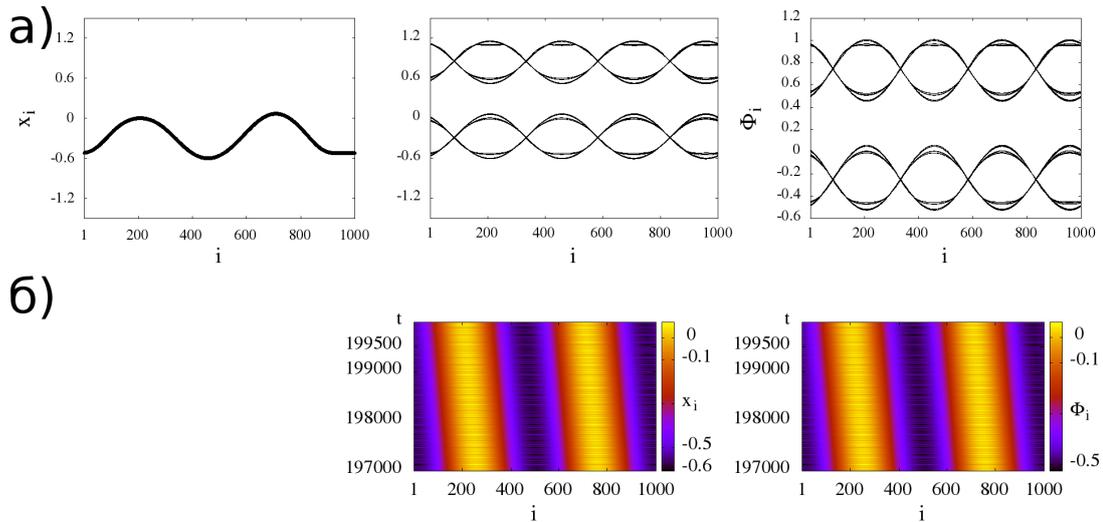


Рисунок 6 — Режим бегущих волн. (а) Слева приведен мгновенный пространственный профиль, в центре — пространственно-временной профиль, справа — пространственно-временные профили функции связи Φ_i^t ; (б) в центре — пространственно-временная диаграмма, справа — пространственно-временная диаграмма функции связи Φ_i^t (с учетом периодической составляющей — отображается каждая 4 итерация). Начальные условия случайным образом выбраны из интервала $[-0.5; 0.5]$. Значения параметров: $r = 0.05$, $\sigma = 0.87$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Можно сделать следующие основные выводы: режимы полной хаотической синхронизации и когерентности не зависят от парциальных элементов, а определяются исключительно нелокальной связью. Влияние парциальных элементов заключается лишь в динамике во времени и в распределении амплитуд. Если парциальные элементы являются хаотическими, то и синхронизация или когерентность будет хаотической, если периодическими – периодической. Случай пространственной некогерентности – наоборот, в основном определяется влиянием парциальных элементов, а не связи. Парциальные системы определяют временную динамику и распределение амплитуд. При переходе между этими режимами как раз наблюдаются различия. В основном различия заключаются в изменении приоритета связи или динамики парциальных элементов. Таким образом режимы, которые реализуются между когерентностью и некогерентностью включают в себя как влияние нелокальной связи, так и влияние свойств парциальных элементов. В случае негиперболических систем (отображение Эно) с точки зрения временной динамики система претерпевает бифуркации удвоения периода и переход к хаосу, а с точки зрения пространственных распределений переход осуществляется через химерные состояния. Если же в качестве парциальных элементов рассматриваются почти гиперболические системы (отображение Лози) бифуркации удвоения периода отсутствуют и на протяжении всего перехода осцилляторы случайно распределены в окрестностях некоторых состояний. Положения этих состояний, судя по всему, определяются нелокальной связью. Временная динамика является хаотической или близкой к квазипериодической. А с точки зрения изменения в пространственных распределениях переход от когерентности к некогерентности реализуется не через химерные состояния, а через *solitary states*. Количество которых, как было показано на рисунке 4, увеличивается плавно и изменяется в малых пределах при изменении начальных условий выбранных из одного интервала (при фиксированном значении σ).

Кроме того, стоит отметить, что в ансамбле отображений Лози реализуется режим бегущих волн (рисунок 6), который не реализуется в ансамбле отображений Эно. Этот режим имеет место при малом значении радиуса

связи и большом значении силы связи, то есть реализуется вдали от перехода “когерентность–некогерентность”. Также стоит отметить, что этот режим уже наблюдался в кольце нелокально связанных систем Лоренца. А в ансамблях нелокально связанных отображений Эно, логистических отображений, систем Ресслера это эффект не был обнаружен. Отсюда можно сделать некоторое обобщение: ансамбль нелокально связанных систем с почти гиперболическим аттрактором (отображение Лози или система Лоренца) может демонстрировать такие режимы как бегущие волны и *solitary states*, которые не могут быть получены в ансамблях с негиперболическими аттракторами. А отличительной особенностью ансамблей систем с негиперболическим аттрактором (отображение Эно, логистическое отображение, кубическое отображение, система Ресслера) является переход “когерентность–некогерентность”, который реализуется не через *solitary states*, а через химерные состояния.

Материалы выпускной квалификационной работы содержатся в двух опубликованных статьях:

- Rybalova, E., Semenova, N., Strelkova, G., and Anishchenko, V. Transition from complete synchronization to spatio-temporal chaos in coupled chaotic systems with nonhyperbolic and hyperbolic attractors //The European Physical Journal Special Topics;
- Semenova, N. I., Rybalova, E. V., Strelkova, G. I., and Anishchenko, V. S. “Coherence–incoherence” transition in ensembles of nonlocally coupled chaotic oscillators with nonhyperbolic and hyperbolic attractors //Regular and Chaotic Dynamics.

Основные результаты данной работы были представлены на следующих конференциях:

- Студенческая научная конференция физического факультета, Саратовского государственного университета, 20 апреля 2016⁷;
- Международная конференция «Saratov Fall Meeting», (27–30 сентября 2016, г.Саратов)⁸.

⁷Рыбалова Е.В. Влияние типа парциальных элементов на динамику кольца нелокально связанных осцилляторов // Научные исследования студентов Саратовского государственного университета. 20 апреля, 2016. С. 25–27.

⁸Rybalova E., Semenova N. Transition from spatial synchronization to desynchronization in the ring of nonlocally coupled chaotic oscillators // Saratov Fall Meeting. 27–30 september, 2016. P. 46.