

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Исследование трансформаций фазового пространства
системы связанных фазовых осцилляторов при нарушении
симметрии**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

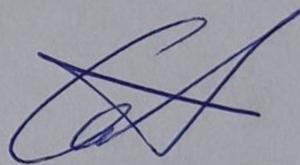
студентки 2 курса 214 группы

направления 03.04.01 прикладные математика и физика

факультета нелинейных процессов

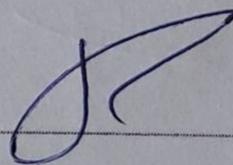
Рахмановой Алии Жавдятовны

Научный руководитель
доцент, к.ф.-м.н.



А.В. Савин

Зав. кафедрой нелинейной физики
доцент, д.ф.-м.н.



Е.Н. Бегинин

Саратов 2018 г.

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра нелинейной физики

**Исследование трансформаций фазового пространства
системы связанных фазовых осцилляторов при нарушении
симметрии**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 214 группы

направления 03.04.01 прикладные математика и физика

факультета нелинейных процессов

Рахмановой Алии Жавдятовны

Научный руководитель

доцент, к.ф.-м.н.

_____ А.В. Савин

Зав. кафедрой нелинейной физики

доцент, д.ф.-м.н.

_____ Е.Н. Бегинин

Саратов 2018 г.

ВВЕДЕНИЕ

Традиционно различают два класса динамических систем: консервативные и диссипативные системы. Для консервативных систем характерно сохранение фазового объема в процессе временной эволюции. Фазовый объем диссипативных систем изменяется с течением времени, также в фазовом пространстве таких систем существуют притягивающие множества (аттрактор).

К настоящему времени сформировались две фактически различные ветви нелинейной динамики, посвященных изучению консервативных и диссипативных систем.

Однако в рамках одной системы могут проявляться как диссипативные, так и консервативные свойства. Такое явление, которое было обнаружено сравнительно недавно [1-4], получило название смешанной динамики.

В работах [1-6] рассматриваются обратимые системы, под которыми понимаются системы инвариантные не только относительно обращения времени, но и некоторого преобразования пространственных координат (инволюции). В случае дискретных систем, обратимость отображения означает, что прямое и обратное отображения исходной системы обладают одинаковой динамикой на множестве, удовлетворяющем инволюции.

При обращении времени устойчивые объекты становятся неустойчивыми, и наоборот. Если в обратимой системе некоторое множество инвариантно относительно преобразования координат, то траектории, принадлежащие данному инвариантному множеству, останутся без изменения при обращении времени. В таком случае можно говорить, что на данном множестве динамика системы обладает консервативными свойствами.

Простейшим примером системы, демонстрирующей такую динамику, может служить цепочка связанных фазовых осцилляторов, динамика которой определяется функцией связи между соседними осцилляторами, которая может быть, как симметричной, так и несимметричной. Подобная система связанных осцилляторов исследуется в работах [5-7].

При определенном выборе функции связи система связанных осцилляторов обладает симметрией и, будучи диссипативной системой, демонстрирует консервативную динамику на некотором множестве. В случае произвольной функции связи данная консервативная динамика нарушается, и в фазовом пространстве появляются характерные для диссипативных систем структуры.

Целью данной работы является исследование изменений в динамике этой системы, вызванных нарушением симметрии фазового пространства.

Данное исследование проводилось различными методами, такими как построение фазовых портретов и карты динамических режимов, расчет ляпуновских показателей и чисел вращения, численный поиск устойчивых и неустойчивых точек.

Работа состоит из двух глав, введения и заключения. В первой главе данной работы представлено исследование системы с симметрией: были построены фазовые портреты и изучена динамика системы из четырех осцилляторов. Исследована зависимость значений ляпуновских показателей от амплитуды связи, а также построена зависимость числа вращения от начального значения одной из фазовых переменных.

Во второй главе представлено исследование этой же системы, но с нарушением симметрии. Представлено исследование структур в фазовом пространстве, возникающих при изменении значений управляющих параметров, а также механизмов их образования.

Результаты частично получены в ходе работы по грантам РФФИ (проект №14-02-31064) и Президентской программой для поддержки ведущих научных школ (НШ-1726.2014.2).

Результаты данной работы были представлены на следующих конференциях: научная конференция «Нелинейные дни в Саратове для молодых», Саратов (2013- 2017), студенческая научная конференция факультета нелинейных процессов, Саратов (2013- 2018), International Conference «Nonlinear Dynamics of Deterministic and Stochastic Systems: Unraveling complexity», Ca-

ратов 2014, всероссийская научная конференция «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика», Саратов (2014-2017), International Conference-School “Dynamics, Bifurcations and Chaos 2015”, Нижний Новгород 2015, Всероссийская научная школа «Нелинейные волны - 2016», Нижний – Новгород 2016, International Conference-School “Dynamics, Bifurcations and Chaos”, Нижний Новгород, 2016 – 2017.

По результатам данной работы имеется три публикации:

1. Чекмарева А.Ж, Савин А.В., Кузнецов А.П. «Разрушение консервативной динамики в фазовых уравнениях для системы связанных осцилляторов при нарушении симметрии»// «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: тез. докл. IX Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2014. – с. 199-200;
2. Чекмарева А.Ж. «Разрушение консервативной динамики в фазовых уравнениях для системы связанных осцилляторов при нарушении симметрии»// «Нелинейные дни в Саратове для молодых - 2014»: сборник материалов научной школы-конференции. Саратов, 17-21 октября, 26-17 ноября, 2014. – Саратов: Изд-во «Наука», 2015. – с.147-150
3. Чекмарева А.Ж, Савин А.В., Кузнецов А.П. «Разрушение консервативной динамики в фазовых уравнениях для системы связанных осцилляторов при нарушении симметрии»// «Наноэлектроника, нанофотоника и нелинейная физика»: тез. докл. X Всерос. конф. молодых ученых. – Саратов: Изд-во «ТехноДекор», 2015. – с. 188-189.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Исследуемая модель. Известно [5,6], что если уравнения, задающие потоковую систему, обладают определенной симметрией, т.е. инвариантны относительно преобразования координат, а сама система обратима, то в ней возможно наблюдение консервативной динамики. Одним из примеров таких систем является рассмотренная в работе [7] система фазовых уравнений, описывающих динамику цепочки связанных осцилляторов:

$$\dot{\psi}_k = \Delta_k + \varepsilon f(\psi_{k-1}) + \varepsilon f(\psi_{k+1}) - 2\varepsilon f(\psi_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1)$$

где ψ_k – разность фаз соседних осцилляторов, Δ_k – разность частот соседних осцилляторов, а $f(\psi)$ – функция связи. В частности, в случае четырех связанных осцилляторов система инвариантна относительно преобразования:

$$\psi_k \rightarrow \pi - \psi_{n-k}, \quad (2)$$

если функция связи содержит только нечетные гармоники. В первой главе работы был рассмотрен случай, когда функция связи имеет вид $f(\psi_k) = \sin(\psi_k)$. Система уравнений для четырех осцилляторов с симметричной функцией связи имеет вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon \sin\psi_1 + \varepsilon \sin\psi_2 \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon \sin\psi_2 + \varepsilon \sin\psi_1 + \varepsilon \sin\psi_3 \\ \dot{\psi}_3 &= 1 - 2\varepsilon \sin\psi_3 + \varepsilon \sin\psi_2 \end{aligned} \quad (3)$$

Если в функции связи присутствуют четные гармоники, то фазовое пространство рассматриваемой системы уже не симметрично. В таком случае в качестве функции связи была выбрана функция вида:

$$f(\psi) = \sin\psi + (A-d)\sin 3\psi + d\sin 2\psi, \quad (4)$$

где параметр d управляет степенью нарушения симметрии. Система уравнений (1) для четырех осцилляторов принимает вид:

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= 1 - 2\varepsilon(\sin\psi_1 + (A-d)\sin\psi_1 + d\sin 2\psi_1) + \\ &\quad + \varepsilon(\sin\psi_2 + (A-d)\sin 3\psi_2 + d\sin 2\psi_2) \\ \dot{\psi}_2 &= 1 - 2\varepsilon(\sin\psi_2 + (A-d)\sin\psi_2 + d\sin 2\psi_2) + \\ &\quad + \varepsilon(\sin\psi_1 + (A-d)\sin 3\psi_1 + d\sin 2\psi_1) + \\ &\quad + \varepsilon(\sin\psi_3 + (A-d)\sin 3\psi_3 + d\sin 2\psi_3) \\ \dot{\psi}_3 &= 1 - 2\varepsilon(\sin\psi_3 + (A-d)\sin\psi_3 + d\sin 2\psi_3) + \\ &\quad + \varepsilon(\sin\psi_2 + (A-d)\sin 3\psi_2 + d\sin 2\psi_2) \end{aligned} \quad (5)$$

При $d=0$ в системе (5) справедливо преобразование вида:

$$\psi_1 \rightarrow \pi - \psi_3, \quad \psi_2 = \pi/2. \quad (6)$$

Траектории симметричны относительно прямой $\psi_1 = \pi - \psi_3$, расположены в плоскости $\psi_2 = \pi/2$. В данной системе инвариантным множеством является плоскость $\psi_2 = \pi/2$.

Исследование фазового пространства системы связанных фазовых осцилляторов с симметричной функцией связи. Обнаружено, что сжатие фазового пространства для системы связанных осцилляторов (3) с симметричной функцией связи не равно единице, а также получено равенство сумм ляпуновских показателей нулю. Это говорит о том, что динамика системы на рассматриваемом сечении близка к консервативной. Кроме того, для данной системы (3) проиллюстрировано существование таких структур как бездвиговые (shearless) торы [8] (торы, возникающие при нарушении условия невырожденности в смысле КАМ теоремы, частота которых соответствует максимуму или минимуму частоты) при различных значениях параметра.

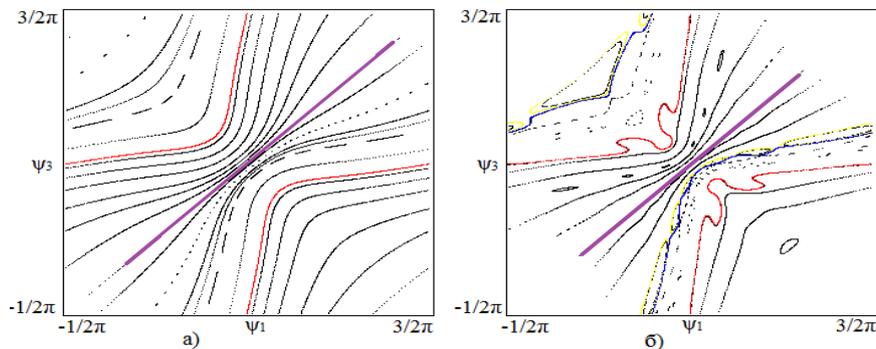


Рис.1. Фазовые портреты системы (3) с отмеченными цветом бездвиговыми торами (лиловый – тор с н.у. ($\psi_1 = \psi_3 = -\pi/2$), красный – тор с н.у. ($\psi_1 = \psi_3 = \pm\pi/2$), желтый – тор с н.у. ($\psi_1 = -\pi/2, \psi_3 = 2.43$), синий – тор с н.у. ($\psi_1 = -\pi/2, \psi_3 = 2.23$) при различных значениях ϵ : а) $\epsilon = 0.255$; б) $\epsilon = 0.348$.

Динамика решения системы из цепочки связанных фазовых осцилляторов с симметричной функцией связи демонстрирует различные режимы от регулярного до хаотического, а рассматриваемой системы свойственно образование также в фазовом пространстве сложных динамических структур, таких как хаотический аттрактор и бездвиговый тор.

Исследование фазового пространства системы связанных фазовых осцилляторов с несимметричной функцией связи. На рис.1 для системы (4) изображены отображения Пуанкаре плоскостью сечения $\psi_2=\pi/2$. Видно, что при отсутствии четной гармоники траектории на фазовой плоскости симметричны относительно прямой $\psi_1+\psi_3=\pi$, такую динамику системы можно назвать симметричной (рис.2а). При наличии четной гармоники (за ее вклад в функции связи отвечает параметр d) симметрия траекторий на фазовой плоскости разрушается, и происходит образование структур, характерных для диссипативной динамики (рис.2б). Так на рис.2в хорошо видно образование устойчивых фокусов, на рис.2г можно видеть устойчивые точки.

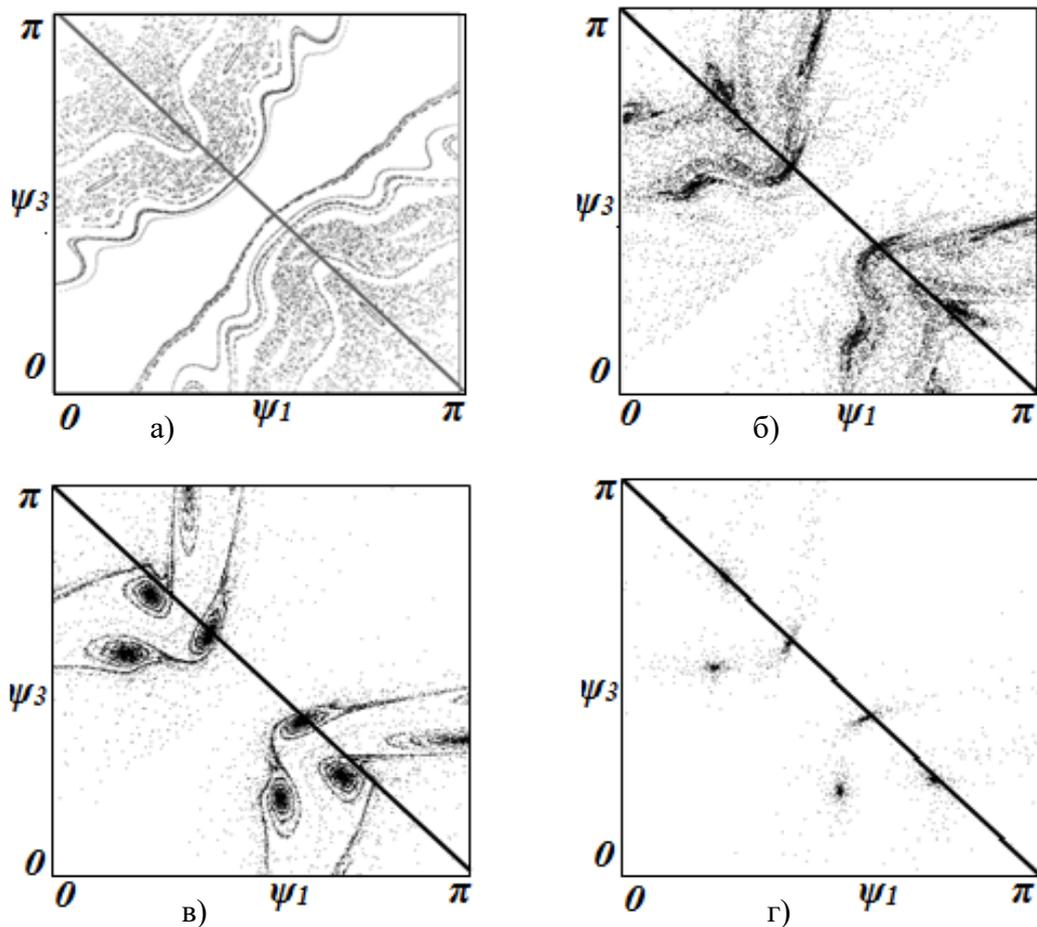


Рис.2. Фазовые портреты системы (5) при: $A=0,2$ и различных значениях параметра d : а) $d=0,0$; б) $d=0,05$; в) $d=0,17$; г) $d=0,2$

Данная система, как видно из рис.2, демонстрирует различные виды динамики. Для определения их определения был построен график зависимости ляпуновских показателей от значений параметра ε при фиксированном значении амплитуды четной гармоники $d=0,16$ (рис.2).

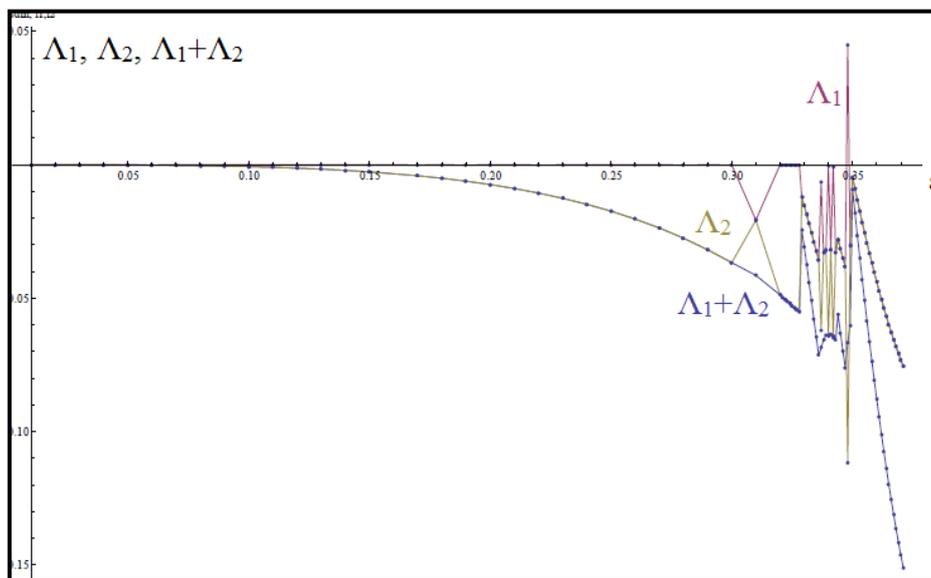


Рис.2. График зависимости ляпуновских показателей и их суммы от значений параметра ε при значении параметра $d=0,16$

При малых значениях параметра ε ляпуновские показатели и их сумма близки к нулю.

Найденные значения ляпуновских показателей для отдельных траекторий полностью не раскрывают механизмы появления и образования структур на фазовой плоскости. Знание расположения аттракторов и их бассейнов при различных значениях управляющих параметров поможет выявить данные механизмы.

Для этого были построены бассейны аттракторов при значении параметра $d=0,16$ и различных значениях параметра ε . При $\varepsilon=0,348$ (рис.3а), соответствующем положительному значению старшего ляпуновского показателя (рис.2), бассейны квазипериодических и периодических аттракторов сильно изрезаны и переплетаются между собой. При $\varepsilon=0,34825$ (рис.3б) наблюдается некоторая бифуркационная ситуация, затем происходит замена бассейнов квазипериодических аттракторов на бассейны 11- и 16-циклов.

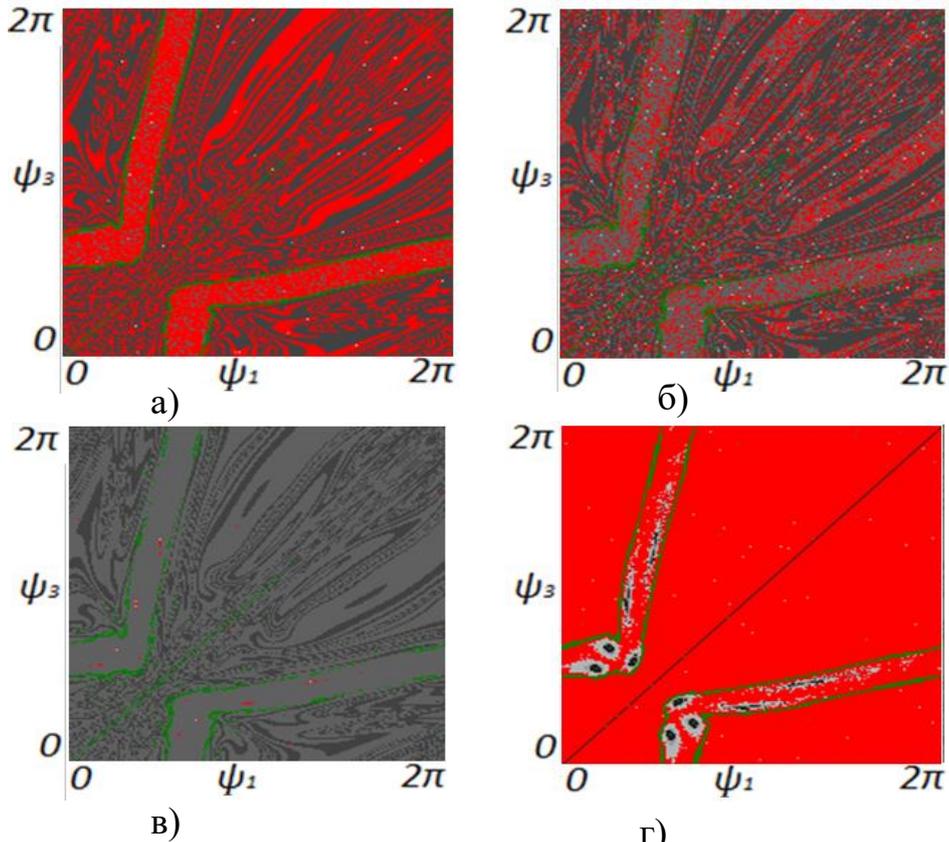


Рис.3 Бассейны аттракторов при $d=0.16$ и различных значениях ε . Красный – бассейны квазипериодических аттракторов, от черного к белому – 1-40-циклы; зеленый-аттракторы: а) $\varepsilon=,348$ б) $\varepsilon=0,34825$ в) $\varepsilon=0,3483$ г) $\varepsilon=0,35$

Для данной системы также были подсчитаны числа вращения, как и для симметричного случая. Подсчеты производились при фиксированном значении уровня нарушения симметрии. Результаты подсчетов представлены графически на рис.4.

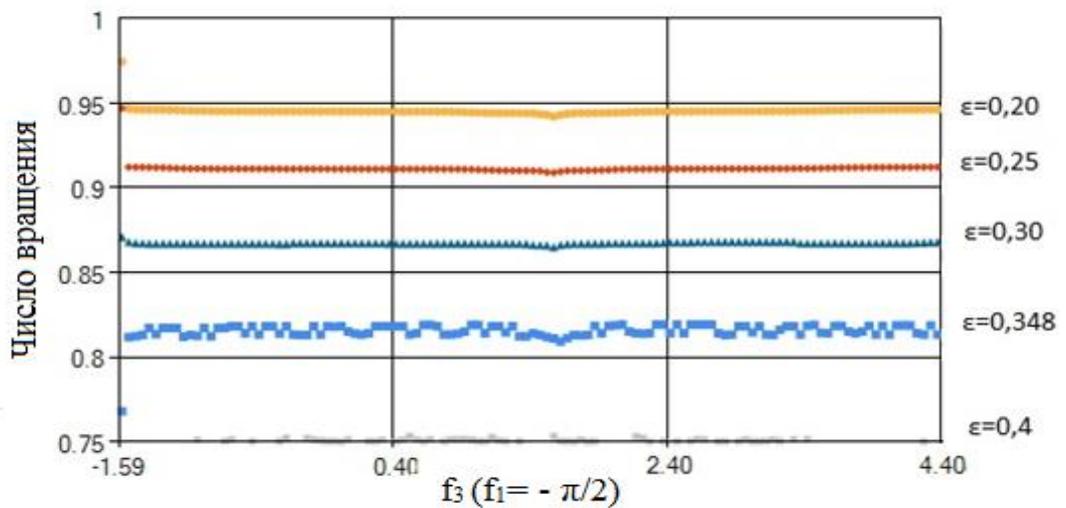


Рис.4. График зависимости числа вращения от значения фазы ψ_3 при различных значениях управляющего параметра ε при фиксированном значении уровня нарушения симметрии $d=0.16$.

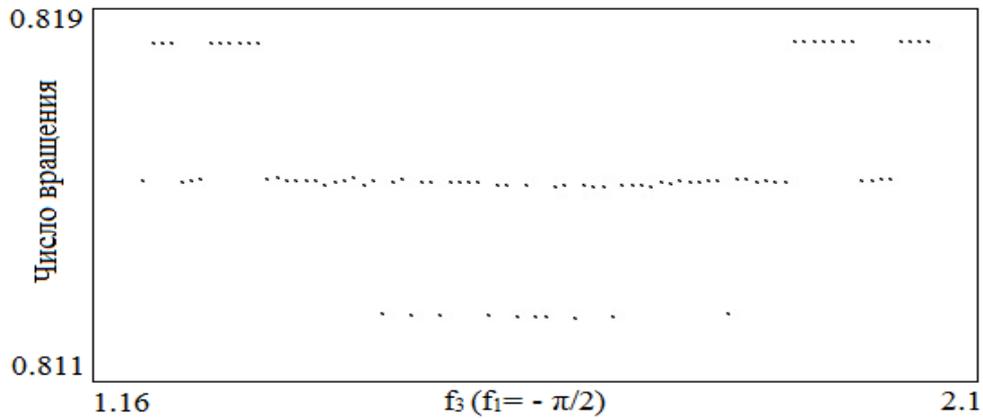


Рис.5. Увеличенный фрагмент графика зависимости числа вращения от значения фазы ψ_3 (рис.6) при $\varepsilon=0,348$ и $d=0,16$.

Была подробно рассмотрена зависимость на графике (рис.4) для значений параметров $\varepsilon=0,348$ и $d=0,16$. Для данных значений параметров был построен увеличенный фрагмент графика (рис.2.8), представленного на рис.5. На графике (рис.5) видно, что на самом деле зависимость числа вращения от фазы имеет ступенчатую структуру, а не гладкую, как представлялась на рис.6 изначально.

Для того, чтобы определить какие типы аттракторов существуют на каждой из «ступенек» рис.5, были построены фазовые портреты для каждой группы значений. На рис. 2.10 видно, что для разных групп начальных значений фазы ψ_3 аттракторы имеют различную структуру.

В зависимости от начального значения фазы ψ_3 в фазовом пространстве при значениях параметров $\varepsilon=0,348$ и $d=0,16$ сосуществуют 5, 11, 16 – циклы. На рис.6а представлены аттракторы два аттрактора 11-цикла с числом вращения 9:11. На рис.6б представлены аттракторы 11-цикл с числом вращения 9:11, а также несколько пар симметричных непериодических аттракторов с числом вращения 0,8151. На рис.6б представлены аттракторы 11-цикл с числом вращения 9:11, 16-цикл с числом вращения 13:16, а также один непериодический аттрактор с числом вращения 0,8125.

В результате исследования системы из цепочки связанных осцилляторов с помощью различных численных методов показано, что при нарушении сим-

метрии, а именно при добавлении в функцию связи четной гармоники, происходит образование периодических и квазипериодических аттракторов различной структуры.

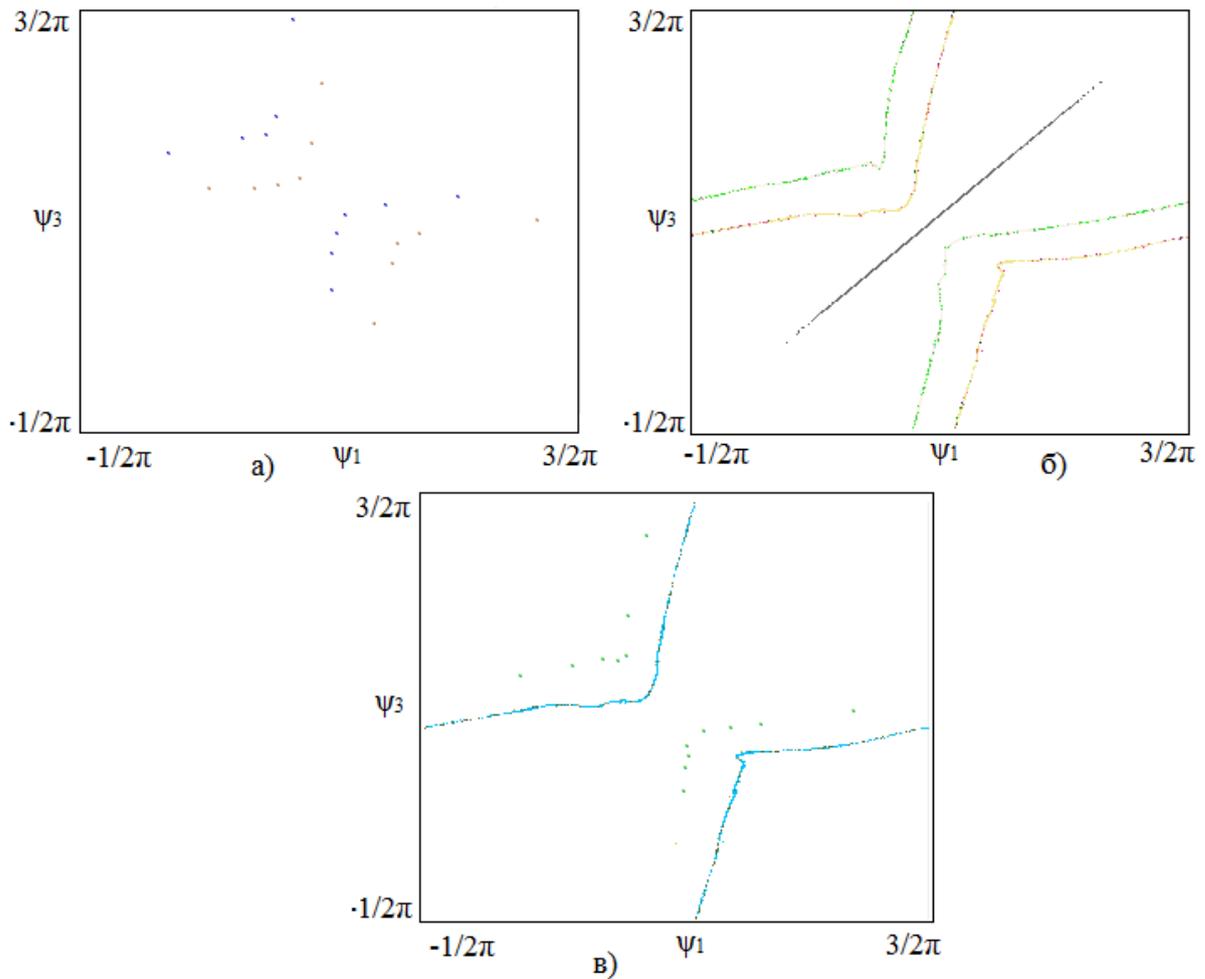


Рис.6. Фазовые портреты системы (4) при $\varepsilon=0,348$ и $d=0,16$ (каждому цвету соответствует один аттрактор), где начальные значения для фаз соответствуют значениям из рис.7 при начальных значениях фазы ψ_3 : а) верхняя «ступенька», б) средняя «ступенька», в) нижняя «ступенька».

Старший ляпуновский показатель при различных значениях управляющего параметра в случае несимметричной функции связи меньше нуля, что свидетельствует о том, что динамика рассматриваемой системы (5) диссипативна. Но существует небольшой интервал управляющего параметра, соответствующего амплитуде функции связи при фиксированном значении амплитуды четной гармоники, где старший ляпуновский показатель больше нуля. Это позволяет утверждать, что при данных значениях управляющих параметров в системе существует хаотический аттрактор.

В ходе работы были выяснены, механизмы появления и исчезновения данной инвариантной кривой. Обнаружено, что с существующей инвариантной кривой могут происходить как бифуркации образования резонансных циклов, так и кризисы вследствие столкновения с границей бассейна притяжения.

Также исследованы трансформации бездвиговой кривой, которая существовала при симметричной связи между осцилляторами. На ее месте образуется группа периодических и непериодических аттракторов, среди которых есть инвариантная кривая.

Обнаружено, что при некоторых критических значениях параметров существуют периодические и непериодические аттракторы. В результате подсчета чисел вращения обнаружено сосуществование периодических и непериодических аттракторов. Форма и тип аттрактора для данных значений параметров определяется начальными условиями фазы, что говорит о мультистабильности системы в данном случае.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе данной работы исследована динамика цепочки четырех связанных фазовых осцилляторов с симметрией и с нарушением симметрии.

Продемонстрировано, что эта динамика не является консервативной в строгом смысле (сжатие в фазовом пространстве зависит от значений параметра), однако имеет симметричный спектр ляпуновских показателей.

Также при определенных значениях управляющего параметра проиллюстрировано существование бездвиговой кривой, которая подвергается трансформациям при нарушении симметрии функции связи между осцилляторами.

Обнаружено, что при нарушении симметрии в системе возникает большое количество различных аттракторов, которые могут быть периодическими, так и непериодическими (инвариантная кривая и хаотический аттрактор).

Выявлено, что при изменении значений управляющих параметров может происходить возникновение и исчезновение инвариантной кривой могут

в результате как бифуркации образования резонансных циклов, так и вследствие столкновения с границей бассейна притяжений периодических аттракторов.

ИСПОЛЬЗУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

- [1] Gonchenko S V, Turaev D V and Shilnikov L P, 1997, On Newhouse domains of two-dimensional diffeomorphisms with a structurally unstable heteroclinic cycle Proc. Steklov Inst. Math., 216, 70-118.**(12)**
- [2] Gonchenko S V, Stenkin O V and Shilnikov L P, 2002, On Newhouse regions with infinitely many stable and unstable invariant tori Proceedings of the Int.Conf. "Progress in Nonlinear Science" dedicated to 100th Anniversary of A.A.Andronov, July 2-6 v.1 "Mathematical Problems of Nonlinear Dynamics", Nizhni Novgorod, 80-102.**(16)**
- [3] Gonchenko S V, Stenkin O V and Shilnikov L P, 2006, On the existence of infinitely many stable and unstable invariant tori for systems from Newhouse regions with heteroclinic tangencies Nonl. Dyn. 2, 3-25**(18)**
- [4] Gonchenko V S and Shilnikov L P, 2007, Bifurcations of systems with a homoclinic loop to a saddle-focus with saddle index $1/2$. (Russian) Dokl. Akad. Nauk 417 (2007), no. 6, 727–731; translation in Dokl. Math. 76, no. 3, 929933**(19)**
- [5] Lamb J. S. W., Roberts J. A. G. Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey //Physica D: Nonlinear Phenomena. – 1998. – Т. 112. – №. 1. – С. 1-39.
- [6] Delshams, A. *et al.* //Nonlinearity, 2013, vol.26, no.1, p. 1
- [7] D. Topaj, A. Pikovsky. //Physica D, **170** (2002), p.118
- [8] J. E. Howard and S. M. Hols, Phys. Rev. A29 (1984)

