ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра компьютерной физики и метаматериалов
на базе Саратовского филиала
Института радиотехники и электроники
имени В.А. Котельникова РАН

ТРАНСФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ОТОБРАЖЕНИЯ ГАУССА И АССОЦИИРОВАННОГО С НИМ ОПЕРАТОРА ПЕРРОНА-ФРОБЕНИУСА

АВТОРЕФЕРАТ
ВЫПУСКНОЙ КВАЛИФИКАЦИОННОЙ (МАГИСТЕРСКОЙ) РАБОТЫ
по направлению подготовки 03.03.02 «Физика»
студента 2 курса физического факультета
Косовского Виталия Владиславовича

Научный руководитель –
заведующий кафедрой
компьютерной физики и метаматериалов,
д.ф.-м.н. профессор В.М. Аникин

Саратов
2018 год

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуализация проблемы. Отображение Гаусса

$$x_{n+1} = \{1/x_n\}\,,\ x_n \in (0,1)$$

(фигурные скобки обозначают операцию выделения дробной части числа) является исторически первой динамической системой теории чисел, демонстрирующей хаотической поведение. Вид отображения показан на рисунке 1. Отображение имеет счетное число разрывов, сгущающихся при приближении к нулю.

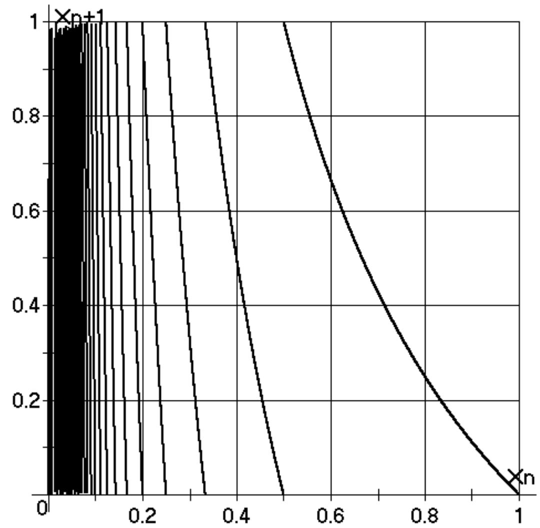

Рисунок 1 . Отображение Гаусса

Интерес к отображению Гаусса обусловлен не только историческим и математическим аспектами, но и содержательным физическим приложением, которое данное отображение нашло в релятивистской космологии.

Гаусс рассматривал разложение произвольного дробного иррационального числа x_0 в непрерывную дробь. Итерационная процедура этого разложения состоит в последовательном вычислении целых и дробных частей от величин, *обратных правильным дробям*, полученным на предшествующем этапе алгоритма, т.е. на первом шаге вычисляется дробная величина $x_1 = \{1/x_0\}$, на втором шаге – дробная величина $x_2 = \{1/x_1\}$ и т.д. Попутно определяется серия целых величин ($a_1 = \lfloor 1/x_0 \rfloor, a_2 = \lfloor 1/x_1 \rfloor$ и т.д.), являющихся коэффициентами цепной дроби. В результате этого процесса, "генератором" которого является преобразование Гаусса $x_{n+1} = \{1/x_n\}$, n=0,1,2,…, получаются все новые и новые компоненты цепной дроби:

$$x_0 = \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots \cfrac{1}{a_n + x_n}}}}.$$

Гаусс ставил сугубо вероятностную задачу, полагая начальное значение x_0 равномерно распределенной случайной величиной. Соответственно все последующие значения x_n и a_n являются случайными, поскольку определяются нелинейными преобразованиями случайной величины x_0. В главе 1 будут даны соотношения для элементов (неполных частных, коэффициентов) непрерывной дроби a_n и дробных величин x_n как функций разлагаемой величины (величину $a_n + x_n$ называют полным частным).

Гауссу было известно уравнение, которому подчиняются вероятностные распределения случайных величин x_n, но он не ставил целью записать точные выражения для распределений вида $F_n(x) = P\{x_n < x\}$. Гаусс полагал, что с ростом «этажности» непрерывной дроби вероятностные законы для составляющих разложения имеют тенденцией стремление к вполне определенному равновесному (инвариантному) распределению, которое уже не зависит от «учиняемого» над случайными величинами функционального преобразования:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F_{st}(x) = \frac{1}{\ln 2}\int_0^x \frac{dx}{1+x}.$$

Зная данное инвариантное распределение, Гаусс ставил задачей оценить скорость установления равновесного распределения под действием нелинейного преобразования $x_{n+1} = \{1/x_n\}$.

Сформулированную выше задачу Гаусс решить не смог. Она оказалась гораздо более сложной, чем аппроксимационная задача по оценке скорости приближения самой непрерывной дроби к ее естественному пределу – разлагаемому числу. Оценки сходимости исходного распределения случайного числа к инвариантному распределению были получены в XX столетии, после того как задача стала известной математикам из опубликованных архивных материалов [1–15].

Безусловный приоритет в решении задачи Гаусса принадлежит российским математикам. Родион Осиевич Кузьмин в 1928 г. первым представил свой вариант решения задачи Гаусса [3,4], и сегодня в математической литературе прочно утвердилась терминология: "теорема Гаусса–Кузьмина", "теорема Кузьмина", "константа Гаусса–Кузьмина–Леви–Вирсинга–Бабенко" (речь идет о втором собственном значении оператора Перрона–Фробениуса для отображения Гаусса; оно играет определяющую роль при оценке перемешивающих свойств отображения). В 1935 г. Александр Яковлевич Хинчин, подробно рассмотрев результат Р.О. Кузьмина, представил задачу Гаусса как первую задачу метрической теории непрерывных дробей [5]. Небезынтересно и то, что в первой половине прошлого столетия уточнение результата происходило в форме своеобразного "соревнования", синергии и конкуренции двух математиков – Р.О. Кузьмина и француза Поля Леви [6 – 9].

Современное прочтение задачи Гаусса базируется на исследовании свойств линейных эволюционных операторов, естественным образом ассоциированных с отображением Гаусса – операторов Перрона–Фробениуса и Купмана. Первые работы в этом направлении выполнены Э. Вирсингом, Д. Майером, К.И. Бабенко, М. Иосифеску [10–15].

Оператор Перрона–Фробениуса непосредственно описывает эволюцию вероятностных распределений, обусловленную хаотическим преобразованием, а второй названный оператор – изометрический оператор Купмана широко используется для описания (спектральных) свойств отображения как динамической системы. При получении конкретных результатов рассматривают сужение операторов на вполне определенные функциональные подпространства. Инвариантные подпространства, получаемые по линии различных операторов, являются *разными*, хотя вид операторов может и совпадать.

Цель выпускной квалификационной работы – теоретический и численный анализ динамических свойств отображения Гаусса и ассоциированного с ним оператора Перрона-Фробениуса. Эти свойства раскрываются в шести главах, где последовательно в качестве ***рассмотренных задач*** отражаются:

алгоритм соотнесения отображения с процессом разложения числа в непрерывную дробь;

демонстрация хаотических свойств отображения (положительность показателя Ляпунова);

наличие периодических орбит;

вывод выражения для оператора Фробениуса-Перрона для отображения Гаусса;

обзор теоретических результатов по решению спектральной задачи для оператора Перрона-Фробениуса для отображения Гаусса и расщеплению динамических корреляций в системе Гаусса;

численная иллюстрация установления равновесного распределения в тестовой системе и системе Гаусса.

Структура работы. Выпускная кавлификационная работа состоит из 6 глав, введения, заключения, списка использованных источников. Всего 65 с. м.п.т.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении дается общая характеристика работы. В главе 1 рассматриваются Случайные величины в задаче Гаусса и законы их преобразования. В главе 3 дается характеристика отображения Гаусса как хаотической динамической системы. В главе 3 выявляются циклы и апериодические траектории отображения Гаусса. В главе 4 демонстрируется аналитический расчет показателя Ляпунова для отображения Гаусса. В главе 5 детально рассматривается структура операторов Перрона-Фробениуса и Купмана для отображения Гаусса, в том числе в контексте задачи расцепления корреляций в хаотической динамической системе. В главе 6 аналитически (для квадратичного отображения Улама-фон Неймана $x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n),\ x_n \in (0,1)$, обладающего инвариантной плотностью $f^*(x) = \frac{d}{dx}\frac{2}{\pi}\arcsin\sqrt{x} = \frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}},\ x \in (0,1)$) и численно (для отображения Гаусса) изучаются трансформационные свойства оператора Перрона-Фробениуса – скорость сходимости начального распределения к инвариантному.

Графические результаты главы 6 работы представлены на рисунках 2 и 3. Рисунок 2 демонстрирует сходимость начального равномерного распределения к инвариантному в процессе итераций отображения Улама-фон Неймана.

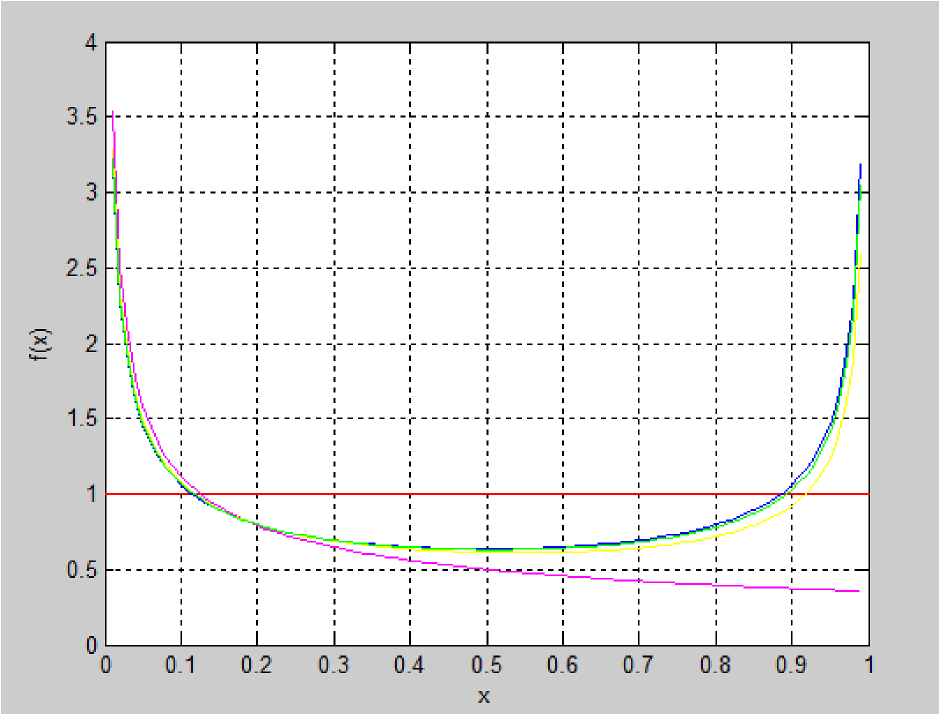

Рисунок 2. Сходимость начального равномерного распределения к инвариантному распределению под действием оператора Перрона-Фробениуса для отображения $x_{n+1} = 4x_n(1-x_n),\ x_n \in (0,1)$

На рисунке 3 иллюстрируется процесс сходимости начального равномерного распределения к инвариантному для отображения Гаусса. Соответствующий оператор Перрона-Фробениуса имеет сложный вид, содержа бесконечное число слагаемых:

$$Pf(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(x+k)^2} f\left(\frac{1}{x+k}\right).$$

Инвариантная плотность и закон распределения задаются выражениями:

$$f^*(x) = \frac{1}{\ln 2} \frac{1}{1+x}, \quad x \in (0,1);$$

$$F^*(x) = \int_0^x f^*(t)dt = \frac{1}{\ln 2} \int_0^x \frac{dt}{1+t} dt = \frac{1}{\ln 2} \ln(1+x) = \log_2(1+x).$$

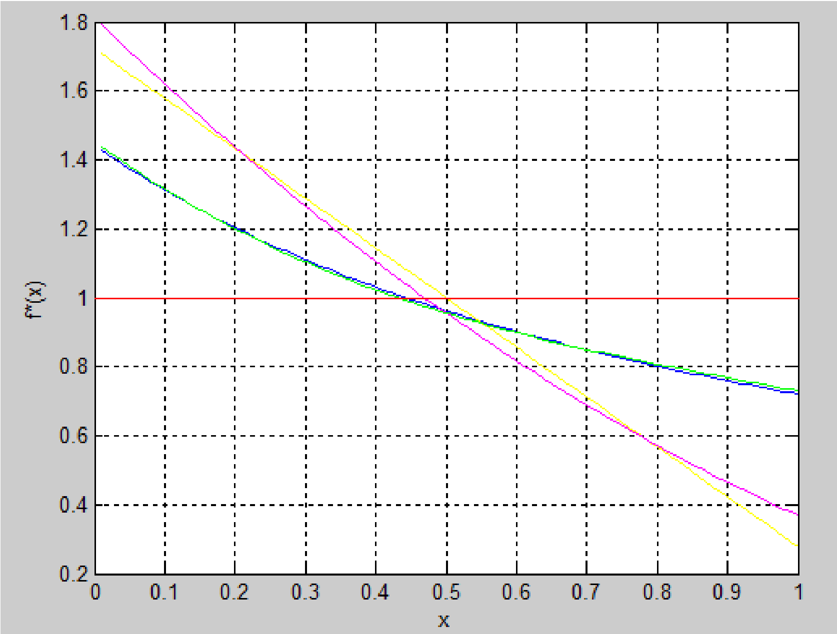

Рисунок 3. Сходимость начального равномерного распределения
к инвариантному распределению под действием оператора Перрона-Фробениуса
для отображения Гаусса

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Одна из целей нашего рассмотрения – показать, что имя К.Ф. Гаусса связано с историей развития теории детерминированного хаоса в различных аспектах. Он ввел в рассмотрение нелинейное разностное уравнение, определяющее на основе алгоритма Евклида коэффициенты и дробные остатки при разложении иррационального дробного числа в непрерывную дробь. Судя по изначальной формулировке, Гаусс трактовал полученное отображение как сугубо стохастическое уравнение, в которое случайность входит в наиболее, пожалуй, "скрытой" форме – не через коэффициенты и не через "внешнее" случайное воздействие, а через начальные условия.

Если же интерпретировать отображение Гаусса как детерминированное уравнение, то процесс преобразований определяет динамическую систему. Первым такую трактовку для отображения Гаусса ввел А.Я. Хинчин. В таком качестве отображение Гаусса сегодня и рассматривается в эргодической теории.

В работе отражены различные вопросы, связанные с отображением Гаусса: прослежен генезис преобразования; проведено построение фундаментальных интервалов единичного сегмента, соотнесенных с этим отображением; отмечено фундаментальное свойство отображения – его точность, обусловливающая в свою очередь свойства эргодичности и перемешивания; проведена запись циклов отображения в терминах цепных дробей; дано определение оператора Перрона–Фробениуса по мере Лебега и инвариантной мере; рассмотрены сужения оператора Перрона–Фробениуса на различные банаховы пространства и соответствующие им решения задачи Гаусса. Кратко прослежена 80-летняя история поиска оценок скорости установления равновесного распределения и расцепления корреляций в динамической системе, определяемой отображением Гаусса.

Отображение Гаусса имеет интересное приложение в однородных анизотропных моделях эволюции Вселенной вблизи особой точки решения уравнений Эйнштейна, давая исчерпывающее вероятностное описание длин казнеровских эпох, из которых складывается процесс эволюции пространственно-временной метрики.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. *Gauss C.F.* Werke. B.X_1. 1917. S. 371–374 (Brief an Laplace vom 30 Jan. 1812); S. 483–574 (Tagebuch).

2. *Бюлер В.К.* Гаусс. Биографическое исследование / Пер. с англ. М.: Наука, 1989. 208 с.

3. *R.O. Kuzmin*. Sur un problème de Gauss // Atti del Congresso Internazionale del Matematici Bologna. 1928. T. VI. P. 83– 89. Bologna: Zanichelli, 1932.

4. *Р.О. Кузьмин*. Об одной задаче Гаусса // ДАН СССР. Сер. А. 1928. С.375–380.

5. *Хинчин А.Я.* Цепные дроби. 4-е изд. М.: Наука, 1972. 112 с.

6 42. *Lévy P*. Sur les lois de probabilité don’t dependent les quotients complets et incompletes d’une fraction continue // Bull. Soc. Math. de France. 1929. V. 57. P. 178–194.

7. *Lévy P*. Théory de l'addition des variables aléatores. 2 ème edition. Paris: Caurthier-Villars, 1954.

8. *Szüsz P*. Über einen Kusminschen Satz // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1961. V. 12. P. 447–453.

9. *Кузьмин Р.О.* К метрической теории непрерывных дробей // Учен. зап. Ленингр. ун-та. Сер. мат. наук. 1948. Вып. 15. С. 163–173.

10. *Wirsing E.* On the theorem of Gauss–Kuzmin–Levy and a Frobenius type theorem for function spaces // Acta Arithmetica. 1974. V. 24. P. 507–528.

11. *Mayer D.* On a ς function related to the continued fraction transformation // Bull. Soc. Math. Fr. 1976. V. 104. P. 195–203.

12. *Бабенко К.И., Юрьев С.П.* Об одной задаче Гаусса. Препринт / Институт прикладной математики АН СССР. М.: 1977. № 63.

13. *Бабенко К.И.* Об одной задаче Гаусса // ДАН СССР. 1978. Т. 238, № 5. С. 1021–1024.

14. *Бабенко К.И., Юрьев С.П.* О дискретизации одной задачи Гаусса // ДАН СССР. 1978. Т. 240, № 6. С. 1273–1276.

15. *Бабенко К.И.* Основы численного анализа. М.: Наука, 1986. 744 с.