

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Динамика двух связанных ансамблей дискретных кубических
отображений**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студентки 2 курса 241 группы
направления 03.04.03 «Радиофизика»
физического факультета

Холуяновой Инны Александровны

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

Саратов 2018

ВВЕДЕНИЕ

Исследования коллективной динамики сложных систем находится в центре внимания многие годы. Об этом свидетельствует большое количество написанных монографий [1-4] и статей [5-11]. Установлено, что в ансамблях связанных нелинейных осцилляторов образуются регулярные и хаотические пространственно-временные структуры, наблюдаются эффекты синхронизации, пространственная перемежаемость и др. Достаточно недавно были открыты новые типы пространственно-временные структуры. Их назвали «химерными структурами». Для них характерно сосуществование когерентных (синхронных) и некогерентных (асинхронных) кластеров с четко обозначенными границами в пространстве элементов ансамбля [12-14]. Химерные структуры реализуются в ансамблях, как правило, при условии нелокальной связи между элементами. При нелокальной связи каждый индивидуальный элемент ансамбля взаимодействует с конечным числом ближайших соседних элементов. Более подробное исследование, произведенное в работе [13, 14], предложило термин «химерные состояния».

Отметим, что исследования динамики ансамблей ранее проводились для условий локальной связи, когда каждый элемент взаимодействовал лишь с соседним. И для таких ансамблей во многих работах было установлено и исследовано явление синхронизации пространственно-временных структур [3]. Но количественная оценка идентичности химерных структур и областей синхронизации в области параметров почти не осуществлялась.

В рамках данной выпускной квалификационной работы рассматривается динамика двух связанных ансамблей из хаотических отображений с нелокальной связью. Каждый из ансамблей реализует химерные структуры и целью выпускной квалификационной работы является анализ взаимной и внешней синхронизации химерных структур при вариации коэффициента связи между ансамблями. Для реализации отличающихся пространственно-временных структур в ансамблях, при отсутствии связи между ними, вводилась расстройка по параметрам нелинейности

индивидуальных осцилляторов первого и второго ансамблей. При внешней синхронизации рассматривались режимы однонаправленного воздействия элементов первого ансамбля на второй при условии, что реализующиеся структуры в ансамблях при отсутствии связи были различными. Взаимная синхронизация исследовалась при введении симметричной двухсторонней связи. Для количественной диагностики идентичности синхронных структур проводился расчет коэффициентов взаимной корреляции между соответствующими осцилляторами первого и второго ансамблей. Аналогичным методом определялось и область синхронизации в пространстве параметров.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

1. **Химерные состояния.** В ноябре 2002 года, Yoshiaki Kuramoto и его коллега Dorjsuren Battogtokh обнаружили, что с определенными начальными условиями, элементы ансамбля, имеющие нелокальную связь с соседями и имеющие одинаковую собственную частоту, имели различное поведение относительно друг друга [12]. Часть системы синхронизировались в то время, когда другие оставались некогерентными.

В настоящее время, химеры были зарегистрированы в кольце осцилляторов [12, 15, 16], двух- и трех-сетевых кластерах [17, 18], и осцилляторов, расположенных вдоль бесконечной плоскости [19, 20, 21], тора [22, 23] и сферы [24]. В зависимости от топологии, существуют два различных класса состояний химер: пятна и спирали [18, 20, 22, 25].

1.1 Области применения 1.1.1 Однополушарный сон. Многие виды млекопитающих и птиц участвуют в однополушарном медленноволновом сне. Особенностью данного типа сна является то, что одно полушарие мозга активно, пока второе неактивно. Наблюдая в электроэнцефалограммах это состояние, нейронные активности демонстрируют высокую амплитуду, а в спящем полушарии низкочастотную электрическую активность [26]. Химерные состояния в работе [18] можно интерпретировать как модель скоординированного колебания в одном полушарии и некогерентного

поведения в другом. Как правило, эти модели переключаются между полушариями в течение долгого времени.

1.1.2 Фибрилляция желудочков. Основной причиной внезапной сердечной смерти у людей вызвана фибрилляцией желудочков. Данное явление характеризуется потерей согласованности сокращений сердечной мышцы. Во время фибрилляции, могут образоваться спиральные узоры [27, 28, 29]. Неясными остаются фазовые сингулярности и динамика, которые находятся в центре этих моделей. Сокращения вблизи данной сингулярности могут быть несинхронными. Эти типы моделей также наблюдаются в связанных осцилляторах, расположенных на поверхности сферы.

1.1.3 Энергосистема. В США энергосистема состоит из множества генераторов производящих мощность на частоте около 60 Гц. Синхронизация генераторов происходит при идеальных условиях. Для изучения синхронизации энергосистемы часто используется модель Курамото, как в работе [30]. Анализ этих моделей показывает, что различные возмущения в сетях могут привести к полной или частичной десинхронизации. Такое поведение может привести к отключению электроэнергии. Подробное изучение химерных состояний и применение полученных знаний на практике позволит создать стабильную и надежную синхронизацию.

1.1.4 Социальные системы. Химерные состояния также наблюдаются в социальных системах. Gon'alez-Avella и др. рассмотрели модель распространения социальных и культурных тенденций. Они отмечают, что в рамках одной популяции могут проявляться «химеры»: одна группа проявляет согласование, а второй группа остается несогласованной [31].

1.1.5 Химеры в лазерах. В феврале 2017 года была опубликована работа [32], в которой впервые были исследованы химерные состояния в больших массивах полупроводниковых лазеров. Исследовательская группа из НИТУ «МИСиС» проанализировала массив из 200 штук изначально несинхронизированных излучателей. Система со временем частично синхронизировалась, остальная часть продемонстрировала поведение

свойственное «химерам». Дальнейшее исследование найдет применение в лазерной медицине. Фиброскопы станут более эффективными, а сенсоры, используемые при зондировании, дадут более корректную картинку.

1.2 Возникновение химер. 1.2.1 Фазовая химера. В работе [33] была предпринята одна из первых попыток классифицировать ансамбль взаимодействующих осцилляторов, прогнозирующую реализацию химерных состояний и их свойства в определенных классах систем. при удвоении периода продемонстрировали химерное состояние. Для более детального описания перехода «когерентность-некогерентность» в работе [34] исследовалась динамика кольца связанных логистических отображений, описываемое уравнением (1).

$$x_i(t+1) = \sigma x_i(t) [1 - x_i(t)] + \frac{r}{P} \sum_{j=1}^P x_j(t) \quad (1)$$

где x_i – вещественная динамическая переменная, $i = 1, 2, \dots, N$ – порядковый номер замкнутых в кольцо парциальных осцилляторов, t - дискретное время, σ – коэффициент связи, P – число соседних осцилляторов слева и справа от i -го осциллятора, $r = P/N$ – радиус связи. Второе слагаемое в уравнении (1) является функцией связи. Она характеризует суммарное воздействие на i -ый осциллятор со стороны соседних.

$$x_i(t+1) = \sigma x_i(t) [1 - x_i(t)] + \frac{r}{P} \sum_{j=1}^P x_j(t) \quad (2)$$

Механизмом рождения химеры в (1) является потеря устойчивости режима синфазной синхронизации с переходом в режим перемежаемости. В связи с этим данный режим химеры назван *фазовой*.

1.2.2 Амплитудная химера. Возникновение химеры в кольце происходит при уменьшении параметра связи и достижении критического значения $\sigma_{кр}$. При данных условиях наблюдается усиленная хаотизация амплитуд колебаний парциальных осцилляторов в области химеры. Такое поведение крайне отлично от фазовой химеры. Новый тип химер по аналогии

назван *амплитудными*. Парциальные элементы в области амплитудных химер характеризуются полностью асинхронной хаотической динамикой.

2. Результат проведенных исследований. 2.1 Исследуемая модель.

Рассмотрим динамику двух замкнутых в кольцо одномерных ансамблей из кубических отображений. Каждый осциллятор с номером i ($i = 1, 2, \dots, N$) связан с соответствующим осциллятором второго кольца коэффициентами связи γ_{12} и γ_{21} . Уравнения ансамблей запишем в виде:

$$\begin{cases} x_i^{t+1} = f(x_i^t) + \frac{\sigma_1}{2P} \sum_{j=i-P}^{i+P} [f(x_j^t) - f(x_i^t)] + \gamma_{12} F_i^t, \\ y_i^{t+1} = g(y_i^t) + \frac{\sigma_2}{2R} \sum_{j=i-R}^{i+R} [g(y_j^t) - g(y_i^t)] + \gamma_{21} G_i^t, \end{cases} \quad (3)$$

где x_i и y_i – вещественные переменные, t – дискретное время, P и R – число соседей в первом и втором кольцах. Поведение индивидуальных осцилляторов задается кубическими отображениями

$$f(x_i^t) = [a_1 x_i^t - (x_i^t)^3] \exp\left(-\frac{(x_i^t)^2}{B}\right), \quad g(y_i^t) = [a_2 y_i^t - (y_i^t)^3] \exp\left(-\frac{(y_i^t)^2}{B}\right), \quad \sigma_{1,2} -$$

коэффициенты нелокальной связи. Фиксируемый параметр $B = 10$. Функции $F_i^t = (g(y_i^t) - f(x_i^t))$ и $G_i^t = (f(x_i^t) - g(y_i^t))$ описывают диффузионную связь между элементами колец. Количество осцилляторов в ансамблях положим $N = 1000$. Число соседних осцилляторов слева и справа от i -го осциллятора в системах примем $P = R = 250$.

Система уравнений (3) решалась численно при периодических граничных условиях и задании начальных условий x_i^0 и y_i^0 ($i = 1, 2, \dots, N$), случайно распределенных по ансамблю в интервале $[0,1]$.

2.2. Взаимная синхронизация. Для анализа эффекта взаимной синхронизации в уравнениях (3) введем симметричную связь между ансамблями, положив $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \gamma$, и расстройку по управляющим параметрам a и σ . Выберем значения $a_1 = 3,4$, $\sigma_1 = 0,55$ и $a_2 = 3,5$, $\sigma_2 = 0,54$.

В этом случае в отсутствии связи в ансамблях реализуются различающиеся химерные структуры.

С ростом коэффициента связи γ химерные структуры в ансамблях x_i и y_i сближаются и при $\gamma = 0,2$ практически полностью совпадают, свидетельствуя о синхронизации мгновенных профилей. Однако для вывода об эффекте взаимной синхронизации этих результатов недостаточно. Необходимо доказать, что осцилляторы x_i и y_i совершают синхронные колебания во времени и синхронизация реализуется в конечной области параметров. С целью обоснования выполнения указанных условий проводились расчеты коэффициентов взаимной корреляции R_i (4) [38].

Коэффициент взаимной корреляции R_i введем следующим образом:

$$R_i = \frac{\langle \tilde{x}_i(t) \tilde{y}_i(t) \rangle}{\sqrt{\langle \tilde{x}_i(t) \rangle \langle \tilde{y}_i(t) \rangle}} \quad (4)$$

где $\tilde{x}_i(t) = x_i(t) - \langle x_i(t) \rangle$, $\tilde{y}_i(t) = y_i(t) - \langle y_i(t) \rangle$. Угловые скобки $\langle \dots \rangle$ в уравнении (2) означают усреднение по времени.

Коэффициент взаимной корреляции R_i существенно меньше единицы в отсутствие синхронизации и практически равен единице ($0,99 < R_i < 1$) в режиме синхронизации химерных структур. Таким образом, результат действительно характеризует эффект взаимной синхронизации химерных структур в системе (3) с точки зрения их идентичности.

Покажем, что идентичность химерных структур сохраняется в конечной области значений коэффициента связи γ между ансамблями. С этой целью были рассчитаны коэффициенты взаимной корреляции для осцилляторов первого и второго ансамблей. Заштрихованная область демонстрирует, что коэффициент корреляции R_i близок к единице ($R_i \approx 0,99$) в некоторой области значений коэффициента связи γ .

Таким образом, можно утверждать, что эффект взаимной синхронизации химерных структур имеет место.

2.3. Внешняя синхронизация. С целью исследования эффекта внешней синхронизации в уравнениях (3) рассмотрим случай однонаправленной связи, положив $\gamma_{12} = 0$, $\gamma_{21} = \gamma > 0$. В этом случае осцилляторы ансамбля y_i^t будут воздействовать на соответствующие осцилляторы ансамбля x_i^t однонаправленно. Введем расстройку по параметрам ансамблей x_i^t и y_i^t , положив $a_1 = 3,3$, $\sigma_1 = 0,51$ и $a_2 = 3,5$, $\sigma_2 = 0,54$.

В силу расстройки по параметрам в ансамблях x_i^t и y_i^t в отсутствие связи $\gamma = 0$ реализуются отличающиеся структуры. С введением связи $\gamma > 0$ ансамбль y_i будет воздействовать на ансамбль x_i и с ростом γ реализуется эффект внешней (или вынужденной) синхронизации. При $\gamma = 0,4$ мгновенные профили x_i и y_i практически совпадают. Расчет коэффициента взаимной корреляции подтверждает режим внешней синхронизации. Величина R_i в синхронном режиме $R_i \approx 0,99$, т.е. близка к единице, в то время как при отсутствии синхронизации R_i существенно меньше единицы.

С целью показать, что в случае внешней синхронизации область синхронизации также характеризуется конечным интервалом значений коэффициента связи γ , проводились расчеты коэффициента взаимной корреляции R_i . Расчеты показали, что коэффициент взаимной корреляции R_i остается практически равным единице в конечной области изменения коэффициента связи $0,39 \leq \gamma \leq 0,79$ для кластера синхронной химерной структуры $90 \leq i \leq 950$.

Полученные данные подтверждают наличие внешней синхронизации в рассматриваемой системе.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе методами численного эксперимента получены результаты, убедительно свидетельствующие о реализации эффектов взаимной и внешней синхронизации химерных структур в двух связанных ансамблях кубических отображений с нелокальными связями (3). Продемонстрирована идентичность синхронных структур и наличие конечной области синхронизации при вариации коэффициента связи между взаимодействующими ансамблями. Эти два условия являются необходимыми и достаточными для того, чтобы наблюдался эффект синхронизации. Идентичность синхронных структур и области синхронизации подтверждалась путем расчета коэффициента взаимной корреляции R_i (4).

Из результатов данной работы следует, что при взаимной синхронизации происходит схождение пространственно-временных структур во взаимодействующих ансамблях. Стоит отметить, что исходные структуры при отсутствии связи имеют отличие от синхронных структур. Если рассматривать внешнюю синхронизацию, то можно наблюдать процесс «захвата» пространственно-временной структуры ансамбля, на который происходило воздействие со стороны управляющего ансамбля.

В работе была произведена количественная оценка идентичности химерных структур и областей синхронизации в области параметров. Реализация синхронизации в конечной области параметров подтверждается. Заштрихованная область демонстрирует, что коэффициент взаимной корреляции R_i ($R_i \approx 0,99$) остается практически равным единице в конечной области изменения коэффициента.

Таким образом, полученные данные позволяют утверждать об эффекте внешней и взаимной синхронизации химерных структур в двух связанных ансамблях кубических отображений с нелокальными связями.

По результатам данных исследований была опубликована статья в журнале «Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия Физика» [39].