

Министерство образования и науки Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ
Н.Г. ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра радиофизики и нелинейной динамики

**Динамика ансамбля осцилляторов ФитцХью-Нагумо с локальным и
нелокальным взаимодействием**

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ
студента 2 курса 241 группы
направления 03.04.03 «Радиофизика»
физического факультета

Наливайко Петра Олеговича

Научный руководитель

д.ф.-м.н., профессор

Т.Е. Вадивасова

Зав. кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

В.С. Анищенко

Саратов 2018

Актуальность темы исследования

Исследование нелинейных сред и распределенных систем остается на сегодняшний день одним из актуальных направлений в нелинейной теории колебаний и волн. Важной с теоретической и практической точек зрения является проблема формирования сложных пространственных структур, которой посвящен ряд монографий^{1,2,3,4,5}. Наибольший интерес представляют активные среды, в которых наблюдаются автоволновые процессы, т.е. в пространстве могут распространяться незатухающие волны. Модели активных сред и их дискретные аналоги в виде цепочек и решеток взаимодействующих активных элементов играют важную роль в задачах физики, химии, биологии и биофизики, нейродинамики, медицины, экологии и эпидемиологии, других отраслях науки.

Недавно внимание исследователей привлек новый тип структур, характерный для ансамблей активных элементов с нелокальной связью. Это - так называемые химерные структуры^{6,7,8}. Химерные структуры состоят из кластеров с согласованным (когерентным) и несогласованным (некогерентным) поведением и, по-видимому, представляют собой особый тип кластерной синхронизации.

¹ G. Nicolis, I. Prigogine, Self-organization in nonequilibrium systems. Wiley, New York, 1977.

² S. Mikhailov, A. Loskutov, Foundation of synergetics. Complex patterns. -- Springer, Berlin, 1995.

³ V.I. Nekorkin, M.G. Velarde, Synergetic phenomena in active lattices. -- Springer, Berlin, 2002.

⁴ G.V. Osipov, J. Kurths, Ch. Zhou, Synchronization in oscillatory networks. -- Springer, Berlin, 2007.

⁵ А.Ю. Лоскутов, А.С. Михайлов, Основы теории сложных систем. – Москва-Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2007.

⁶ Y. Kuramoto, D. Battogtokh, Coexistence of coherence and incoherence in nonlocally coupled phase oscillators // Nonl. Phenom. Complex Syst. 2002. Vol.4, P.380—385.

⁷ D.M. Abrams, S.H. Strogatz, Chimera states for coupled oscillators // Phys. Rev.Lett. 2004. Vol.93, 174102.

⁸ M.J. Panaggio, D.M. Abrams, Chimera states: Coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators // Nonlinearity/ 2015. Vol.28, R67(1—18)

Добавлено примечание ([Т1]): 1-5

Добавлено примечание ([Т2]): 1-5

Добавлено примечание ([Т3]): 1-5

Добавлено примечание ([Т4R3]):

Выделяют три типа активных сред: автоколебательные, возбудимые и бистабильные среды. Элементы этих сред, соответственно, являются автогенераторами, возбудимыми системами или бистабильными осцилляторами с двумя устойчивыми состояниями равновесия. Все три типа среды являются активными и демонстрируют автоволновые явления. Однако имеются существенные различия в свойствах этих трех типов сред. Так, элементы автоколебательной среды в соответствующем режиме вне зависимости от граничных условий всегда демонстрируют незатухающие колебания. В возбудимой среде для поддержания таких колебаний требуются определенные условия, обеспечивающие возврат импульса возбуждения к элементу среды спустя некоторое время релаксации. Так, в кольце возбудимых элементов распространяются незатухающие волны возбуждения.

В системах из бистабильных элементов бегущие волны наблюдаются далеко не всегда. Например, в кольце из осцилляторов Дуффинга при диффузионном взаимодействии волновых режимов не возникает. Однако в модели бистабильной среды, представляющей собой кольцо диффузионно связанных осцилляторов ФитцХью-Нагумо (ФХН) в бистабильном режиме, можно наблюдать множество волновых мод с различной длиной волны^{9,10}.

Осциллятор ФХН является простейшей нейронной моделью и классическим примером возбудимой системы. Динамика ансамблей осцилляторов ФитцХью-Нагумо вызывают большой интерес в связи с задачами моделирования процессов в нейронных волокнах и мышечных тканях. В то же время, при определенном выборе формы уравнений, осциллятор ФХН обладает не только возбудимым поведением, но также, в зависимости от выбора параметров, может быть бистабильным осциллятором

⁹ I. A. Shepelev, A. V. Slepnev, T. E. Vadivasova, Different synchronization characteristics of distinct types of traveling waves in a model of active medium with periodic boundary conditions // CNSNS, 2016, Vol.38. P.206-217.

¹⁰ I.A. Shepelev, D.V. Shamshin, G.I. Strelkova, T.E. Vadivasova, Bifurcations of spatiotemporal structures in a medium of FitzHugh-Nagumo neurons with diffusive coupling // Chaos, Solitons & Fractals. 2017. Vol.104. pp. 153-160.

и автогенератором. Возникает интересная задача – исследовать, как меняется поведение модели распределенной системы, составленной из осцилляторов ФХН, при изменении управляющих параметров среды.

В отмеченных работах^{9,10} были выявлены определенные общие черты и различия в поведении бегущих волн в автоколебательном, возбуждимом и бистабильном режимах, проведен анализ режимов при вариации различных параметров, управляющих динамикой парциальных осцилляторов и сопоставление пространственно-временной динамики среды с поведением отдельно взятого элемента среды. Однако влияние силы и характера связи между элементами на динамику среды не было достаточно изучено. Не был в достаточной степени изучен вопрос о влиянии нелокального характера взаимодействия на динамику распределенной системы на основе осцилляторов ФХН. Известно, что в ансамблях осцилляторов ФХН с нелокальными связями в бистабильном режиме могут возникать пространственно-локализованные осцилляции, впервые отмеченные в¹¹. Не ясно, как соотносятся эти осцилляции с режимами бегущих волн и неподвижных пространственных структур, характерными для ансамбля осцилляторов ФХН и соответствующей модели среды. Известно также, что при увеличении радиуса нелокальной связи в определенной области параметров осцилляторов пространственно-локализованные осцилляции могут возникать в целом кластере элементов, т.е. формировать кластер некогерентности определенного типа химеры¹². Колебания во времени элементов такого кластера могут быть как регулярными, так и хаотическими. Исследование влияния нелокального характера связи в ансамбле осцилляторов, моделирующих нейронную активность, представляется тем

¹¹ V.I. Nekorkin, D.S. Shapin, A.S. Dmitrichev, V.B. Kazantsev, S. Binczak, J.M. Bilbault, Heteroclinic Contours and Self-Replicated Solitary Waves in a Reaction-Diffusion Lattice with Complex Threshold Excitation // *Physica D*. 2008. Vol.237(19). P.2463-2475.

¹² I.A. Shepelev, T.E. Vadivasova, A.V. Bukh, G.I. Strelkova, V.S. Anishchenko, New type of chimera structures in a ring of bistable FitzHugh–Nagumo oscillators with nonlocal interaction // *Physics Letters A*. 2017. Vol.381. P.1398–1404.

более важным, что такой характер взаимодействия типичен для реальных нейтронов. С учетом всего сказанного была поставлена цель данной выпускной квалификационной работы.

Цель и задачи исследования

Цель исследования, проводимого в рамках выпускной квалификационной работы, состоит в изучении эволюции пространственно-временной динамики ансамбля идентичных осцилляторов ФитцХью-Нагумо с локальной диффузионной связью и нелокальной связью. В соответствии с поставленной целью решается задача численного построения диаграммы режимов ансамбля осцилляторов на плоскости управляющих параметров, один из которых определяет динамический режим отдельно взятого осциллятора ФитцХью-Нагумо, а другой представляет собой коэффициент связи. Исследуются режимы бегущих волн, стационарных структур и пространственно-локализованных осцилляций, характерные для разных значений параметров.

Краткое содержание работы

Выпускная квалификационная работа (ВКР) состоит из введения, трех глав, выводов, списка литературы и приложений.

Во **Введении** обсуждается актуальность проблематики исследования, дается краткий обзор научной литературы по теме ВКР, формулируется цель и задачи проводимых исследований.

В первой главе описывается исследуемая система, представляющая собой ансамбль осцилляторов ФитцХью-Нагумо с периодическими граничными условиями, определяются параметры исследуемого ансамбля и приводятся методы численного моделирования пространственно-временной динамики, используемые в работе.

Исследуемый в работе ансамбль осцилляторов ФХН описывается в общем случае следующими дифференциальными уравнениями

$$\varepsilon \frac{dx_j}{dt} = x_j - y_j - \alpha x_j^3 + \varepsilon \frac{k}{P} \sum_{i=j-P}^{j+P} (x_i - x_j), \quad \frac{dy_j}{dt} = \gamma x_j - y_j + \beta, \quad j=1, \dots, N, \quad (1)$$

$$x_{j \pm N}(t) \equiv x_j(t), \quad y_{j \pm N}(t) \equiv y_j(t).$$

Здесь N – число элементов в кольце, k – коэффициент связи. P – число соседей (с каждой стороны), с которыми взаимодействует элемент ансамбля. Степень нелокальности связи характеризуется радиусом связи $r = P/N$. В работе исследовался ансамбль из $N = 300$ осцилляторов. В случае локальной диффузионной связи надо положить $P = 1$.

Уравнения (1) интегрировались методом Рунге-Куты 4-го порядка с постоянным шагом $h = 0.001$. Начальные условия выбирались следующими:

$$x_j(0) = 2.2 \cos\left(2\pi \frac{j}{N}\right), \quad y_j(0) = 2.2 \sin\left(2\pi \frac{j}{N}\right), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (2)$$

что в случае бегущих волн приводит к реализации одноволновой моды. Проведенные в работе детальные исследования динамики ансамбля ограничивались только одноволновой модой, однако имеющиеся выборочные результаты для двухволновой и трехволновой моды, показали, что при вариации управляющих параметров они ведут себя аналогичным образом.

Время установления при численном интегрировании ансамбля полагалось не менее 500 - 1000 безразмерных единиц при периоде колебаний во времени $T_0 \in [100 - 450]$. В силу релаксационного характера колебаний осцилляторов ФХН для выхода в установившийся режим не требовалось большого числа периодов колебаний. По данным интегрирования строились графики колебаний во времени отдельных осцилляторов ансамбля и мгновенные пространственные профили ансамбля, характеризующие вид пространственной структуры. Строились также зависимости периода

колебаний элементов ансамбля во времени от коэффициента связи k и параметра β .

Во второй главе работы исследуется динамика ансамбля (1) в случае локальной диффузионной связи ($P = 1$) и фиксированных значениях параметров $\alpha = 1/3$, $\varepsilon = 0.2$ и $\gamma = 0.6$, что при малых значениях абсолютной величины параметра β , соответствует бистабильному поведению отдельно взятого осциллятора.

При различных значениях параметра β и коэффициента связи k и соответствующем выборе начальных условий в кольце (1) наблюдались три режима пространственно-временной динамики: пространственно-однородное равновесие, при котором все осцилляторы покоятся в одном и том же равновесном состоянии; стационарные пространственные структуры, соответствующие различным распределениям парциальных осцилляторов между окрестностями двух равновесий; бегущие волны.

Была построена диаграмма режимов на плоскости параметров k, β , приведенная на рис.1. На диаграмме обозначены три области: 1 – область стационарных пространственных структур; 2 – область бегущих волн; 3 – область пространственно-однородного равновесия. При построении диаграммы рассматривались только положительные значения β , т.к. при отрицательных значениях β вид диаграммы является полностью симметричным. Также нужно отметить, что при выбранных значениях параметров $\alpha, \varepsilon, \gamma$ устойчивое пространственно-однородное равновесное состояние существует всюду на плоскости параметров k, β и может быть получено при подходящем выборе начальных условий. Кроме того, при значениях β , для которых изолированный осциллятор имеет две устойчивых точки равновесия, в кольце (1) с локальной связью существуют два устойчивых пространственно-однородных решения, соответствующих этим состояниям.

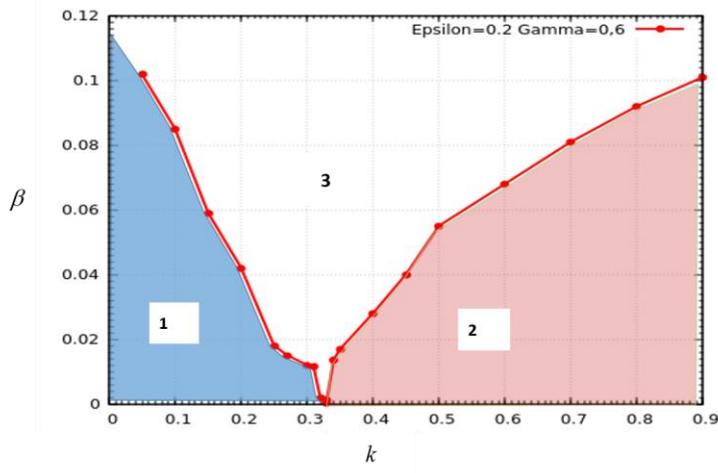


Рисунок 1. Диаграмма режимов в ансамбле (1) с локальной связью ($P = 1$) на плоскости параметров k, β при $\alpha = 1/3, \varepsilon = 0.2, \gamma = 0.6$ и начальных условиях (2): область 1 – стационарные пространственные структуры; область 2 – бегущие волны; область 3 – пространственно-однородное равновесие

Исследовалась эволюция мгновенного пространственного профиля в ансамбле при переходах между различными областями, а также зависимость периода колебаний осцилляторов, возникающих в области бегущих волн 2, от параметров k и β . С ростом параметра связи k в режиме бегущих волн период колебаний осцилляторов для фиксированной волновой моды уменьшается. Зависимость периода колебаний T_0 осцилляторов во времени от коэффициента связи в режиме бегущей волны при $\beta = 0$ и начальных условиях (2) приведена на рис.2. С ростом абсолютной величины β в области 2 период колебаний растет, оставаясь конечным вплоть до границы области существования бегущей волны.

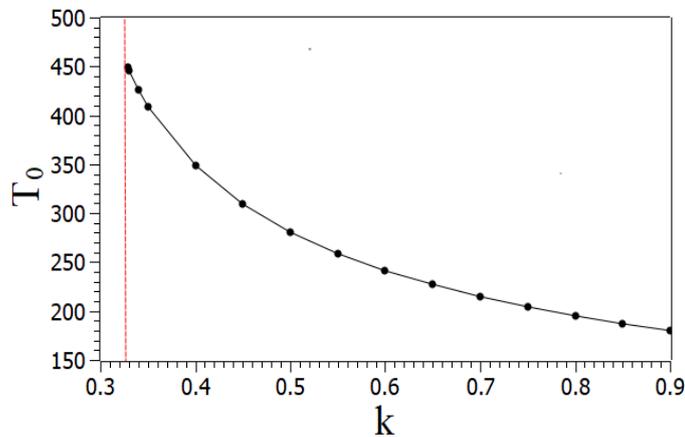


Рисунок 2. Зависимость периода колебаний осцилляторов ансамбля с локальной связью в режиме бегущей волны от коэффициента связи при $\beta = 0$ и начальных условиях (2). Пунктирная вертикальная линия отмечает границу возникновения бегущей волны

В третьей главе рассматриваются результаты численного моделирования кольца (1) с нелокальной связью при $P = 10$.

На рис.3 приведена диаграмма режимов ансамбля (1) на плоскости управляющих параметров k, β при нелокальной связью с выбранным числом соседей. Начальные условия задавались соотношениями (2). При построении диаграммы рассматривались только положительные значения β (в силу симметрии областей диаграммы относительно оси $\beta = 0$). На диаграмме обозначены следующие области: 1 - область стационарных пространственных структур; 2 - область бегущих волн; 3 - область пространственно-однородного равновесия; 4 - область пространственно-локализованных осцилляций. Этот новый режим будет подробно описан далее.

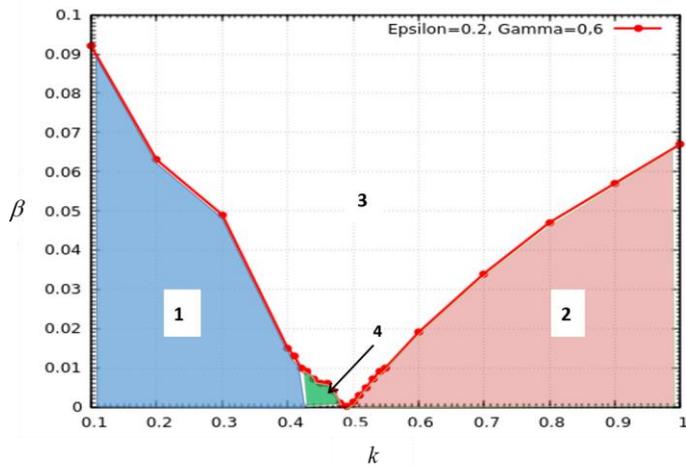


Рисунок 3. Диаграмма режимов в кольце (1) с нелокальной связью ($P = 10$) на плоскости параметров k, β при $\alpha = 1/3, \varepsilon = 0.2, \gamma = 0.6, r=1/30$ и начальных условиях (2) На диаграмме отмечены следующие области: область 1 – стационарные пространственные структуры; область 2 – бегущие волны; область 3 – пространственно-локализованные осцилляции; 4 – пространственно-локализованные осцилляции

Таким образом, диаграмма режимов при нелокальной связи с числом соседей $P = 10$ в целом качественно повторяет аналогичную диаграмму, полученную для случая локальной диффузионной связи. Однако нелокальное взаимодействие приводит к возникновению нового режима – пространственно-локализованных осцилляций. Этот режим наблюдается в узкой области 4 вблизи перехода от стационарных структур к бегущим волнам.

На рис.4 представлены результаты, полученные при $\beta = 0$ и $k = 0.49$ в режиме осциллирующей структуры в области 4. Рис.4 а и его фрагмент рис. 4 б иллюстрируют три мгновенных профиля частично осциллирующей структуры, полученных для трех последовательных моментов времени. Профили не полностью совпадают. Колебания во времени для осцилляторов

с номерами $j = 1$ и $j = 153$ в режиме частичных осцилляций приведены на рис.4 в, г. Они соответствуют переключениям между окрестностями двух равновесий и характеризуются большой амплитудой (рис.4 в), в то время как колебания первого осциллятора (как и большинства других) происходят в окрестности одного равновесия и очень малы по амплитуде (рис.4 в). При переходе к режиму бегущей волны происходит сдвиг мгновенного профиля вдоль пространственной координаты без изменения его формы. При этом возникают колебания во времени, форма которых повторяет форму мгновенного профиля, а период оказывается значительно больше периода осцилляций, наблюдающихся в области 4.

В разделе **Выводы** сформулированы основные результаты и выводы проведенного исследования:

В кольце осцилляторов ФитцХью-Нагумо в режиме отсутствия автоколебаний в отдельно взятом осцилляторе возможно наблюдать как режим стационарных (неподвижных) пространственных структур, так и бегущих волн. Переход от стационарной структуры к бегущей волне происходит в результате возникновения вращения пространственной структуры по кольцу, причем это вращение возникает сразу с конечной скоростью.

При нелокальном характере связи в кольце осцилляторов ФитцХью-Нагумо возможно наблюдать те же режимы, что и при локальной диффузионной связи. Область бегущих волн при этом смещается в сторону более сильного коэффициента связи. В бистабильном режиме вблизи перехода из области неподвижных структур в область бегущих волн возникает режим, не наблюдающийся при локальном взаимодействии. В этом режиме большинство элементов совершают колебания очень маленькой амплитуды в окрестности одного из равновесий и только отдельные осцилляторы демонстрируют колебания большой амплитуды, соответствующие переключениям между окрестностями двух состояний равновесия.

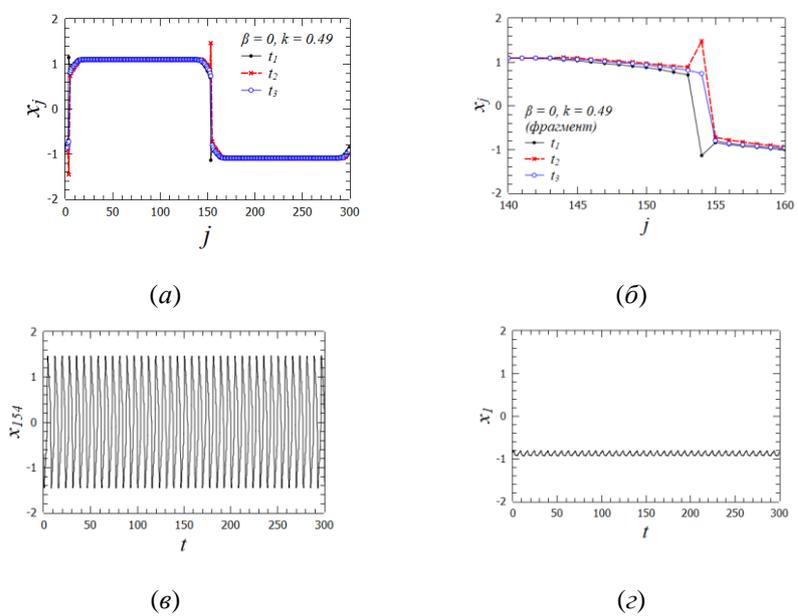


Рисунок 4. Характеристики режимов у границы перехода к бегущим волнам при $\beta = 0$: a, b -- мгновенные пространственные профили при $k = 0.49$ в три различных момента времени $t_1 = 495, t_2 = 498, t_3 = 500$ (не считая периода установления $t_0 = 500$); c -- колебания осциллятора $j = 153$ при $k = 0.49$; d -- колебания осциллятора $j = 1$

Список литературы включает 61 ссылку на научные публикации по теме ВКР.

В Приложениях А и Б приводятся тексты программ на языке С, которые были написаны для проведения численных исследований в рамках ВКР.