

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФГБОУ ВО «САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ
ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра электроники, колебаний и волн

МЕТОДЫ ИЗУЧЕНИЯ ОБОБЩЁННОЙ СИНХРОНИЗАЦИИ

АВТОРЕФЕРАТ МАГИСТЕРСКОЙ РАБОТЫ

студента 2 курса магистратуры 225 группы
направления 03.04.03 "Радиофизика"
факультета нелинейных процессов
Давыдова Дениса Алексеевича

Научный руководитель

профессор, д. ф. - м. н.

А. А. Короновский

Зав. кафедрой электроники, колебаний и волн, чл.-корр. РАН,

профессор, д.ф. - м.н.

Д. И. Трубецков

Саратов 2018

Введение

Хаотическая синхронизация является важным явлением в современном научном мире, которое обладает большим фундаментальным и практическим значением. Её проявление наблюдается не только в физических [8], но и других системах [1-5], таких, как физиологических, биологических, химических, экономических. Исследованию хаотической синхронизации посвящены многие научные работы [8, 12].

На сегодняшний день наука достаточно далеко продвинулась в изучении хаотической синхронизации [8]: благодаря развитию теории динамического хаоса было выявлено несколько различных видов синхронного поведения, таких, как фазовая синхронизация, обобщённая синхронизация, полная синхронизация, синхронизация с запаздыванием и др [8-12]. Каждый из этих видов синхронизации обладает своими особенностями и способами диагностики. Например, полная синхронизация [10-11] диагностируется в однонаправленно связанных системах $\mathbf{u}(t)$ и $\mathbf{v}(t)$ при условии, что векторы их состояний полностью совпадают. Основным условием возникновения хаотической полной синхронизации является идентичность значений управляющих параметров систем. Суть фазовой синхронизации состоит в понятии мгновенной фазы $\phi(t)$ хаотического сигнала [12]. Такая мгновенная фаза может быть введена одним из способов: в виде угла в полярной системе координат, с помощью преобразования Гильберта временной реализации сигнала или через сечение Пуанкаре [11-12]. Что же касается режима обобщённой синхронизации, то она является одним из типов, представляющим наибольший интерес [6-7]. Обобщённую синхронизацию, как правило, рассматривают для системы двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, один из которых является ведущим, а другой - ведомым [1-5].

В настоящей работе описываются методы и способы анализа и диагностики явления обобщённой хаотической синхронизации. Непосредственно рассмотрены метод вспомогательной системы, метод модифицированной си-

стемы, метод расчета показателей Ляпунова, а также метод фазовых трубок, как продолжение метода ближайших соседей. Рассмотрение применения данных методов проверено на примере однонаправленно связанных хаотических осцилляторов Ресслера.

Работа состоит из введения, четырех глав, заключения и списка использованной литературы. Структура настоящей магистерской работы следующая:

Первая глава начинается с рассмотрения одного из наиболее популярных методов изучения обобщённой хаотической синхронизации — с метода вспомогательной системы [1-3, 5-7]. Излагается принцип его работы, который иллюстрируется на примере двух однонаправленно связанных систем Ресслера [3]. Данный метод позволяет определить наличие или отсутствие в системах режима обобщённой хаотической синхронизации. Также с помощью метода вспомогательной системы возможно установить момент возникновения обобщённой синхронизации.

Во второй главе описывается метод модифицированной системы [1-4]. Данный метод используется для определения и объяснения условий возникновения обобщённой синхронизации. В качестве рассматриваемых систем также используются однонаправленно связанные хаотические осцилляторы.

Третья глава посвящена другому, альтернативному методу диагностики и изучения явления обобщённой синхронизации, - методу расчета показателей Ляпунова [4, 8, 13]. Подобно методу вспомогательной системы, метод расчета показателей Ляпунова способен выявить границу возникновения обобщённой синхронизации. В качестве примера в выпускной магистерской работе используются однонаправленно связанные системы Ресслера. Производится расчет показателей Ляпунова для ведущей и ведомой систем, а также сопоставление с результатами, полученными с помощью других методов.

В четвёртой главе рассматривается метод фазовых трубок, как продолжение метода ближайших соседей [7, 16-18]. Данный метод появился относительно недавно, поэтому полученные результаты сопоставляются с ре-

зультатами, полученными с помощью других методов. Метод фазовых трубок также рассматривается на примере однонаправленно связанных систем Ресслера.

В заключении содержатся выводы о проделанной работе.

Магистерская работа содержит 26 страниц, 6 рисунков, приведённый список литературы включает в себя 18 наименований.

Основное содержание работы.

Первый раздел первой главы посвящён определению обобщённой хаотической синхронизации и теоретическому описанию метода вспомогательной системы. Обобщённая рассматривается, как правило, для однонаправленно связанных хаотических осцилляторов [1-7] и означает, что между состояниями однонаправленно связанных ведущей $\mathbf{x}_d(t)$ и ведомой $\mathbf{x}_r(t)$ систем:

$$\dot{\mathbf{x}}_d = \mathbf{G}(\mathbf{x}_d(t)), \quad \dot{\mathbf{x}}_r = \mathbf{H}(\mathbf{x}_r(t)) + \epsilon \mathbf{A}(\mathbf{x}_d(t) - \mathbf{x}_r(t)), \quad (1)$$

где \mathbf{G} и \mathbf{H} - операторы эволюции, \mathbf{A} - матрица связи, ϵ - параметр связи, существует некая функциональная зависимость $\mathbf{F}[\cdot]$. После завершения переходного процесса устанавливается следующее функциональное соотношение:

$$\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]; \quad (2)$$

Вид данной зависимости может быть весьма сложным, а процедура её нахождения нетривиальной [1-3]. В зависимости от функционального соотношения (гладкого или фрактального), устанавливающегося между осцилляторами, различают сильную (соответствует гладкой функциональной зависимости) и слабую (соответствует фрактальной функциональной зависимости) режимы хаотической синхронизации [1-5]. Известно несколько методов диагностирования обобщенной синхронизации, предложенных в литературе. Одним из таких методов является метод вспомогательной системы [1-3, 6-7, 11].

Суть метода вспомогательной системы заключается в введении в рассмотрение системы $\mathbf{x}_a(t)$, которая идентична ведомой системе $\mathbf{x}_r(t)$, однако, отличается в задании начальных условий, которые, тем не менее, должны находиться в бассейне притяжения того же самого аттрактора [6-7]. Такая система называется вспомогательной системой. При отсутствии обобщённой синхронизации векторы состояний обеих систем, и ведомой $\mathbf{x}_r(t)$, и вспомогательной $\mathbf{x}_a(t)$, принадлежат одному хаотическому аттрактору, однако,

при этом различны. Но, при проявлении обобщённой синхронизации за счёт установления функциональных зависимостей $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ и $\mathbf{x}_a(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$, векторы состояния обеих систем станут идентичными $\mathbf{x}_r(t) \equiv \mathbf{x}_a(t)$ после завершения переходного процесса. Таким образом, можно утверждать, что в динамических системах присутствует обобщённая синхронизация, если имеется эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса.

Во втором разделе первой главы метод вспомогательной системы рассматривается на примере однонаправленно связанных систем Ресслера. Рассмотрим однонаправленно связанные осцилляторы, описываемые системой уравнений Ресслера [3]. Они выглядят следующим образом:

$$\dot{x}_d = -\omega_d y_d - z_d, \quad \dot{y}_d = \omega_d x_d + a y_d, \quad \dot{z}_d = p + z_d(x_d - c), \quad (3)$$

$$\dot{x}_r = -\omega_r y_r + \epsilon(x_d - x_r), \quad \dot{y}_r = \omega_r x_r + a y_r, \quad \dot{z}_r = p + z_r(x_r - c), \quad (4)$$

где $a = 0.15$, $p = 0.2$, $c = 10.0$, - управляющие параметры, а ϵ - параметр связи между системами. Управляющий параметр ведомой системы $\omega_r = 0,95$ фиксирован и характеризует основную частоту колебаний, а управляющий параметр ведущей системы ω_d меняется в пределах значений от 0.8 до 1.1 для того, чтобы обеспечить расстройку параметров взаимодействующих осцилляторов.

Воспользуемся методом вспомогательной системы. Введём систему, идентичную ведомой системе (4), но с иными начальными условиями:

$$\dot{x}_a = -\omega_r y_a + \epsilon(x_d - x_a), \quad \dot{y}_a = \omega_r x_a + a y_a, \quad \dot{z}_a = p + z_a(x_a - c), \quad (5)$$

С помощью данного метода становится возможным проследить изменение поведения в результате появления в системе обобщённой синхронизации. В зависимости от расстройки управляющего параметра ведущей системы ω_d и изменения параметра связи ϵ можно диагностировать появление

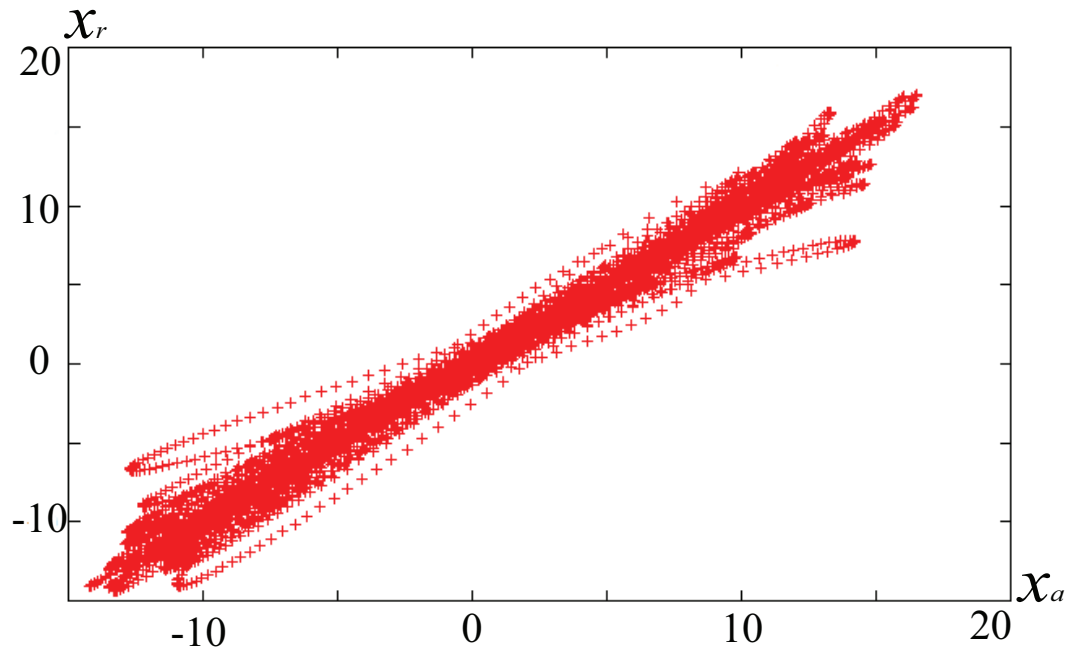


Рис. 1: Зависимость координаты x_r (7) ведомой системы от координаты x_a (9) вспомогательной системы при параметре связи $\epsilon = 0.07$ и частоте $w_d=1.0$;

режима обобщённой синхронизации с помощью ведомой и вспомогательной систем. Полученные результаты представлены на рисунках Рис.1 и Рис.2. На рисунке 1 продемонстрирована зависимость координат ведомой системы от вспомогательной при значении параметра связи $\epsilon < 0,11$. Можно уверенно сказать, что на данном рисунке продемонстрировано отсутствие режима обобщённой синхронизации в системах Ресслера, поскольку, значения координат состояний ведомой x_r и вспомогательной x_a систем хаотичны и не совпадают с друг другом. Однако, при значении $\epsilon > 0,11$ координаты состояния ведомой x_r и вспомогательной x_a систем идентичны. Данный вывод подтверждается рисунком (Рис.2), где координаты ведущей и ведомой систем "выстроены" в линию.

Таким образом, с помощью метода вспомогательной системы становится возможным отследить наличие или отсутствие обобщённой синхронизации. На примере двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов было показано, что наличие обобщённой синхронизации характеризуется эквивалентностью состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса. Этого можно добиться увеличением параметра связи

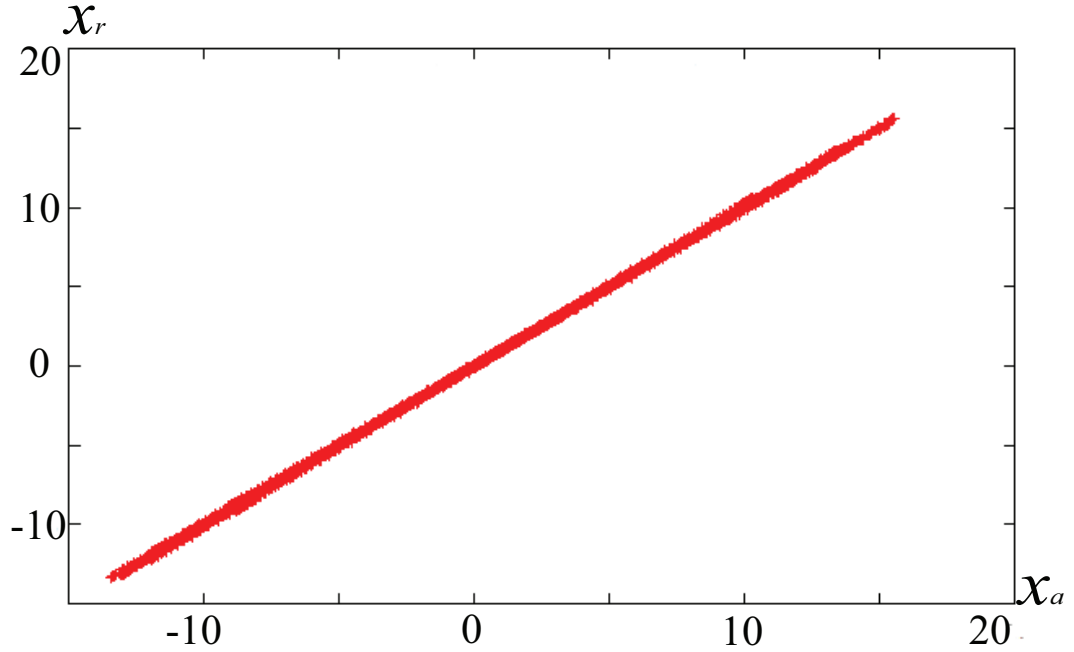


Рис. 2: Зависимость координаты x_r (7) ведомой системы от координаты x_a (9) вспомогательной системы при параметре связи $\epsilon = 0.11$ и частоте $w_d=1.0$;

ϵ . Однако, с помощью данного метода нельзя установить причины, которые приводят к возникновению режима обобщённой синхронизации. Чтобы выявить данные процессы, используют иной метод - метод модифицированной системы.

В первом разделе второй главы рассматривают метод модифицированной системы [1, 4]. Его суть заключается в рассмотрении ведомой системы как некой модифицированной системы:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{H}'(\mathbf{x}_m(t), \epsilon); \quad (6)$$

под внешним воздействием $\epsilon \mathbf{A} \mathbf{x}_d(t)$:

$$\dot{\mathbf{x}}_m = \mathbf{H}'(\mathbf{x}_m(t), \epsilon) + \epsilon \mathbf{A} \mathbf{x}_d(t), \quad (7)$$

где

$$\mathbf{H}'(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{H}(\mathbf{x}(t)) - \epsilon \mathbf{A} \mathbf{x}(t); \quad (8)$$

Здесь слагаемое $-\epsilon \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ фактически определяет дополнительную диссипацию в модифицированной системе (6) [4].

По сути, режим обобщённой синхронизации, возникающий в системе (1) при увеличении параметра связи ϵ , может быть представлен как результат двух взаимосвязанных процессов, происходящих одновременно: увеличение диссипации в модифицированной системе (6) и рост амплитуды внешнего сигнала [1, 4]. Оба данных процесса связаны друг с другом с помощью параметра связи ϵ . В результате этого факта, они не могут быть реализованы в ведомой системе (1) независимо друг от друга [1]. Однако, чтобы более детально разобраться в механизмах, приводящих к возникновению режима обобщённой синхронизации, рассмотрим оба этих процесса независимо друг от друга.

Во втором разделе второй главы проводится анализ влияния параметра связи. Для модифицированной системы параметр связи ϵ играет роль параметра диссипации [1-4]. Если $\epsilon=0$, то поведение модифицированной системы $\mathbf{x}_m(t)$ идентично поведению ведомой системы $\mathbf{x}_r(t)$ в отсутствие связи. Увеличение параметра диссипации приводит к упрощению динамики модифицированной системы (6). В результате этого модифицированная система должна переходить от хаотических колебаний к периодическим, а в случае большого значения параметра диссипации, к стационарному состоянию [1-4].

Внешнее воздействие в соотношении (7), наоборот, стремится навязать хаотическую динамику ведущей системы $\dot{\mathbf{x}}_d(t)$ модифицированной системе $\mathbf{x}_m(t)$ и, таким образом, усложнить динамику модифицированной системы [1-4, 11]. Очевидно, что обобщённая синхронизация может существовать только при условии, что собственная хаотическая динамика модифицированной системы $\mathbf{x}_m(t)$ будет подавлена увеличением параметра диссипации. Только в этом случае текущее состояние модифицированной системы $\mathbf{x}_m(t)$ полностью определяется внешним сигналом, то есть выполняется соотношение $\mathbf{x}_m(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$. Согласно уравнению (7), функциональное соотношение $\mathbf{x}_r(t) = \mathbf{F}[\mathbf{x}_d(t)]$ также будет справедливым, а значит, будет наблюдаться ре-

жим обобщённой синхронизации [1, 4].

Таким образом, с помощью метода модифицированной системы можно утверждать, что возникновение режима обобщённой синхронизации в рассматриваемой системе (1) возможно лишь при таких значениях параметра ϵ , при которых в модифицированной системе наблюдаются периодические колебания или стационарный режим. Хорошо известно, что даже гармонический внешний сигнал может вызвать хаотические колебания в динамической системе с периодической динамикой. Поэтому установившийся режим должен быть достаточно стабильным, чтобы внешнее воздействие не могло возбудить собственную хаотическую динамику модифицированной системы. По сути, на устойчивость режима, прежде всего, влияют свойства самой модифицированной системы.

Третья глава посвящена анализу режима обобщённой синхронизации с помощью вычисления условных ляпуновских экспонент [6, 8, 13]. Рассмотрим две системы, в которых наблюдается хаотическая динамика. Если размерности фазовых пространств ведущей и ведомой систем соответственно равны N_d и N_r , то поведение однонаправленно связанных хаотических осцилляторов может быть охарактеризовано с помощью спектра ляпуновских показателей $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_{N_r+N_d}$ [6]. Поскольку поведение ведущей системы не зависит от состояния ведомой системы, то спектр показателей Ляпунова может быть разделён на 2 части: показатели Ляпунова ведущей системы $\lambda_1^d \geq \lambda_2^d \geq \dots \geq \lambda_{N_d}^d$, и условные показатели Ляпунова ведомой системы $\lambda_1^r \geq \lambda_2^r \geq \dots \geq \lambda_{N_r}^r$. При этом, как минимум два старших показателя Ляпунова должны быть положительными при отсутствии связи между системами. Однако, если старший условный показатель Ляпунова λ_1^r является отрицательным, можно утверждать, что в системе существует обобщённая синхронизация. По сути, это позволяет выявить границу возникновения хаотической обобщённой синхронизации.

Рассмотрим метод расчета показателей Ляпунова для двух однонаправленно связанных хаотических осцилляторов, описываемых системами уравне-

ний Ресслера [3].

$$\dot{x}_d = -\omega_d y_d - z_d, \quad \dot{y}_d = \omega_d x_d + a y_d, \quad \dot{z}_d = p + z_d(x_d - c), \quad (9)$$

$$\dot{x}_r = -\omega_r y_r + \epsilon(x_d - x_r), \quad \dot{y}_r = \omega_r x_r + a y_r, \quad \dot{z}_r = p + z_r(x_r - c), \quad (10)$$

где $a=0.15$, $p=0.2$, $c=10.0$, - это управляющие параметры, а ϵ - параметр связи системы. Управляющий параметр ведомой системы фиксирован $\omega_r=0,95$ и характеризует основную частоту колебаний. Управляющий параметр ведущей системы ω_d отвечает за расстройку осцилляторов и меняется в пределах значений от 0.8 до 1.1.

Для того, чтобы изучить явление обобщённой синхронизации, для системы (9-10) были рассчитаны ляпуновские показатели. При проведении этой операции использовался метод Грама-Шмидта [14-15]. Изменяя параметр связи ϵ , были определены значения показателей Ляпунова. Полученная зависимость спектра показателей Ляпунова от параметра связи ϵ приведена на рис.3. Здесь два показателя λ_1^d и λ_2^d соответствуют поведению ведущей системы и не зависят от параметра связи ϵ . Другие два показателя λ_1^r и λ_2^r характеризуют поведение ведомой системы и являются условными ляпуновскими показателями [1, 11, 13]. При значении параметра связи $\epsilon=0$ условные показатели Ляпунова λ_1^r и λ_2^r совпадают с Ляпуновскими показателями модифицированной системы λ_1^m и λ_2^m . Так как при $\epsilon=0$ в модифицированной системе наблюдаются хаотические колебания, то $\lambda_1^r > 0$, а $\lambda_2^r = 0$. При увеличении параметра связи второй условный показатель Ляпунова становится отрицательным, однако, поскольку старший условный показатель Ляпунова положителен, динамика модифицированной системы остаётся хаотической [1, 4]. С дальнейшим увеличением параметра связи ϵ поведение модифицированной системы становится периодическим, однако, режим обобщённой синхронизации в однонаправленно связанных осцилляторах ещё не наблюдается [4].

Режим обобщённой хаотической синхронизации начинает проявлять-

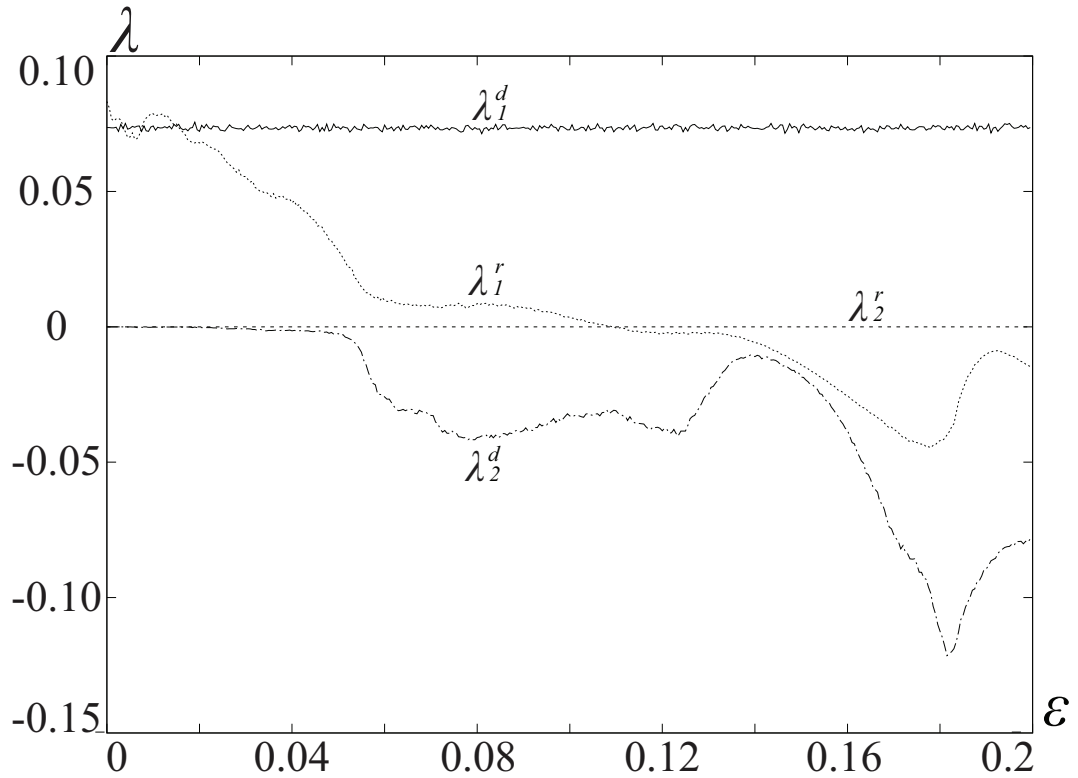


Рис. 3: Зависимость спектра ляпуновских показателей от ϵ при $w_d=0.99$ для системы Ресслера;

ся при значении параметра связи $\epsilon \approx 0.109$. Именно в этот момент значение старшего условного ляпуновского показателя λ_1^r становится слабо отрицательным, а периодический режим модифицированной системы становится достаточно стабильным [1, 4]. Данный вывод также подтверждается рисунками 1 и 2, где с помощью метода вспомогательной системы было выявлено, что при значении параметра связи $\epsilon=0.11$ наблюдается эквивалентность состояний ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса [1-3, 6-7]. Если продолжать увеличивать параметр связи ϵ , то в системе окончательно начинает устанавливаться режим обобщённой хаотической синхронизации.

В первом разделе четвертой главы для диагностики обобщенной хаотической синхронизации в однонаправленно связанных системах используется метод ближайших соседей [7, 19]. В данном методе наличие функционального соотношения между состояниями взаимодействующих хаотических осцилляторов означает, что все близкие состояния ведущей системы $\mathbf{x}_d(t)$ в фазовом пространстве соответствуют близким состояниям ведомой системы

$\mathbf{x}_r(t)$ в фазовом пространстве. Для двух взаимно связанных систем остаётся справедливым и обратное утверждение, что все близкие состояния в фазовом пространстве второй системы $\mathbf{u}(t)$ должны соответствовать близким состояниям в фазовом пространстве первой системы $\mathbf{x}(t)$ [19]. Количественной характеристикой, которой обозначается степень близости состояний систем, является среднее расстояние между двумя состояниями одной из систем \mathbf{u}^k и \mathbf{u}^{kn} , нормированное на среднее расстояние δ между случайно выбранными состояниями другой системы:

$$d = 1/(N\delta) \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathbf{u}^k - \mathbf{u}^{kn}\|, \quad (11)$$

где N - число производимых итераций.

В момент, когда в системе наблюдается режим обобщённой хаотической синхронизации, величина $d \rightarrow 0$. Соответственно, в отсутствие данного режима величина $d \approx 1$.

Таким образом, благодаря методу ближайших соседей становится возможным определить порог возникновения обобщённой хаотической синхронизации. Однако, данный метод является достаточно неточным, и поэтому обычно метод ближайших соседей используют для уточнения результатов, полученных с помощью других методов. На основе метода ближайших соседей строится другой метод анализа обобщённой синхронизации - метод фазовых трубок.

В втором разделе четвертой главы рассматривается метод фазовых трубок. Согласно концепции обобщённой хаотической синхронизации, синхронный режим означает, что под влиянием ведущей системы $\mathbf{x}_d(t)$ ведомая система $\mathbf{x}_r(t)$ приходит в состояние, которое однозначно определяется состоянием ведущей системы, при этом этот процесс «сходимости» определяется величиной старшего условного показателя Ляпунова $\lambda_1^r < 0$. По сути, за определённое время τ ведущая система $\mathbf{x}_d(t)$ заставляет ведомую систему $\mathbf{x}_r(t)$ достигнуть состояния, при котором система не зависит от начальных усло-

вий. Состояние ведомой системы $\mathbf{y}(t)$ зависит не только от состояния ведущей системы $\mathbf{x}(t)$ в момент времени t , но и от всей предыстории этого состояния в течение временного интервала $(t - \tau, t]$, причем время сходимости связано со старшим условным показателем Ляпунова соотношением $\tau \sim 1/|\lambda_1^r|$ [16-17].

Выберем произвольно опорную точку $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0$ в ведущей системе, которой будет соответствовать точка $\mathbf{y}_0(t) = \mathbf{y}_0$ в ведомой системе [16]. Возьмём точку $\mathbf{x}_j(t) = \mathbf{x}_j$ в ведущей системе, близкую к опорной, таким образом, что $|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0| < \epsilon$, и тогда $\mathbf{y}_j(t) = \mathbf{y}_j$ - соответствующая точка в ведомой системе. Обозначим векторы отклонения фазовой точки от опорной точки \mathbf{x}_0 в ведущей системе через $\delta\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j - \mathbf{x}_0$, а в ведомой системе $\delta\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_j - \mathbf{y}_0$. Тогда можно записать следующее:

$$\mathbf{y}_j = \mathbf{y}_0 + \delta\mathbf{y}_j = \mathbf{F}[\mathbf{x}_j] = \mathbf{F}[\mathbf{x}_0 + \delta\mathbf{x}_j] \approx \mathbf{F}[\mathbf{x}_0] + \mathbf{JF}[\mathbf{x}_0]\delta\mathbf{x}_j; \quad (12)$$

Здесь $\mathbf{JF}[\mathbf{x}_0]$ - якобиан $\mathbf{F}[\cdot]$, вычисленный в опорной точке \mathbf{x}_0 , который является m -мерной матрицей.

Наличие режима обобщённой хаотической синхронизации предполагает выполнение соотношения

$$\mathbf{y}_0 = \mathbf{F}[\mathbf{x}_0], \quad (13)$$

из чего следует, что соотношение (12) можно переписать в виде

$$\delta\mathbf{y}_j = \mathbf{A}\delta\mathbf{x}_j, \quad (14)$$

где $\mathbf{A} = \mathbf{JF}[\mathbf{x}_0]$ - квадратичная матрица размерности m [16].

Рассмотрим малые отклонения $\delta\mathbf{x}_s$ и $\delta\mathbf{y}_s$, которые малы на временном интервале $t - \tau \leq s \leq t$. Тогда соотношение (14) можно записать в виде

$$\delta\mathbf{y}(t) = \int_{t-\tau}^t \mathbf{JF}[\mathbf{x}(s)]\delta\mathbf{x}(s)ds. \quad (15)$$

В силу малости отклонений $\delta\mathbf{x}_s$ и $\delta\mathbf{y}_s$ можно записать

$$\delta\mathbf{x}(s) = \mathbf{B}(s)\delta\mathbf{x}(t), t - \tau < s \leq t, \quad (16)$$

где $\mathbf{B}(s)$ - неизвестная матрица с коэффициентами, которые зависят от времени. Тогда имеем

$$\delta\mathbf{y}(t) = \int_{t-\tau}^t \mathbf{JF}[\mathbf{x}(s)]\mathbf{B}(s)\delta\mathbf{x}(t)ds. \quad (17)$$

и, как следствие,

$$\delta\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t)\delta\mathbf{x}(t), \quad (18)$$

где $\mathbf{C}(t)$ - квадратичная матрица m -размерности, определяемая как

$$\mathbf{C}(t) = \int_{t-\tau}^t \mathbf{JF}[\mathbf{x}(s)]\mathbf{B}(s)ds. \quad (19)$$

Таким образом, уравнение (18) формально совпадает с уравнением (14) и, следовательно, может быть подтверждено расчетами векторов \mathbf{z}_j так же, как это было сделано для уравнения (14). В то же время уравнение (14) было получено в предположении, что векторы \mathbf{x}_0 и \mathbf{x}_j близки друг к другу, тогда как уравнение (18) было получено при ограничении, требующем приближения траекторий в течение временного интервала $t - \tau \leq s \leq t$ [16]. Поскольку для хаотических систем фазовые траектории могут сходиться в одном направлении фазового пространства и расходиться в другом, соседние векторы ведущей системы могут быть охарактеризованы различными фазовыми траекториями. Поэтому для характеристики близости фазовых траекторий вводится понятие фазовой трубки [16-17]. Выражение, которое описывает фазовую трубку, выглядит следующим образом:

$$T_\tau = \mathbf{x} : |\mathbf{x}_0(s) - \mathbf{x}| < \epsilon, \sin[t_0 - \tau; t_0], \quad (20)$$

где ϵ - малая величина.

Таким образом, для анализа режима обобщённой хаотической синхронизации в системе требуется учитывать только такие векторы, фазовые траектории которых проходят через фазовую трубку длиной τ [16-17].

В третьем разделе четвертой главы рассмотрим поведение однонаправленно связанных систем Ресслера, описываемых уравнениями (11-12), при помощи метода фазовых трубок. Данную систему будем рассматривать при значении параметра связи $\epsilon=0.11$, когда в системе зарождается режим обобщённой хаотической синхронизации.

Выберем в фазовом пространстве ведущей системы на аттракторе опорную точку \mathbf{x}_0 в произвольный момент времени $t=100000$. От опорной точки рассчитаем фазовую трубку длиной $\tau=230$ единиц с радиусом $\sigma=0.5$. Данная траектория, вокруг которой строится фазовая трубка, является опорной траекторией. На рис.4 представлен фазовый портрет ведущей системы \mathbf{x} и выбранная фазовая трубка (обозначенная толстой линией) длиной $\tau=230$ в момент времени $t=100000$.

Далее отслеживаем поведение ведущей системы и фиксируем моменты времени, когда фазовые траектории ведущей системы на всём временном промежутке τ удовлетворяют условию (20). Если такое условие выполняется, то можно говорить о том, что найдена такая траектория, которая попадает в фазовую трубку и, соответственно, близка к опорной траектории [16-17]. В качестве определения степени синхронизма рассматриваемых осцилляторов в опорной точке рассмотрим квадрат разницы между x -координатами ведомой \mathbf{x}_r и вспомогательной \mathbf{x}_a систем. Если $(x_r - x_a)^2$ близко или равно 0, то можно говорить о высокой степени синхронизма в системе, что соответствует ламинарной фазе. Если же значение $(x_r - x_a)^2$ велико, то в данный момент времени в системе наблюдается асинхронизм, что соответствует турбулентной фазе [18].

Выбранная фазовая трубка находится в ламинарной фазе (рис.5). На данном рисунке представлена зависимость квадрата разницы x -координат ве-

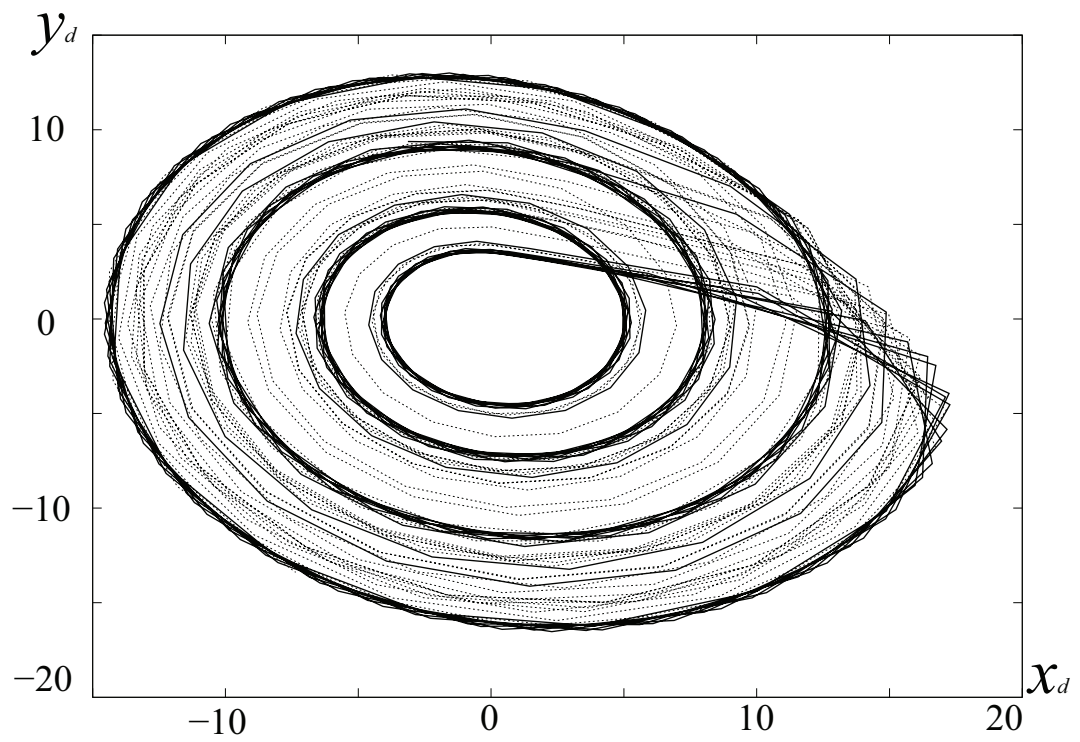


Рис. 4: Фазовый портрет ведущей системы \mathbf{x}_d (пунктирная линия); выбранная фазовая трубка с опорной точкой $t=100000$ (толстая линия);

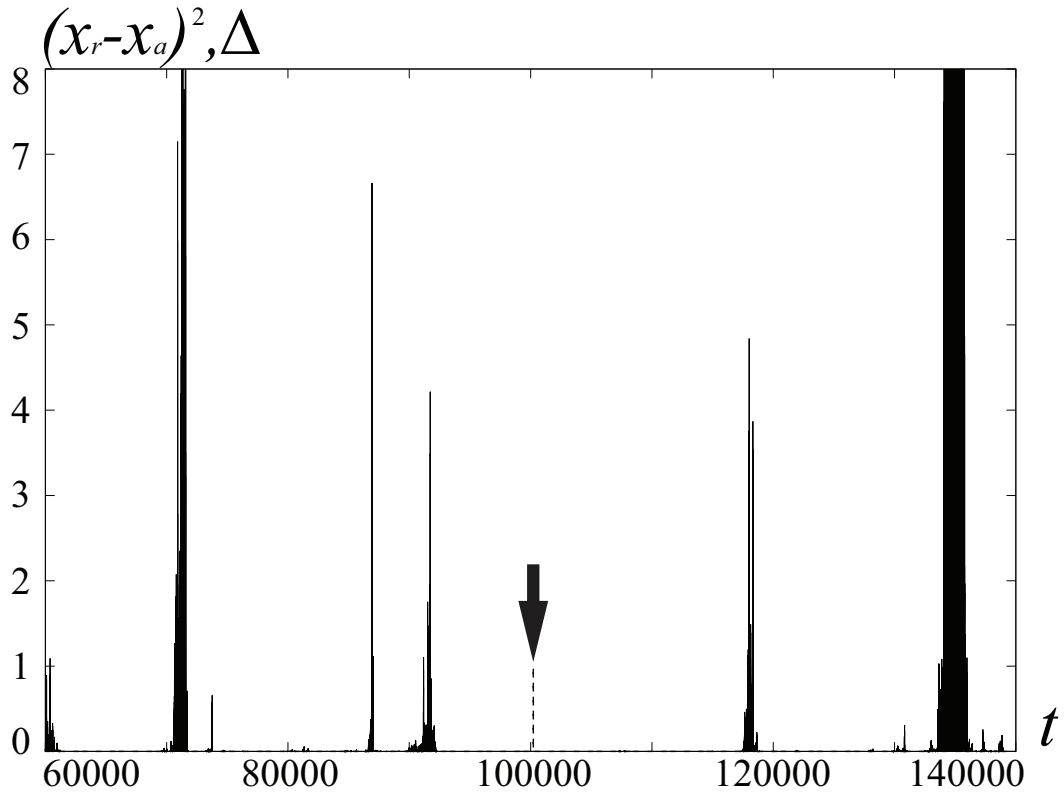


Рис. 5: Зависимости квадрата разницы x -координат ведомой \mathbf{x}_r и вспомогательной \mathbf{x}_a систем (линия) и величины Δ (пунктирная линия) от времени t ; стрелкой показана выбранная опорная точка, от которой происходит расчёт фазовой трубки длиной τ ;

домой \mathbf{x}_r и вспомогательной \mathbf{x}_a систем и величины Δ от времени t . Величина Δ вводится для определения фазовых траекторий, близких к опорной. Если находятся такие траектории, которые близки к опорной траектории, то $\Delta=1$. Квадрат разницы x -координат отображает ламинарные и турбулентные фазы. Стрелочкой показана выбранная фазовая трубка ($\Delta=1$).

Проведём анализ временной реализации и найдём такие траектории, которые близки к выбранной опорной траектории. Теоретически траектории, которые попадают в фазовую трубку, должны находиться в таких же фазах, где была выбрана фазовая трубка. Однако, на практике для фазовой трубки, выбранной в ламинарной фазе при $t=100000$ и длиной $\tau=205$ была найдена 21 траектория, из которых только 12 находились в ламинарной фазе. Для фазовой трубки длиной $\tau=230$ в ламинарной фазе находятся только 4 траектории из найденных 6.

Таким образом, можно сделать вывод, что с помощью метода фазовых

трубок становится возможным рассмотреть турбулентные и ламинарные фазы в хаотических связанных осцилляторах, находящихся в режиме обобщённой синхронизации. В зависимости от выбора опорной точки в ламинарной или турбулентной фазе с некоторой погрешностью можно найти такие траектории, которые будут близки к опорной траектории, причем данные траектории должны находиться в той же фазе, что и опорная траектория. Точность результатов зависит от длины выбранной фазовой трубки τ . С её увеличением растёт и точность нахождения близких траекторий, однако, уменьшается их количество. Поэтому необходимо выбирать оптимальную длину рассматриваемой фазовой трубки.

Заключение

В ходе магистерской работы было рассмотрено явление обобщённой хаотической синхронизации в динамических системах. Были продемонстрированы методы анализа и диагностирования режима обобщённой синхронизации в динамических системах, а именно метод вспомогательной системы, метод модифицированной системы, метод расчёта показателей Ляпунова и метод фазовых трубок, как продолжение метода ближайших соседей. Рассмотрены принципы работы данных методов, а также критерии, по которым возможно диагностировать наличие режима обобщённой синхронизации. Перечисленные методы были непосредственно рассмотрены на примере двух однонаправленно связанных систем Ресслера.

Метод вспомогательной системы позволяет диагностировалось наличие или отсутствие в наблюдаемой системе режима обобщённой синхронизации в зависимости от параметра связи ϵ . О наличии обобщённой синхронизации в системе можно говорить в том случае, когда состояния ведомой и вспомогательной систем после переходного процесса эквивалентны. Благодаря методу модифицированной системы можно утверждать, что возникновение режима обобщённой синхронизации в системе двух хаотических осцилляторов возможно лишь при таких значениях параметра ϵ , при которых в модифицированной системе наблюдаются периодические колебания или стационарный режим. С помощью метода расчёта показателей Ляпунова можно также определить порог возникновения обобщённой синхронизации. Режим обобщённой синхронизации устанавливается в момент, когда значение старшего условного ляпуновского показателя λ_1^r становится слабо отрицательным, а периодический режим модифицированной системы становится стабильным. С помощью метода ближайших соседей возможно определить порог возникновения обобщённой хаотической синхронизации, однако, данный метод является достаточно неточным. Метод фазовых трубок рассматривается как продолжение метода ближайших соседей. Главная особенность данного ме-

тогда состоит в том, что состояние ведомой системы \mathbf{x}_r зависит не только от состояния ведущей системы \mathbf{x}_d , но и всей предыстории в течение временного интервала $(t - \tau, t]$. Фазовая трубка должна быть выбрана такой длины τ , чтобы траектории, близкие к опорной, находились в той же фазе, где была выбрана фазовая трубка. С увеличением длины рассматриваемой трубки растёт и точность метода фазовых трубок, однако, количество найденных траекторий, попадающих в фазовую трубку, уменьшается.

Список литературы

- [1] А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов. О механизмах, приводящих к установлению режима обобщённой синхронизации // ЖТФ, 2006, т. 76, №2, с. 1-9;
- [2] А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов, С.А. Шурыгина // Известия РАН. Серия физическая, 2012, том 76, № 12, с. 1495–1499;
- [3] А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов // РЭ, 2007, том 52, № 7, с. 1–11;
- [4] А.Е. Храмов, А.А. Короновский // Phys. Rev. E. 2005. V. 71. < 6. P. 067201;
- [5] К. Pyragas: "Weak and strong synchronization of chaos", Phys. Rev. E. 1996. V.54. < 5.P.R4508;
- [6] H.D.I. Abarbanel, N.F. Rulkov, M.M. Sushchik // Phys. Rev. E. 1996. V.53. < 5.P.4528;
- [7] N.F. Rulkov, M.M. Sushchik, L.S. Tsimring, H.D.I. Abarbanel // Phys. Rev. E. 1995. V. 51. < 2. P. 980;
- [8] В.С. Анищенко, В.В. Астахов, Т.Е. Вадивасова и др. Нелинейные эффекты в хаотических и стохастических системах. М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003;
- [9] К.И. Агуреев. Применение детерминированного хаоса для передачи информации;
- [10] L.M. Pecora, T.L. Carroll // Phys. Rev. A.-1991.-Vol.44.P.2374;
- [11] А.А. Темирбаев. Синхронизация в системе радиотехнических генераторов с глобальной и нелинейной связью. Алматы, 2012;

- [12] И.И. Блехман. Синхронизация динамических систем. изд. Наука, Москва, 1971;
- [13] С.А. Шурыгина, О.И. Москаленко, А.А. Короновский, А.Е. Храмов. Обобщённая синхронизация во взаимно связанных системах с дискретным временем // Радиофизика. Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2013, № 1(3), с. 201-204;
- [14] С.П. Кузнецов. Динамический хаос: курс лекций. М. Физматлит, 2001;
- [15] К. Pyragas // Phys. Rev. E. 1997. Vol. 56. N 5. P. 51835188;
- [16] А.А. Koronovskii, О.И. Moskalenko, А.Е. Hramov // Phys. Rev. E. 84. 037201 (2011);
- [17] А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.Е. Храмов, С.А. Шурыгина. Об особенностях обобщённой синхронизации в однонаправленно и взаимно связанных отображениях и потоках: метод фазовых трубок // РЭ 2014, том 59, № 12, с. 1230–1241;
- [18] А.А. Короновский, О.И. Москаленко, А.А. Пивоваров, А.Е. Храмов // Письма в ЖТФ, 2017, том 43, вып. 7, (2016);
- [19] Parlitz U., Junge L., Lauterborn W., Kocarev L. // Phys. Rev. E. 1996. V. 54. № 2. P. 2115.