

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

Переход к гиперболическому хаосу в модельном отображении

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 431 группы

направления 09.03.02 Информационные системы и технологии

Факультета нелинейных процессов

Антиповой Марины Валерьевны

Научный руководитель
доцент кафедры ФОС, к.ф-м.н.

подпись, дата

Д.В.Савин

Зав. кафедрой физики открытых систем
д. ф-м.н., профессор

подпись, дата

А.А.Короновский

Саратов 2018

Введение.

Исследование сложной динамики и хаоса в нелинейных системах является одним из интенсивно развивающихся сегодня научных направлений. Особый интерес представляет исследование систем, где осуществляется переход к гиперболическому хаосу. Такие системы характеризуются хаотическим однородным гиперболическим аттрактором – притягивающимся объектом в фазовом пространстве диссипативной системы, составленным исключительно из седловых траекторий, причем локально вблизи этих траекторий фазовое пространство устроено однотипно [1].

Анализ такого рода хаоса довольно важен, т.к. сейчас в телекоммуникационных задачах находит свое применение хаотическая синхронизация, использовать которую можно, в первую очередь, при создании систем скрытой передачи информации. [2,3] Использование гиперболического хаоса в данных задачах дает большое преимущество, т.к. одним из его основных свойств является структурная устойчивость и, следовательно, нечувствительность к вариации управляющих параметров. В связи с этим применение систем с гиперболическим аттрактором может быть полезно в случае, когда схема передачи информации основана на установлении режима хаотической синхронизации между передатчиком и приемником.

Целью проведенной работы является наблюдение перехода к гиперболическому хаосу путем численного моделирования модельного отображения, и качественное исследование изменений, происходящих при переходе от необратимого отображения к обратимому.

Основные задачи состоят в компьютерном моделировании фазовых портретов и карт динамических режимов, служащих характерными иллюстрациями возможных бифуркаций, а также расчёт старших ляпуновских показателей, построение графиков зависимости ляпуновских показателей от параметра и моделировании карт ляпуновских показателей, а также построение отображения для фазы.

В 1 главе ВКР рассматриваются методы исследования хаотической динамики на примере дискретных отображений, где переход к хаосу осуществляется через бесконечную последовательность бифуркаций удвоения периода (сценарий Фейгенбаума).

Во 2 главе ВКР приводится исследование модельного отображения с гиперболическим хаосом с использованием методов, представленных в 1 главе.

Основная часть

В качестве объекта исследования будем использовать предложенное в [4,5] модельное отображение на комплексной плоскости вида

$$z_{n+1} = \frac{Rz_n(z_n+\varepsilon)}{\sqrt{1+z_n|(z_n+\varepsilon)|^2}} \quad (1)$$

Отображение сконструировано таким образом, чтобы демонстрировать аттрактор гиперболического типа, представляющий собой проекцию соленоида Смейла-Вильямса на плоскость.

Используя алгоритм Бенеттина, можно получить график зависимости ляпуновского показателя для отображения (1) от управляющего параметра R при различных фиксированных ε (рис.1). Из литературы известно [4,5], что отображение (1) имеет устойчивую неподвижную точку в окрестности начала координат, а хаотический аттрактор сосуществует с ней и расположен в другой области фазового пространства; бассейны притяжения этих режимов разделены репеллером, охватывающим начало координат. Соответственно, при расчете ляпуновского показателя и дальнейшем построении карт динамических режимов и карт старшего ляпуновского показателя необходимо выбирать начальные условия вдали от начала координат.

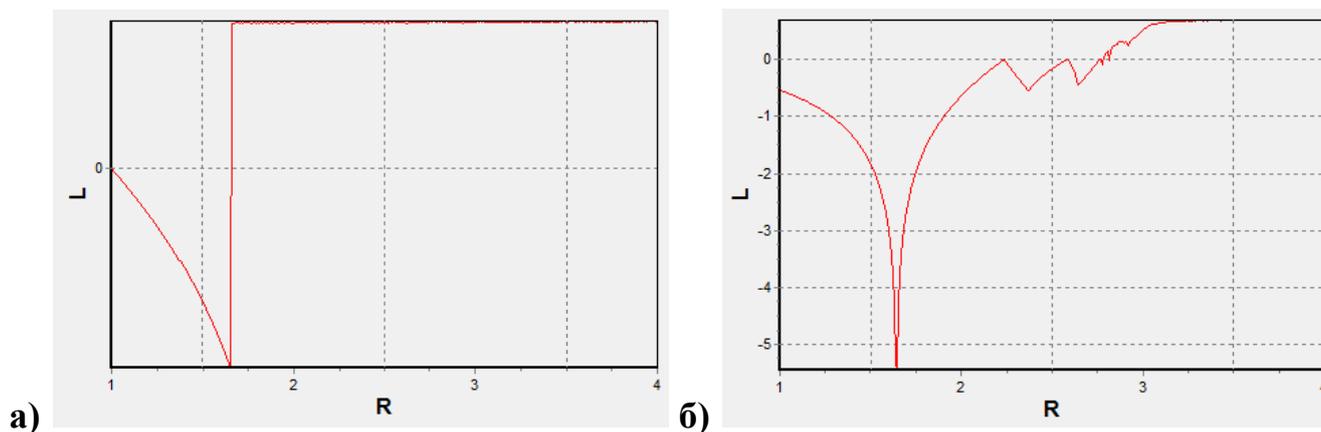


Рис.1 Графики зависимости старшего ляпуновского показателя от параметра R для отображения (б) и: а) при $\varepsilon=1$; б) при $\varepsilon=3$

На полученных графиках можно заметить, что в определенной области, где показатель Ляпунова принимает значения, близкие к $\ln 2 \approx 0.693$, его значение почти

не зависит от вариации управляющего параметра. Такое значение показателя Ляпунова соответствует значению для простейшей модели, демонстрирующей гиперболический хаос — отображения Бернулли $\varphi_{n+1} = 2\varphi_n \bmod 2\pi$ [6]. Т.е. можно сделать вывод, что мы попадаем в область, отвечающую гиперболическому хаосу, которая смещается вправо по мере увеличения параметра ε .

Построим теперь карту динамических режимов с фазовыми портретами в характерных областях карты, а так же карту старшего ляпуновского показателя этого отображения с характерными аттракторами в области хаоса на плоскости управляющих параметров (R, ε) . Кроме того, дополнительно красным цветом на карте ляпуновского показателя будет окрашиваться область, в которой значение ляпуновского показателя близко к $\ln 2$ (рис.2).

Представленный пример отлично демонстрирует, что общая структура карт очень похожа. На полученных рисунках отчетливо видны области регулярной динамики с характерными бифуркационными линиями, небольшая область негиперболического хаоса с окнами периодических режимов и большая однородная область, в которой значения показателя близко к $\ln 2$ и, следовательно, мы можем утверждать, что там, вероятно, расположен гиперболический аттрактор.

На карте динамических режимов можно видеть, что аттракторы в областях регулярной динамики принимают вид устойчивых периодических циклов.

В области негиперболического хаоса, находящейся рядом со скоплениями линий удвоения, хаотический аттрактор имеет довольно интересную и сложную структуру. Формы, которые он принимает, довольно различны и многообразны, вид его сильно изменяется при вариации параметров.

В «красной» же области, которая находится на рисунке ниже, портрет аттрактора имеет совсем другой вид — «двойной петли», причем его структура качественно не изменяется при вариации параметров внутри довольно широкой области пространства параметров. Это связано с тем, что гиперболический хаос обладает свойством структурной устойчивости.

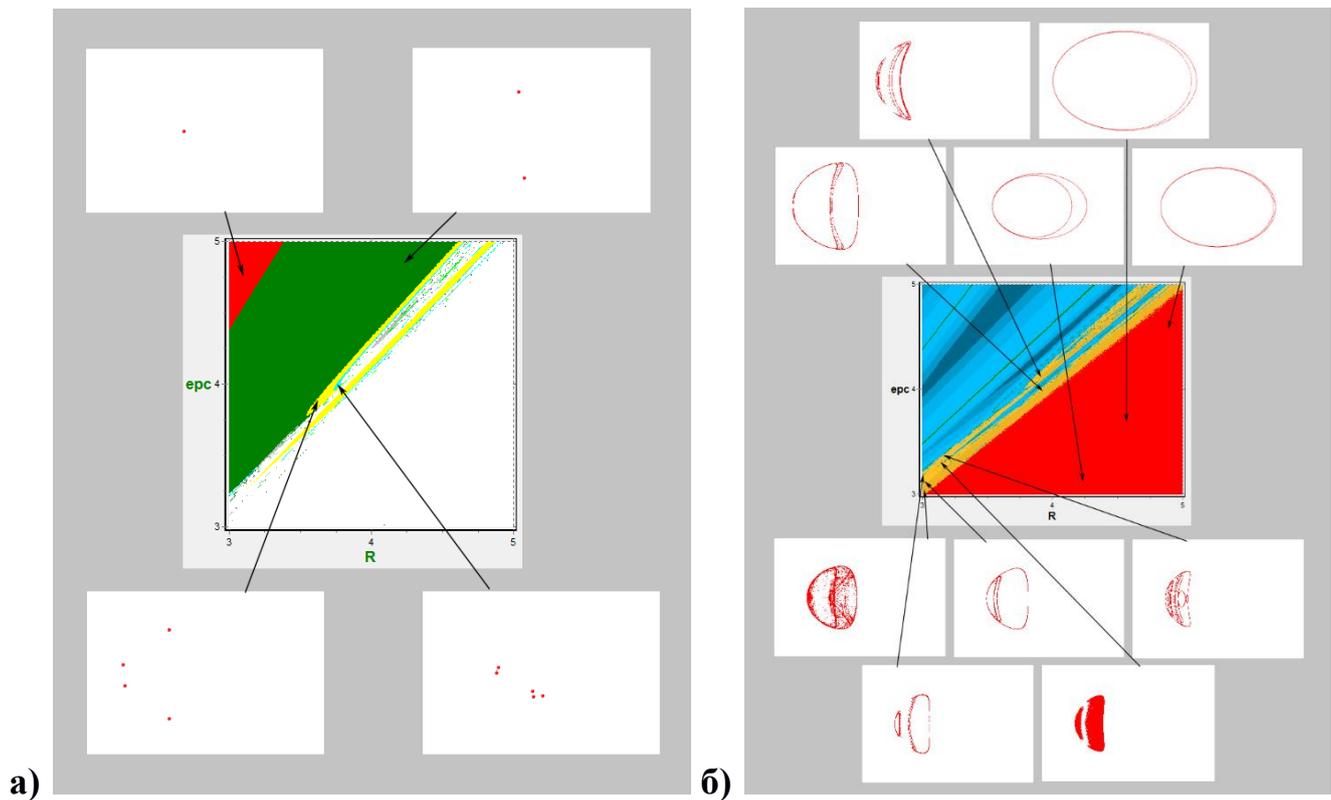


Рис. 2 Карта динамических режимов (а) и карта старшего ляпуновского показателя (б) для отображения (1) с параметрами $3 < R < 5$ и $3 < \varepsilon < 5$. На карте динамических режимов отмечены фазовые портреты в характерных областях регулярной динамики. На карте старшего ляпуновского показателя выделены аттракторы в областях гиперболического и негиперболического хаоса

Чтобы более подробно изучить полученную область негиперболического хаоса, полезным будет применить ещё один метод исследования - построить отображение первого возвращения для фазы комплексной переменной, т. е. зависимость её значения на $(n+1)$ -м шаге от значения на n -м шаге $\varphi_{n+1} = f(\varphi_n)$. Будем строить такие отображения в тех же точках, для которых строились аттракторы (рис. 3). В «красной» области форма отображения для фазы соответствует упоминавшемуся ранее отображению Бернулли, что является ещё одним аргументом в пользу того, что наблюдаемый аттрактор является гиперболическим. В области же негиперболического хаоса топология отображения для фазы искажается и перестает соответствовать отображению Бернулли.

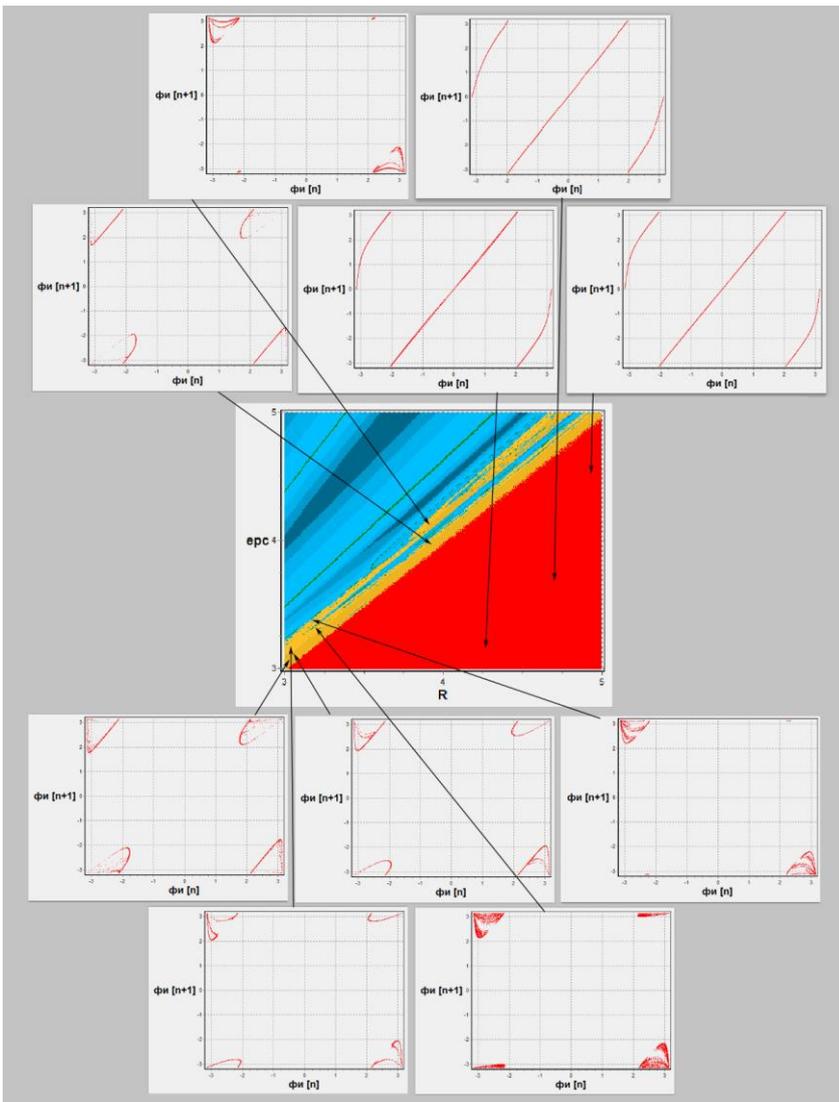


Рис. 3 Карта старшего ляпуновского показателя для отображения (1) с отображениями для фазы.

Переход к модели с обратимым временем. Отображение (1), можно модернизировать, добавив слагаемое $-bz_{n-1}$, чтобы получить обратимое отображение. Новая модель будет иметь вид:

$$z_{n+1} = \frac{Rz_n(z_n + \varepsilon)}{\sqrt{1 + z_n|(z_n + \varepsilon)|^2}} - bz_{n-1} \quad (2)$$

Полученное отображение является более реалистичной моделью, т.к. система становится 4-мерной и обратимой и, соответственно, может описывать динамику некоей потоковой системы. При $b=0$ оно сводится к отображению (1).

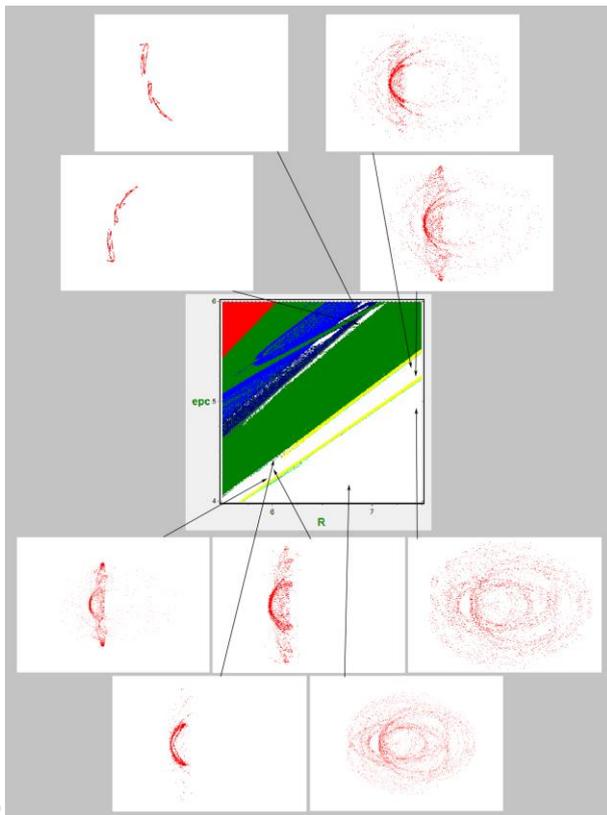
Построение карт динамических режимов и карт старшего ляпуновского показателя с варьированием параметра b показывает, что при увеличении этого

параметра области накопления линий удвоения смещаются в сторону бóльших R , а в области существования цикла периода 2 начинают «проступать» более высокие периоды (например, 3 и 9), которые раньше не были видны. Также на плоскости параметров появляется область квазипериодической динамики. А при очень большом b становится сложно построить четкую карту динамических режимов, что связано, вероятно, с усложнением структуры фазового пространства при приближении b к 1 и с уменьшением скорости сжатия фазового объёма при приближении системы к консервативной.

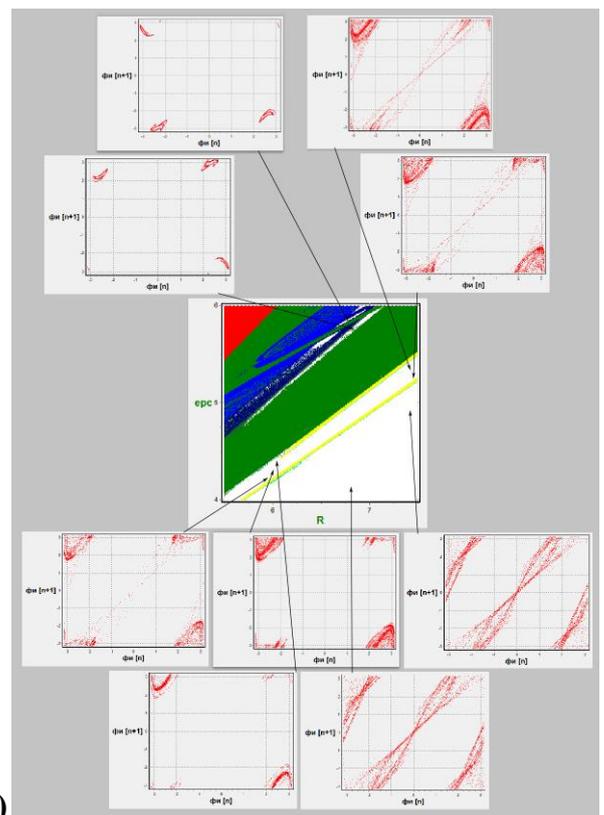
Для наглядности построим так же, как и для отображения (6), фазовые портреты и отображения для фазы в одних и тех же точках, чтобы посмотреть, как они будут меняться (рис.4). Возьмем, к примеру, параметр $b=0,5$ и $b=0,6$, т.к. на полученных фрагментах карт при $b=0,5$ «красная» область гиперболического хаоса еще видна, а при $b=0,6$ уже нет.

Хорошо заметно, что общая структура отображения фазы и фазовых портретов довольно схожа, но при $b=0,6$, когда ляпуновский показатель уже не принимает характерные для отображения Бернулли значения, структура аттрактора на фазовом портрете выглядит более «размытой» по сравнению со случаем $b=0,5$, где характерная форма аттрактора в виде двойной петли ещё прослеживается. Также на построенных рисунках видно, как меняется вид изображений при перемещении «вглубь» области, где наблюдается гиперболический хаос: они приобретают более четкую форму.

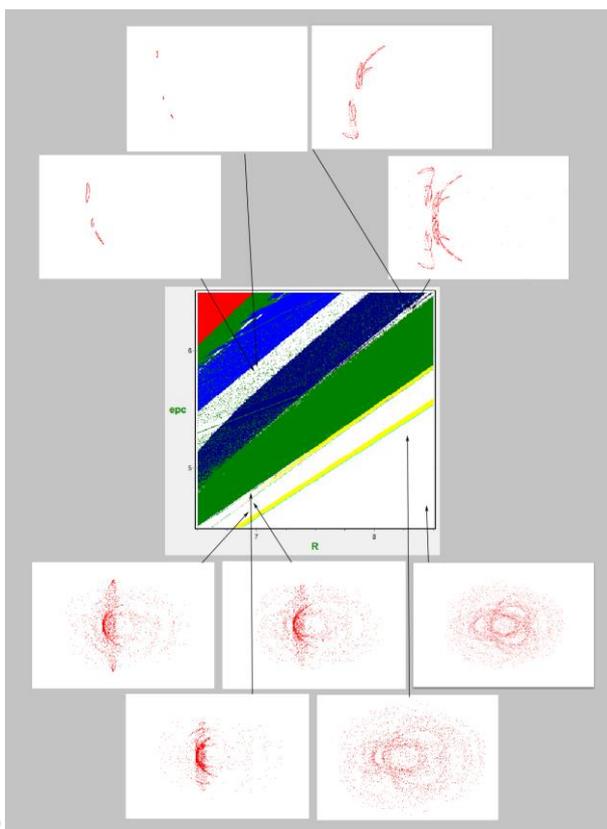
Для более подробного анализа полученных результатов построим увеличенные фрагменты карт старшего ляпуновского показателя (рис.5) и графики зависимости показателя Ляпунова от параметра R (рис.6) для тех же значений b .



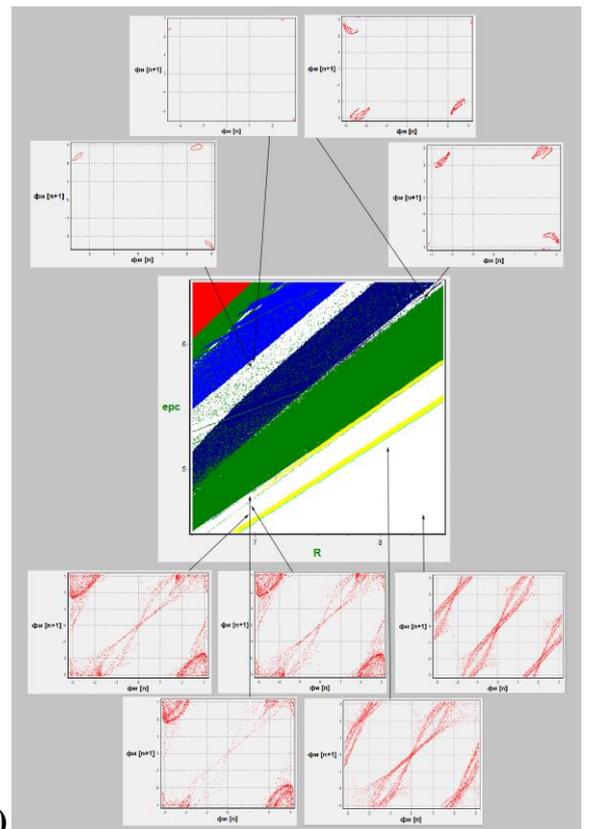
a.1)



a.2)



б.1)



б.2)

Рис.4 Карты динамических режимов для отображения (2) при $b=0,5$ (а) и $b=0,6$ (б) с фазовыми портретами (1) и отображениями для фазы (2).

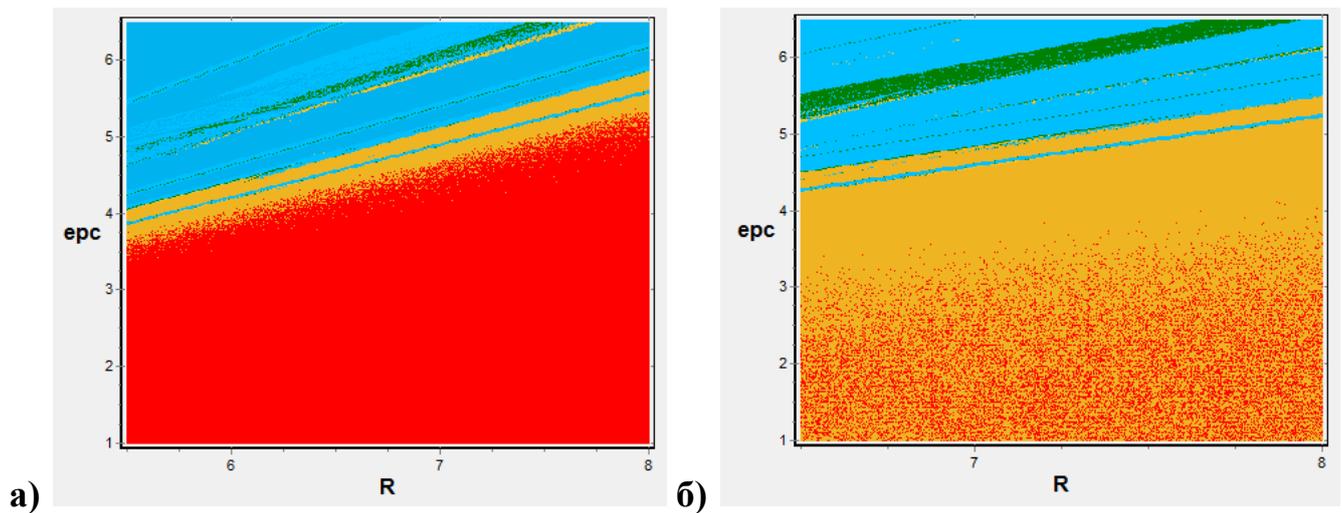


Рис.5 Карты старшего ляпуновского показателя для отображения (2) при параметрах $5,5 < R < 8$, $1 < \epsilon < 6,5$ и фиксированном параметре $b=0,5$ (а) и $b=0,6$ (б).

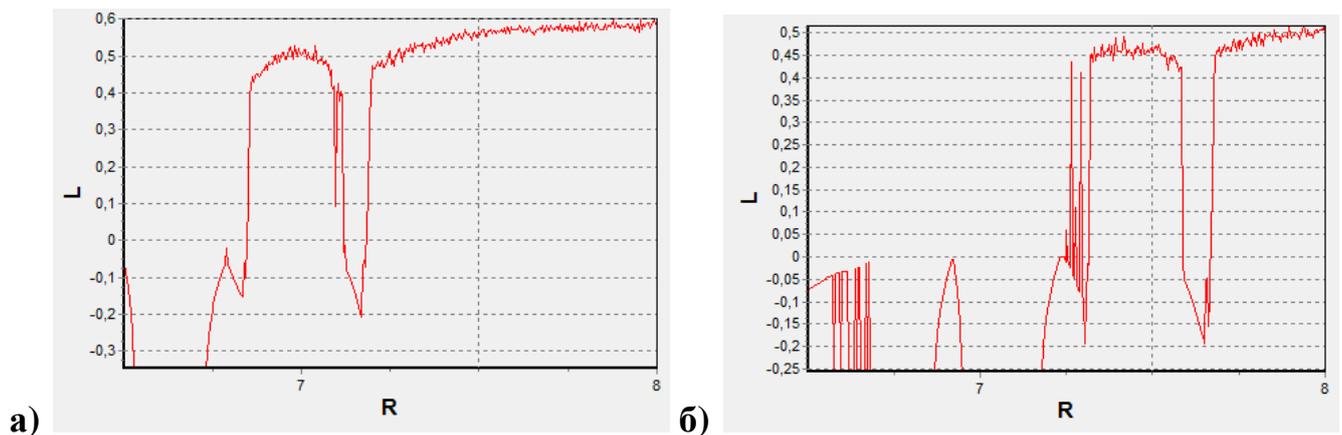


Рис.6 Графики зависимости старшего ляпуновского показателя от параметра R для отображения (2) при $\epsilon=5$ и значениях $b=0,5$ (а) и $b=0,6$ (б).

На полученных рисунках видно, как при увеличении параметра b область гиперболического хаоса, где старший показатель Ляпунова $\approx \ln 2$, исчезает. Одновременно с этим хорошо заметно увеличение «размытости» фазовых портретов и отображений для фаз, которые были получены ранее, что позволяет предположить потерю аттрактором свойств, характерных для гиперболического хаоса.

Заключение

В ходе работы были рассмотрены методы анализа хаотической динамики. Для рассмотренных отображений были построены и проанализированы фазовые портреты, карты динамических режимов. Помимо этого были рассчитаны старшие ляпуновские показатели, для которых строились графики зависимости показателей от управляющего параметра и моделировались ляпуновские карты, а также построены отображения для фазы.

При рассмотрении перехода к гиперболическому хаосу в модельном отображении было выяснено, что в определенной области, где показатель Ляпунова близок к $\ln 2 \approx 0.693$, его значение почти не зависит от вариации управляющего параметра, а портрет гиперболического аттрактора имеет вид «двойной петли», причем его структура качественно не изменяется при вариации параметров внутри довольно широкой области пространства параметров. Это связано с тем, что гиперболический хаос обладает свойством структурной устойчивости, т.е. устройство фазового пространства и характеристики динамики нечувствительны к вариации параметров и функций в определяющих уравнениях.

Построенное отображение для фазы в области гиперболического хаоса соответствует отображению Бернулли.

При переходе к обратимой модели структура плоскости параметров отображения не претерпевает принципиальных изменений; вид отображения для фазы также принципиально не изменяется, хотя оно несколько «размывается», т.к. значение старшего показателя Ляпунова перестает быть приближено к $\ln 2$ и область гиперболического хаоса с увеличением параметра b исчезает.

Помимо этого, в обратимой системе при увеличении параметра диссипации области накопления линий удвоения смещаются в сторону больших R , а в области существования цикла периода 2 начинают появляться более области существования циклов более высоких периодов 3 и 9, которые раньше не были видны на карте, и наблюдается квазипериодичность.

Таким образом, свойства хаотического аттрактора были исследованы, полученные данные хорошо согласуются с изученной теорией и ранее известными результатами [4,5].

Список литературы

1. С.П.Кузнецов. Динамический хаос и однородно гиперболические аттракторы: от математики к физике. //УФН, 181, 2011, №2, 121-149.
2. А.А.Короновский, О.И.Москаленко, А.Е.Храмов. О применении хаотической синхронизации для скрытой передачи информации. //УФН, 179, 2009, №12, 1281-1310.
3. А.С.Дмитриев, А.И.Панас. Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Физматлит, 2002.
4. О.Б.Исаева, С.П.Кузнецов, И.Р. Сатаев, А.Пиковский. Об одном бифуркационном сценарии рождения аттрактора типа Смейла–Вильямса. //Нелинейная динамика, 9, 2013, №2, 267-294.
5. O.V. Isaeva, S.P. Kuznetsov, I.R. Sataev. A "saddle-node" bifurcation scenario for birth or destruction of a Smale-Williams solenoid. //Chaos: An Interdisciplinary Journal of Nonlinear Science, 22, 2012, No 4, 043111.
6. С.П.Кузнецов. Динамический хаос. М.:Физматлит, 2001.