

Министерство образования и науки Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«САРАТОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ
ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Н.Г.ЧЕРНЫШЕВСКОГО»

Кафедра физики открытых систем

**Индукцированная шумом перемежаемость в бистабильных системах и ее
проявление в хаотических системах с бистабильным типом аттрактора**

АВТОРЕФЕРАТ БАКАЛАВРСКОЙ РАБОТЫ

Студентки 4 курса 431 группы

Направления 09.03.02. «Информационные системы и технологии»

код и наименование направления

Факультета нелинейных процессов

наименование факультета

Никоновой Ксении Евгеньевны

фамилия, имя, отчество

Научный руководитель

профессор, д.ф.-м.н., доцент

должность, уч. ст., уч. зв.

личная подпись, дата

О.И. Москаленко

инициалы, фамилия

Заведующий кафедрой

д.ф.-м.н., профессор

должность, уч. ст., уч. зв.

личная подпись, дата

А.А. Короновский

инициалы, фамилия

Саратов 2018

Характеристика работы

Работа посвящена изучению индуцированной шумом перемежаемости в бистабильных системах, находящихся под внешним шумовым воздействием, и хаотических системах с бистабильным типом аттрактора.

Целью настоящей бакалаврской работы является исследование перемежающегося поведения, возникающего при внешнем шумовом воздействии, на примере модельных бистабильных систем и хаотических систем с бистабильным типом аттрактора, а также сопоставление результатов численного моделирования с теоретическими закономерностями, полученными ранее.

В работе было использовано 15 литературных источников.

Содержание работы

Во Введении обосновывается актуальность работы, дается общее представление о роли шума в нелинейных динамических системах, описываются такие понятия как «бистабильность» и «перемежаемость».

Наличие источников шума в нелинейных динамических системах может индуцировать новые режимы функционирования, которые не могут быть осуществлены в отсутствие шума¹. Влияние на динамическую систему таких внутренних и внешних источников шума может оказаться весьма значительным. К примеру, добавление в бистабильные системы² (системы, имеющие два равновесных состояния) даже слабого шума или любого другого внешнего возмущения может приводить к переключению системы из одного устойчивого состояния в другое. Это в свою очередь приводит к возникновению индуцированных шумом переходов, а также возникновению

¹ Анищенко В. С., Вадивасова Т. Е. Лекции по нелинейной динамике: учеб. пособие для вузов. – М.-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011.-516 с.

² Википедия [Электронный ресурс]: свободная энциклопедия. / Текст доступен по лицензии Creative Commons Attribution-ShareAlike; Wikipedia Foundation, Inc, некоммерческой организации. Электрон. дан.(1477346 статей) Wikipedia,2001. URL: <https://ru.wikipedia.org/wiki/> (дата обращения:28.04.2018). Загл. с экрана. Последнее изменение страницы: 07:12 23 апреля 2017 года. Яз.Рус.

новых переходов, не наблюдающихся в отсутствие шума³. Эти переходы представляют особый интерес, так как показывают возможность управлять поведением динамической системы с помощью шумового воздействия.

Индукцированное шумом перемежающееся поведение присуще для систем, в которых среда в той или иной мере случайна, и является универсальным явлением в нелинейной науке, которому в последнее время уделяется все больше внимания⁴. Явление перемежаемости не имеет строгого определения. Обычно процесс называется перемежающимся, если в нем происходит последовательное чередование двух различных динамических режимов. Перемежающееся поведение может наблюдаться в различных динамических системах, включая физические, медицинские и биологические системы.

Результат шумового воздействия на динамическую систему определяется как особенностями динамического поведения системы, так и статистикой шума, именно поэтому в работе главное внимание было уделено статистическим характеристикам перемежающегося поведения, таким как распределение длительностей пребывания исследуемой системы вблизи каждого из сосуществующих устойчивых состояний, теоретические закономерности для которых были получены ранее⁵.

В разделе 1 работы описывается теория индуцированной шумом перемежаемости в бистабильных системах.

Механизм возникновения перемежающегося поведения рассматривается на примере модельной бистабильной системы, находящейся под внешним шумовым воздействием, которая может быть записана в виде⁶:

$$\dot{x} + \frac{dU}{dx} + D\xi(t) = 0 \quad (1)$$

³ Хорстхемке В, Лефевр Р. Индуцированные шумом переходы, – М.: Мир, 1987.

⁴ Берже П., Помо И., Видал К. Порядок в хаосе. – М.: Мир, 1991.

⁵ Журавлев М. О., Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. Статистические характеристики индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах. Известия вузов. «ПНД», 2018, т. 26, №1, с. 80-89.

⁶ Журавлев М. О., Короновский А. А., Москаленко О. И., Храмов А. Е. Статистические характеристики индуцированной шумом перемежаемости в мультистабильных системах. Известия вузов. «ПНД», 2018, т. 26, №1, с. 80-89.

где $\xi(t)$ – δ -коррелированный Гауссов шум с нулевым средним, D – интенсивность шумового воздействия, $U(x)$ – потенциальная функция, имеющая вид:

$$U(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} + bx \quad (2)$$

Данная потенциальная функция имеет два локальных минимума, разделенных локальным максимумом, параметр b – это параметр асимметрии, который определяет форму и глубину потенциальных ям.

Для интегрирования системы уравнений (1)-(2) использовался метод Эйлера⁷ с шагом по времени $h=0.01$. При воздействии на систему внешнего шума со значением амплитуды $D=3$, можно заметить, что система находится попеременно вблизи то одного, то другого устойчивого положения равновесия. Другими словами, в системе обнаруживается перемежающееся поведение, индуцированное шумом. Данную ситуацию иллюстрирует рисунок 1.

Для получения статистических характеристик поведения системы, таких как распределение длительностей сосуществующих режимов, были проанализированы эволюции плотностей вероятностей $\rho(x, t)$ для каждого из двух режимов отдельно, а именно для области $-\infty < x < x^*$ и области $x^* < x < +\infty$, где точка $x^* = 0$ соответствует локальному максимум потенциальной функции. Распределение длительностей сосуществующих режимов, могут быть записаны в следующем виде:

$$p_{1,2}(t) = \frac{1}{T_{1,2}} \exp\left(-\frac{t}{T_{1,2}}\right) \quad (3)$$

где $T_{1,2}$ – среднее время пребывания системы вблизи того или иного устойчивого состояния, t – длительность пребывания системы вблизи одного устойчивого положения равновесия.

Исходные данные были аппроксимированы экспоненциальной функцией, заданной в виде: $y = ae^{-bx}$, где a, b – параметры аппроксимации.

⁷ Самарский А.А. Численные методы, М.:Наука, 1989.

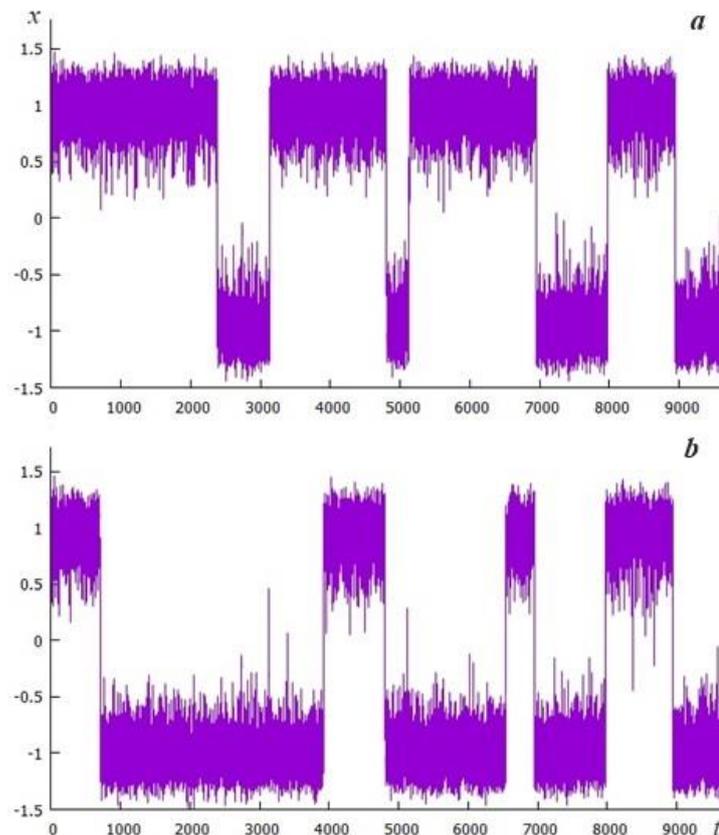


Рисунок 1 – Зависимости динамической переменной x от времени t , полученные путем численного интегрирования уравнения модельной бистабильной системы (1), находящейся под внешним шумовым воздействием интенсивности $D = 3$, методом Эйлера с шагом по времени $h=0.01$ для: (a) симметричного случая ($b=0$), (b) асимметричного случая ($b=0.05$)

Из рисунка 2 видно, что в режиме индуцированной шумом перемежаемости распределения длительностей сосуществующих режимов с хорошей степенью точности подчиняются экспоненциальному закону как в симметричном, так и в асимметричном случаях.

В разделе 2 работы рассматривается перемежающееся поведение, имеющее место в хаотических системах с бистабильным типом аттрактора на примере систем Лоренца и Чуа. Главным образом рассматривалось влияние шума на эти системы в стационарном режиме, когда система имеет два устойчивых положения равновесия, и в хаотическом режиме. Уравнения обеих систем интегрировались по схеме Эйлера с учетом источника гауссова шума.

По данным интегрирования на достаточно длительном времени строились зависимости динамических переменных и фазовые портреты, а также вычислялись статистические характеристики поведения систем, такие как распределения длительностей сосуществующих режимов.

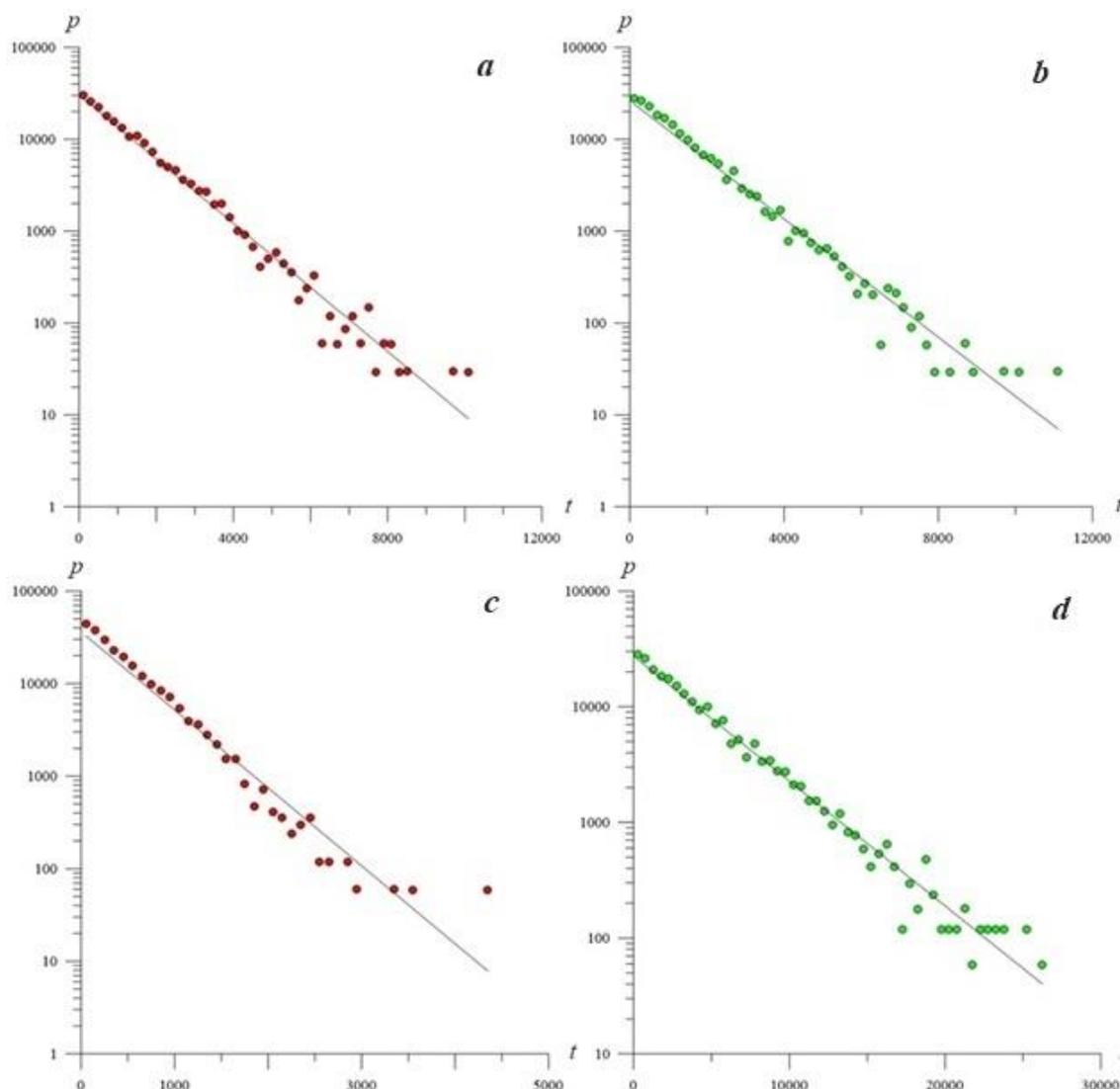


Рисунок 2 – Распределения длительностей пребывания модельной бистабильной системы (1) (маркеры) вблизи двух сосуществующих режимов при двух различных значениях параметра симметрии: (a,b) $b=0$ и (c,d) $b=0.05$ и их аналитические аппроксимации закономерностью (5) (сплошная линия) Параметры аппроксимации: (a,b) $a = 3 * 10^4$, $b = -8 * 10^{-4}$ (c) $a = 3,6 * 10^4$, $b = -1,9 * 10^{-3}$, (d) $a = 2,7 * 10^4$, $b = -2,4 * 10^{-4}$. На графиках ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

В качестве первой хаотической модели, способной демонстрировать перемежающееся поведение, была выбрана система Лоренца, представляющая собой систему трёх нелинейных дифференциальных уравнений I-го порядка (5)⁸:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= x(r - z) \\ \dot{z} &= xy - bz \end{aligned} \quad (4)$$

Управляющий параметр r системы был выбран равным $r=3.8$, так как при данном значении параметра в исследуемой системе существует два устойчивых положения равновесия, с координатами $x = \pm\sqrt{b(r-1)} = \pm\sqrt{\frac{8}{3}(3.8-1)} = \pm 2,73$.

При добавлении в первое уравнение системы (4) внешнего шума с достаточно большим значением амплитуды $D=50$ в системе осуществляются последовательные переходы от одного устойчивого положения равновесия к другому, т.е. система, перескакивая с одного листа аттрактора на другой, система демонстрирует перемежающееся поведение, индуцированное шумом (рисунок 3).

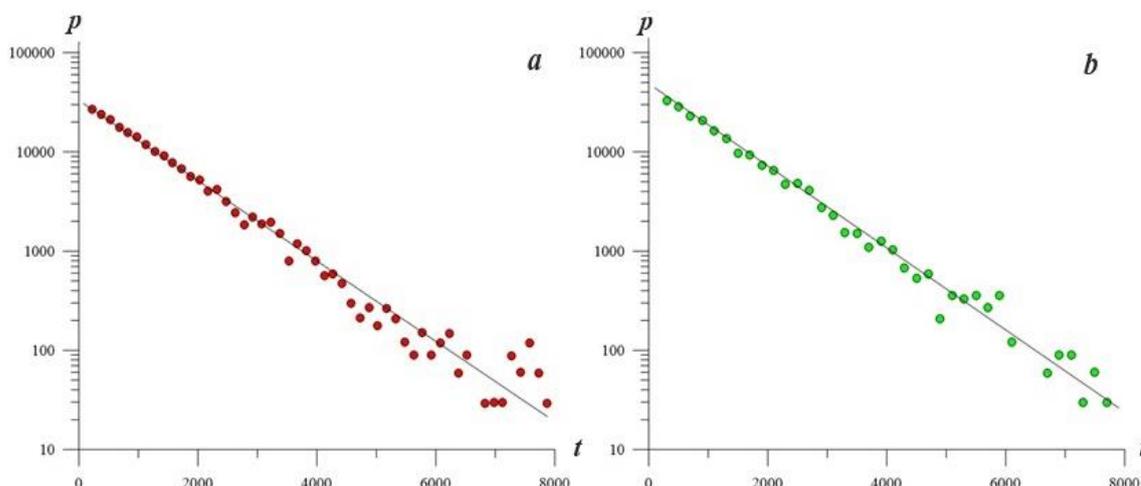


Рисунок 3 – Распределения длительностей пребывания системы Лоренца (4) (маркеры) вблизи (a) левого устойчивого положения равновесия, (b) правого устойчивого положения равновесия и их аппроксимации аналитической

⁸ Кузнецов С.П. Динамический хаос, серия «Современная теория колебаний и волн», М.:Физматлит,2001.

зависимостью (3) (сплошная линия). Параметры аппроксимации: $a=4,8 * 10^4$, $b=-9,5 * 10^{-4}$. На графиках ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

Второй системой в рамках дипломной работы была выбрана система Чуа, обладающая хаотической бистабильной динамикой⁹. Уравнения, описывающие поведение системы Чуа, находящейся под внешним шумовым воздействием, для удобства численного моделирования были представлены в виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \alpha(y - h(x)) + D\xi \\ \dot{y} &= x - y + z \\ \dot{z} &= -\beta y \end{aligned} \quad (5)$$

Для интегрирования системы уравнений (5) был использован метод Эйлера. Управляющие параметры системы были выбраны из тех соображений, что в зависимости от начальных условий в исследуемой системе существует 2 устойчивых положения равновесия.

При добавлении в первое уравнение системы (5) внешнего шумового воздействия с интенсивностью $D = 3$, можно заметить, как система находится попеременно вблизи то одного, то другого устойчивого положения равновесия (рисунок 4). Другими словами, в этом случае в системе также можно наблюдать перемежающееся поведение, индуцированное шумом.

Были получены статистические характеристики для данного типа поведения (рисунок 5), которые в свою очередь удовлетворяют с достаточной степенью точности экспоненциальному закону.

⁹ Бугаевский М.Ю., Пономаренко В.И. Б90 Исследование поведения цепи Чуа. Учебно-методическое пособие, – Саратов: Издательство ГосУНЦ «Колледж», 1998. – 29с.

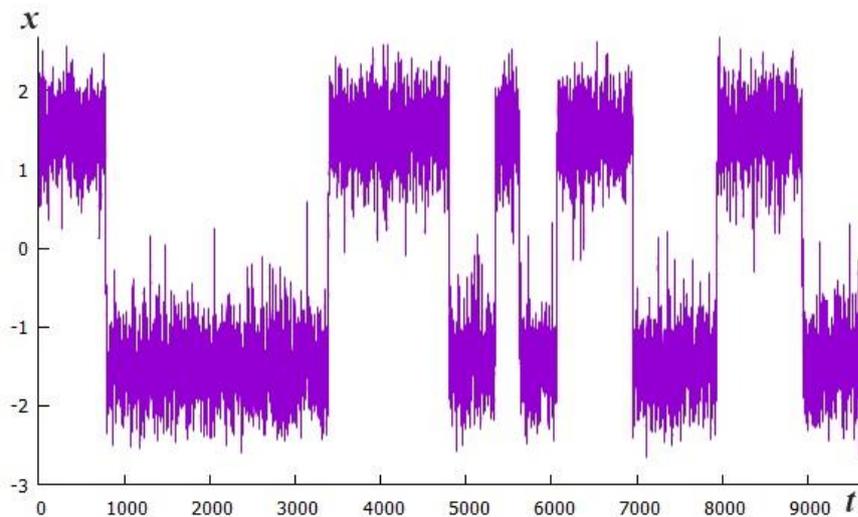


Рисунок 4 – Зависимость динамической переменной x от времени, полученная для системы Чуа (5), находящейся под внешним шумовым воздействием с интенсивностью $D = 3$, при значениях параметров $\alpha = 2$, $\beta = 10$, при которых в отсутствие шума в системе устанавливается стационарный режим

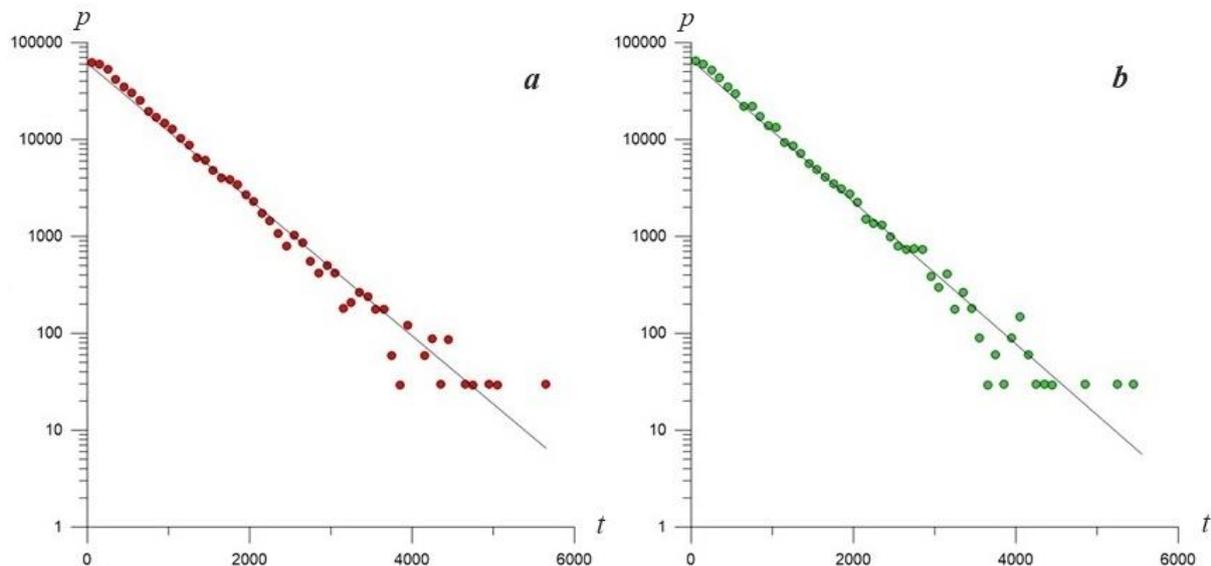


Рисунок 5 – Распределения длительностей пребывания системы Чуа (5) (маркеры) вблизи (a) левого устойчивого положения равновесия, (b) правого устойчивого положения равновесия и их аналитические аппроксимации зависимостью (3) (сплошная линия). Параметры аппроксимации: $a = 6,1 \cdot 10^4$, $b = -1,6 \cdot 10^3$. На графиках ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

Следующим шагом было рассмотрение поведения систем, находящихся в хаотическом режиме. Система Лоренца демонстрирует хаотическое поведение при так называемых «классических» значениях параметров $\sigma = 10, b = \frac{8}{3}, r = 28$. В этом случае, когда шумовое воздействие на систему не оказывается ($D=0$), решение системы, полученное методом Эйлера, совершает хаотические осцилляции большой амплитуды, а фазовый портрет системы представляет собой некий объект сложной структуры, похожий на моток ниток, аккуратно уложенных одна вдоль другой – квазигиперболический аттрактор Лоренца. При воздействии на систему, демонстрирующую хаотическое поведение, внешнего шума с интенсивностью $D \neq 0$ временные реализации динамических переменных и фазовый портрет становятся немного зашумленными, но качественно свой вид не изменяют. То же самое, происходит и в системе Чуа, со значением управляющих параметров $\alpha = 9, \beta = 14.286.$, при которых система демонстрирует хаотическое поведение.

Для хаотического режима поведения систем также были получены статистические характеристики, а именно распределения длительности пребывания системы на левом и правом листах хаотических аттракторов (вблизи неустойчивых неподвижных точек со своими координатами).

Из рисунков 6, 7 видно, что и в случае хаотического режима полученные статистические характеристики удовлетворяют с достаточной степенью точности экспоненциальному закону. Отклонение численно полученных значений от экспоненциальной зависимости в области больших длительностей пребывания исследуемой системы вблизи каждого из сосуществующих устойчивых состояний системы обусловлено бедностью статистики.

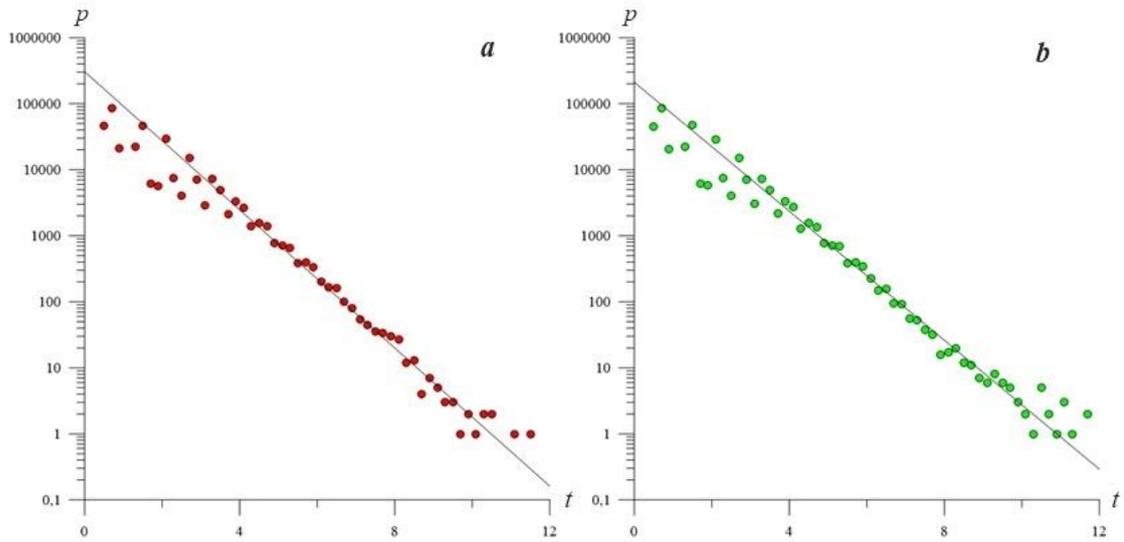


Рисунок 6 – Распределения длительностей пребывания системы Лоренца (7) в хаотическом режиме (маркеры) вблизи (a) левого и (b) правого листа хаотического аттрактора и их аналитические аппроксимации зависимостью (5) (сплошная линия). Параметры аппроксимации: $a = 20,9 * 10^4$, $b = -1,15$. На графиках ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

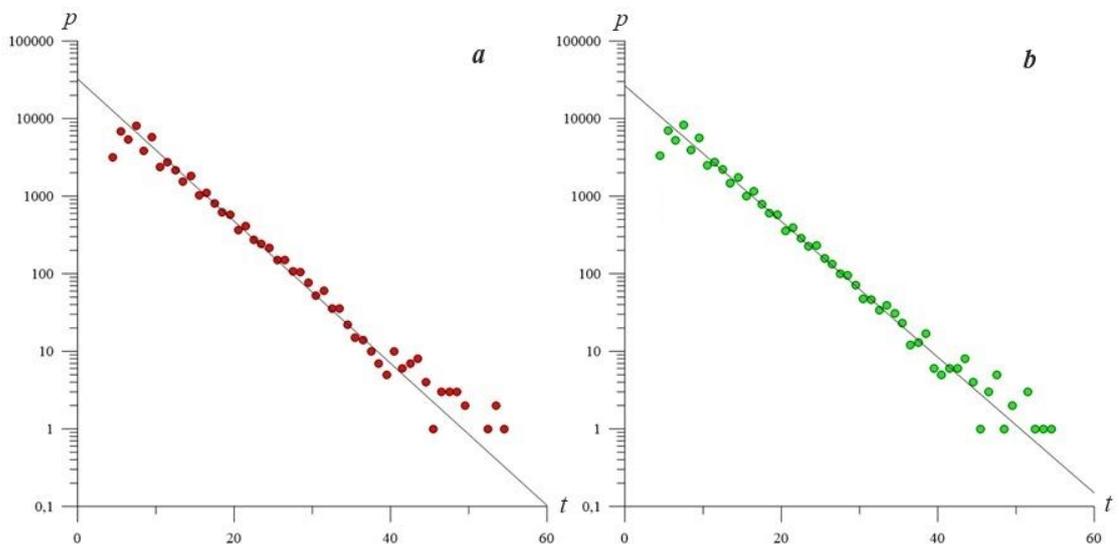


Рисунок 7 – Распределения длительностей пребывания системы Чуа (9) (маркеры) вблизи (a) левого и (b) правого устойчивого положения равновесия в хаотическом режиме и их аналитические аппроксимации зависимостью (5) (сплошная линия). Параметры аппроксимации: $a = 3,2 * 10^4$, $b = -0,22$. На графиках ось ординат представлена в логарифмическом масштабе

В заключении подводятся итоги исследования, излагаются его основные результаты.

В ходе проведенных исследований установлено, что модельная бистабильная система, находящаяся под внешним шумовым воздействием, демонстрирует индуцированную шумом перемежаемость. Для доказательства этого были получены статистические характеристики для данного типа перемежаемости, а именно распределения длительностей пребывания исследуемой системы вблизи каждого из сосуществующих состояний в симметричном и асимметричном случае. Выявлено, что полученные распределения подчиняются в обоих случаях с достаточной степенью точности экспоненциальному закону.

В качестве хаотических систем были исследованы системы Лоренца и Чуа. Установлено, что при внешнем шумовом воздействии на эти системы при определённых значениях управляющих параметров можно наблюдать индуцированную шумом перемежаемость. В рамках выполненных исследований были получены статистические характеристики перемежающегося поведения, такие как распределения длительностей пребывания исследуемых систем вблизи каждого из сосуществующих устойчивых состояний для обеих систем, находящихся в стационарном и хаотическом режимах.

Одним из результатов работы явилось то, что полученные статистические характеристики характерны как для систем, находящихся в стационарном режиме, так и для систем, демонстрирующих хаотическое поведение. Аналитически доказано, что в обоих режимах: стационарном и хаотическом, численные результаты хорошо соотносятся с теоретическими закономерностями, которые в свою очередь подчиняются экспоненциальному закону. Небольшие отклонение численно полученных значений от теоретической зависимости для обоих режимов в области больших длительностей пребывания исследуемой системы вблизи каждого из сосуществующих состояний системы обусловлено бедностью статистики.